**引用**:谢文清,刘新灵,丁春晓. 基于城乡差异化视角的基孔肯雅热最优防控策略分析[J]. 聊城大学学报(自然科学版),2026,39(6):877-884.

**Citation**: Xie Wenqing, Liu Xinling, Ding Chunxiao. Based on the urban-rural differentiation perspective: analysis of optimal prevention and control strategies for Chikungunya fever[J]. Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition),2026,39(6):877-884.

**文章编号** 1672-6634(2026)06-0877-08 **DOI** 10.19728/j.issn1672-6634.2026040008

# 基于城乡差异化视角的基孔肯雅热最优防控策略分析

谢文清,刘新灵,丁春晓

(聊城大学 数学与系统科学学院,山东 聊城 252059)

**摘要** 构建了城乡差异化视角的基孔肯雅热传播动力学模型,引入人群防护与蚊媒消杀措施,建立了以最小化感染人数和防控成本为目标的最优控制问题。利用 Pontryagin 极大值原理求解最优策略,数值模拟结果表明,针对城乡差异实施最优控制,可使城市和农村的感染峰值分别降低约 81%和 94%,达峰时间缩短 94%和 92%,并有效缩短疫情持续时间。建议在实际防控中,于疫情早期优先开展以蚊媒消杀为主、结合人群防护的联合干预,在农村地区适当延长高强度防控措施时间,并坚持城乡分区施策以提高防控效果。

**关键词** 最优控制;基孔肯雅热;城乡差异化;传播动力学;防控策略

**中图分类号** O29 **文献标志码** A

**本文电子版文后有增强出版内容**。

# Based on the urban-rural differentiation perspective: analysis of optimal prevention and control strategies for Chikungunya fever

XIE Wenqing, LIU Xinling, DING Chunxiao

(School of Mathematics and Systems Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

**Abstract** A transmission dynamics model for Chikungunya fever was developed from the perspective of urban-rural differentiation, incorporating personal protection and vector control measures to establish an optimal control problem aimed at minimizing both the number of infections and the costs of prevention. Utilizing Pontryagin's Maximum Principle to solve for optimal strategies, numerical simulations demonstrate that implementing differentiated optimal control can reduce infection peaks in urban and rural areas by approximately 81% and 94%, while shortening the time-to-peak by 94% and 92%, respectively, thereby effectively curtailing the epidemic's duration. The study suggests that practical prevention efforts should prioritize a combined intervention of early-stage vector control and personal protection, appropriately extend high-intensity measures in rural regions, and maintain a partitioned urban-rural strategy to enhance overall control effectiveness.

**收稿日期**:2026-04-15

**基金项目**:国家自然科学基金项目(12461100);聊城大学横向课题(K25LD296)资助

**通信作者**:丁春晓,女,汉族,博士,副教授,研究方向:传染病建模分析及控制等,E-mail:dingchunxiao1987@163.com。

**Keywords** optimal control; chikungunya; urban-rural differentiation; transmission dynamics; prevention and control strategies

# 0 引言

基孔肯雅热是由感染基孔肯雅病毒所引起的急性传染病,患者发病时常表现出急起高热、小关节痛、关节炎以及皮疹等,部分患者可能存在长期关节功能障碍[1]。该病传播媒介主要为白纹伊蚊和埃及伊蚊,尽管通过环境治理、化学消杀等综合措施一定程度上遏制了病毒扩散,但病毒传播速度快、存在隐性感染及媒介控制难度大等问题仍对防控体系构成了严峻考验。自 1952 年坦桑尼亚首次爆发以来,基孔肯雅热已在全球 119 个国家和地区造成本地传播,是热带亚热带地区重要的公共卫生问题之一[2-3]。

随着传染病动力学研究的不断发展,数学模型在揭示疾病传播机制及制定防控策略方面发挥着越来越重要的作用[2-4]。现有研究主要基于人—蚊耦合基础传播框架,建立了许多动力学模型。例如,文献[3]建立了经典的人—蚊传播模型,对疾病的基本再生数及稳定性进行分析。文献[4]在此基础上引入年龄结构,描述了不同的人群在传播过程中所具有的差异性。文献[5]进一步从空间或人群流动角度出发,研究了局部控制和人群迁移对基孔肯雅热疫情传播的影响。这些研究在一定程度上加深了对基孔肯雅热传播规律的认识。然而,现有模型多是针对同一区域来分析,没有充分考虑城乡不同区域在人口密度、蚊媒滋生环境等方面的差异,所以很难精准地捕捉到疾病在城乡传播分化方面的特征,也难为差异化防控策略的制定提供理论支持[6-7]。本文从这一角度出发,构建城乡差异化视角的基孔肯雅热传播动力学模型,该模型采用 $SEIR-SI$ 仓室结构,旨在通过 $E$ 仓室刻画基孔肯雅热在人体内约 3～7 天的潜伏特征,并结合蚊媒感染后终身带毒且生命周期短的生物学特性,利用 $SI$ 结构简化媒介传播过程,从而提升模型对实际问题的解释能力[8-9]。

最优控制理论是由数学家庞特里亚金等人在 1956 年提出来的,其核心是 Pontryagin 极大值原理[10-11]。这一理论借助协态变量来构建哈密顿函数,进而将寻找最优控制函数的问题转变为求解含有状态方程、协态方程以及控制约束的边值问题,遵循系统动力学相关条件的前提下实现对目标泛函的最小化处理[11-12]。近年来,最优控制方法已被广泛用于各类传染病模型研究中,用以权衡感染控制效果与防控成本之间的关系[13-17]。然而,现有的基孔肯雅热的最优控制研究,对城乡的差异性有所忽视。本文在经典最优控制的基础之上充分考虑到城乡差异化的因素,从而为精准防控策略给予一定的理论支撑。主要贡献集中在以下三个方面:(1) 构建城乡差异化视角的基孔肯雅热传播动力学模型,通过设置差异化的蚊媒招募率、传播率等参数,并加入城乡人群迁移,来描述城乡差异化环境对疾病传播的差异化影响。(2) 基于已构建的模型,引入城市与农村的人群防护和蚊媒消杀措施,结合最优控制理论,提出以“最小化感染人数+防控成本”为目标函数的最优控制问题。(3) 通过对比单一控制策略、联合控制策略与最优控制策略的防控效果,给出基孔肯雅热城乡差异化防控建议。

# 1 城乡差异化视角下的基孔肯雅热传播动力学模型构建与分析

为刻画基孔肯雅热在城乡不同区域中的传播特征,并分析差异化防控措施的最优实施策略,本文在经典人—蚊传播模型的基础上,构建一个城乡差异化视角的基孔肯雅热传播动力学模型。

模型通过上标 u 和 r 分别代表城市和农村区域,用下标 h 和 v 分别代表人和蚊。在人群方面,考虑城市易感者 $S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}$、城市潜伏者 $E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}$、城市感染者 $I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}$、城市康复者 $R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}$、农村易感者 $S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}$、农村潜伏者 $E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}$、农村感染者 $I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}$ 和农村康复者 $R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}$,构成 SEIR 结构,并且城市总人口 $N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}$,农村总人口 $N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}$。在蚊媒方面,仅考虑城市易感蚊媒 $S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}$、城市感染蚊媒 $I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}$、农村易感蚊媒 $S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}$、农村感染蚊媒 $I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}$,构成 $SI$ 结构。由于蚊媒飞行距离有限(通常活动半径不足 500 米),虽存在随交通工具远程迁移的极端情况,但其概率远低于人群流动,故本文假设城市与农村蚊媒种群彼此独立,不发生空间迁移。而人群可因务工、探亲等社会活动在城乡之间迁移,从而实现城乡系统之间的耦合。在人群感染过程中,易感人群通过被感染蚊媒叮咬而感染。相应地,易感蚊媒通过叮咬感染人群而获得病毒。基于以上假设,构建城乡差异化视角的基孔肯雅热传播动力学模型如下所示

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}-\mu_{\mathrm{h}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-m_{\mathrm{ur}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}, && \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{r}}\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}-\mu_{\mathrm{h}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-m_{\mathrm{ru}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}},\\
&\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}-(\sigma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}})E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-m_{\mathrm{ur}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}, && \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{r}}\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}-(\sigma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}})E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-m_{\mathrm{ru}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}},\\
&\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\sigma_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-(\gamma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}})I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-m_{\mathrm{ur}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}, && \frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\sigma_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-(\gamma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}})I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-m_{\mathrm{ru}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}},\\
&\frac{\mathrm{d}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\gamma_{\mathrm{h}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{h}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-m_{\mathrm{ur}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}, && \frac{\mathrm{d}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\gamma_{\mathrm{h}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-\mu_{\mathrm{h}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-m_{\mathrm{ru}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}},\\
&\frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\Lambda_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}-\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{u}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}-\mu_{\mathrm{v}}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}, && \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\Lambda_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}-\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{r}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}-\mu_{\mathrm{v}}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}},\\
&\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{u}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}-\mu_{\mathrm{v}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}, && \frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{r}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}-\mu_{\mathrm{v}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}。
\end{aligned}\tag{1}$$

本文参数选自参考文献[5,11-20]或合理假设，详见支撑材料表 1。

模型(1)的无病平衡点为 $P_0=(S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}0},\ 0,\ 0,\ 0,\ S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}0},\ 0,\ S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}0},\ 0,\ 0,\ 0,\ S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}0},\ 0)$，式中 $S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}0}=\frac{\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}(\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ru}})+\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}m_{\mathrm{ru}}}{\mu_{\mathrm{h}}(\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}}+m_{\mathrm{ru}})}$，$S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}0}=\frac{\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}(\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}})+\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}m_{\mathrm{ur}}}{\mu_{\mathrm{h}}(\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}}+m_{\mathrm{ru}})}$，$S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}0}=\frac{\Lambda_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{\mu_{\mathrm{v}}}$，$S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}0}=\frac{\Lambda_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{\mu_{\mathrm{v}}}$。无病平衡点的推导过程见支撑材料 1.1。对模型(1)，给出其基本再生数与无病平衡点稳定性分析，其基本再生数为 $R_0=\sqrt{\frac{W_{11}+W_{22}+\sqrt{(W_{11}-W_{22})^2+4W_{12}W_{21}}}{2}}$，式中 $W_{11}=\frac{\sigma_{\mathrm{h}}\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{u}}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}0}}{\mu_{\mathrm{v}}N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}0}\delta\theta}(\alpha_{\mathrm{h}2}d_{\mathrm{h}2}+m_{\mathrm{ru}}m_{\mathrm{ur}})$，$W_{12}=\frac{\sigma_{\mathrm{h}}\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{r}}\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{u}}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}0}}{\mu_{\mathrm{v}}N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}0}\delta\theta}m_{\mathrm{ru}}(\alpha_{\mathrm{h}1}+d_{\mathrm{h}2})$，$W_{22}=\frac{\sigma_{\mathrm{h}}\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{r}}\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{r}}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}0}}{\mu_{\mathrm{v}}N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}0}\delta\theta}(\alpha_{\mathrm{h}1}d_{\mathrm{h}1}+m_{\mathrm{ur}}m_{\mathrm{ru}})$，$W_{21}=\frac{\sigma_{\mathrm{h}}\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{r}}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}0}}{\mu_{\mathrm{v}}N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}0}\delta\theta}m_{\mathrm{ur}}(\alpha_{\mathrm{h}2}+d_{\mathrm{h}1})$，$N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}0}=\frac{\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}(\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ru}})+\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}m_{\mathrm{ru}}}{\mu_{\mathrm{h}}(\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}}+m_{\mathrm{ru}})}$，$N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}0}=\frac{\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}(\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}})+\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}m_{\mathrm{ur}}}{\mu_{\mathrm{h}}(\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}}+m_{\mathrm{ru}})}$，$\alpha_{\mathrm{h}1}=\sigma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}}$，$\theta=(\gamma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}})(\gamma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}}+m_{\mathrm{ru}})$，$d_{\mathrm{h}1}=\gamma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}}$，$d_{\mathrm{h}2}=\gamma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ru}}$，$\delta=(\sigma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}})(\sigma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}}+m_{\mathrm{ru}})$，$\alpha_{\mathrm{h}2}=\sigma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ru}}$。基本再生数的推导过程详见支撑材料 1.2。

定理 1　当 $R_0<1$ 时，模型(1)的无病平衡点 $P_0$ 局部渐近稳定；当 $R_0>1$ 时，模型(1)的无病平衡点 $P_0$ 不稳定。

定理 2　当 $R_0<1$ 时，模型(1)的无病平衡点 $P_0$ 全局渐近稳定。

定理 1、定理 2 证明详见支撑材料 1.3、1.4。

## 2　城乡差异化视角下的基孔肯雅热最优控制问题

基于建立的城乡差异化视角下的基孔肯雅热传播动力学模型(1)，考虑以下两个目标构建相应的最优控制问题[21-22]。在防控的实际操作当中，政府以及公共卫生部门一方面希望能够尽量把感染人群的数量减少，以此来降低这种疾病给社会经济所带来的危害。另外一方面由于防控措施，比如个人防护、蚊媒消杀等等，都会伴随着人力、物力还有经济方面的成本，所以过高的干预强度很难长时间维持[23-27]。本文引入以下 4 个控制变量，其中 $t$ 为时间变量：$u_1(t)$ 表示城市人群防护强度，旨在降低城市人群被感染的有效传播率，如使用驱蚊剂、长袖衣服、纱窗和蚊帐等；$u_2(t)$ 表示城市蚊媒消杀强度，旨在增加城市蚊媒的额外死亡率，如利用诱蚊灯进行蚊密度检测，专业消杀公司负责重点区域精准消杀等；$u_3(t)$ 表示农村人群防护强度，旨在降低农村人群被感染的有效传播率，如推广使用蚊香等传统有效手段，利用村广播、宣传栏、赶集日等时机，向村民普及防蚊知识等；$u_4(t)$ 表示农村蚊媒消杀强度，旨在增加农村蚊媒的额外死亡率，清理孳生地，在积水坑塘投放灭蚊幼颗粒等。

基于以上考虑，为了最小化感染人数与防控措施实施成本，给出城乡差异化视角的基孔肯雅热最优控制问题的目标函数为

$$J(I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}(t),I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}(t),u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t))=\min_{u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t)}\int_0^{\mathrm{T}}\Big(A_1I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}(t)+A_2I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}(t)+\sum_{i=1}^{4}B_iu_i^2(t)\Big)\,\mathrm{d}t。\tag{2}$$

约束条件为

$$\frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}(1-u_1)\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}-\mu_{\mathrm{h}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-m_{\mathrm{ur}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}},\quad \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\Lambda_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{r}}(1-u_3)\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}-\mu_{\mathrm{h}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-m_{\mathrm{ru}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}},$$

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}(1-u_1)\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}-(\sigma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}})E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-m_{\mathrm{ur}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}},\quad \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{r}}(1-u_3)\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}-(\sigma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}})E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-m_{\mathrm{ru}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}},$$

$$\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\sigma_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-(\gamma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}})I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-m_{\mathrm{ur}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}},\quad \frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\sigma_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-(\gamma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}})I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-m_{\mathrm{ru}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}},$$

$$\frac{\mathrm{d}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\gamma_{\mathrm{h}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{h}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-m_{\mathrm{ur}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}},\quad \frac{\mathrm{d}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\gamma_{\mathrm{h}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-\mu_{\mathrm{h}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-m_{\mathrm{ru}}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}},$$

$$\frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\Lambda_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}-\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{u}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}-(\mu_v+u_2)S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}},\quad \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\Lambda_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}-\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{r}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}-(\mu_v+u_4)S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}},$$

$$\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}=\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{u}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}-(\mu_v+u_2)I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}},\quad \frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{r}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}-(\mu_v+u_4)I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}。\tag{3}$$

式中 $J(\cdot)$ 为城乡差异化视角的基孔肯雅热最优控制的总代价泛函，$T$ 为终点时刻，系数 $A_1$，$A_2>0$ 用于衡量感染人群对社会危害的重要程度，系数 $B_i>0(i=1,2,3,4)$ 用于反映实施相应控制措施所需成本权重。利用 Pontryagin 极大值原理[21]，对上述最优控制问题(2)求解。

定理 3　以(2)为目标函数，(3)为约束条件的城乡差异化视角的基孔肯雅热最优控制问题的最优解为

$$\begin{aligned}&u_1^*(t)=\min\left\{1,\ \max\left(0,\ \frac{\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{2B_1N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}(\lambda_2-\lambda_1)\right)\right\},u_2^*(t)=\min\left\{1,\ \max\left(0,\ \frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}\lambda_5+I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}\lambda_6}{2B_2}\right)\right\},\\&u_3^*(t)=\min\left\{1,\ \max\left(0,\ \frac{\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{r}}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{2B_3N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}(\lambda_8-\lambda_7)\right)\right\},u_4^*(t)=\min\left\{1,\ \max\left(0,\ \frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}\lambda_{11}+I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}\lambda_{12}}{2B_4}\right)\right\},\end{aligned}\tag{4}$$

其可行控制集为 $U=\{(u_1,u_2,u_3,u_4)\mid u_i(t)$ 为可测函数，$0\leqslant u_i(t)\leqslant 1,\ i=1,2,3,4\}$。定理 3 证明详见支撑材料 1.5。

## 3　数值模拟

为了验证城乡差异化视角下的基孔肯雅热不同策略下的有效性，本节对系统进行模拟分析，通过对比无控制与最优控制，直观展示差异化控制措施对疾病传播的抑制效果。

### 3.1　最优控制策略

初始条件假设城市与农村地区均存在少量感染个体，其余人群以易感者为主。同时假设城乡蚊媒种群中存在一定比例的感染蚊媒。令状态变量取值如下，(1) 城市蚊媒：$S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}(0)=800$，$I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}(0)=20$。(2) 农村蚊媒：$S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}(0)=1\ 200$，$I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}(0)=30$。(3)城市人群：$S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}(0)=5\ 000$，$E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}(0)=10$，$I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}(0)=5$，$R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}(0)=0$。(4)农村人群：$S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}(0)=3\ 000$，$E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}(0)=6$，$I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}(0)=3$，$R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}(0)=0$，模拟时间为 0～100 天，时间步长为 1 天。在目标函数(2)中，为了强调城乡健康的公平性，设定感染危害权重 $A_1=A_2=500$，同时，为了客观评价各项防控措施的内在效能，采用均等成本假设，$B_1=B_2=B_3=B_4=20$。

如图 1 所示，无控制情况下，城乡两地的感染人数都会迅速地上升到比较高的水平，并且农村感染规模整体上比城市更大。采取最优控制策略后，城乡感染人数的峰值、达峰时间、感染规模都有较为显著的抑制效果。

从峰值来看，无控制情况下，城市当中感染的人数呈现出不断增长的态势，其峰值达到了 55 人左右。相比之下，在实施最优控制策略后，城市感染人数的峰值仅约 10 人，其降幅达到了约 81%。这充分说明最优控制策略能够在很大程度上有效地降低城市疫情暴发的强度。从达峰时间来看，无控制情况下，疫情的发展速度较快，需要约 50 天达到峰值。在实施最优控制策略后，城市感染人数在 3 天左右便达到峰值，达峰后迅速下降，达峰时间缩短了约 94%，表明最优控制策略能够有效缩短疫情持续时间。从感染规模来看，无控制情况下，城市疫情的传播态势会持续不断，而实施最优控制策略后，感染人数迅速下降到 0，实现了对疫情的有效控制。

此外，农村整体感染规模明显高于城市。无控制情况下，农村地区的感染人数峰值约为 150 人。而在实施最优控制策略后，农村感染人数的峰值会降低到 8 人左右，其降幅达到了约 94%。无控制情况下，农村地区大概需要 70 天达到峰值，而在实施最优控制策略后，感染人数则在 5 天左右的时间就能达到峰值，并且会迅速下降，达峰的时间缩短了大约 92%。无控制情况下，农村地区的感染规模较大，然而实施了最优控制策略之后，感染人数会迅速地下降至 0。从这些情况来看，说明最优控制策略可以有效控制农村疫情的传播。

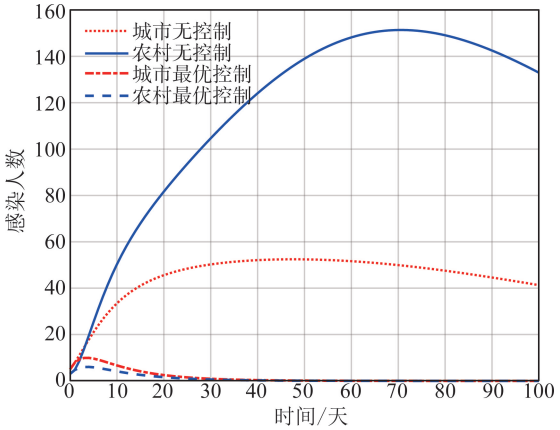



**图 1　城市与农村感染者数量在无控制与最优控制下的比较**

**Fig. 1　Comparison of the number of infected individuals in urbanand rural areas with and without optimal control**

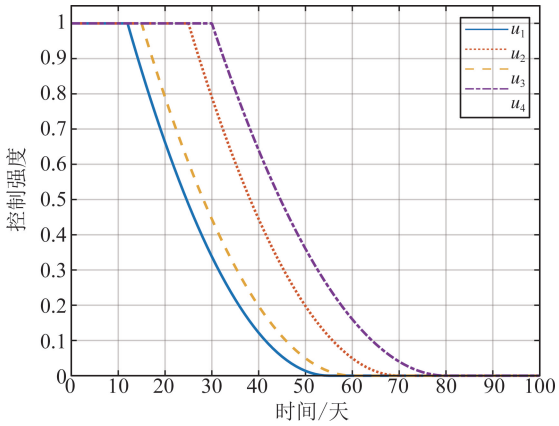



**图 2　城乡四类防控措施强度的时间演化**

**Fig. 2　Temporal evolution of the intensity of four types of prevention and control measures in urban and rural areas**

图 2 展示了城乡防控措施实施强度以及时间演化的相关特征。从防控强度的动态变化情况来看，在疫情初期，农村的蚊媒消杀以及人群防护措施强度和城市相似，并且其高强度防控持续时间比城市长。而城市的防控措施随着疫情被快速地控制住之后，会更早地进入到强度衰减的阶段。之所以会出现这样的情况，可能存在的原因有：其一，城乡的传播环境是不一样的，农村的蚊媒滋生环境比较复杂，蚊媒密度也比较高，传播率也比较强，所以其自然传播所具有的持续性以及风险都比较高，这就需要花费较长的时间并且保持高强度的防控才能够阻断传播链。其二，城市的人口比较密集，人与人之间的接触也比较频繁，但是其蚊媒防控的环境相对较好，通过短期的高强度干预就能够快速地压制疫情，因此其防控强度能够较快回落。与此同时，蚊媒消杀措施在城乡两地维持高强度实施的周期均长于人群防护措施，其中农村的情况尤为突出，这正好契合了农村是以蚊媒为核心传播驱动这一特征，也进一步印证了城乡防控需要围绕自身传播的关键因素来制定差异化强度策略的必要性。城乡防控强度进行差异化的调整，避免出现“一刀切”所导致的资源浪费，能够精准地匹配不同区域的传播规律，这也是城乡差异化防控的核心所在。

### 3.2　联合控制策略

为了进一步分析不同联合防控措施对疫情传播的影响，对比分析 3 种防控措施下感染人数的变化规律，并与无控制情况和最优控制情况进行比较。设控制变量为常数控制，其取值为 0.4。该强度并不对应某种单一具体措施，而是对多种现实防控行为在覆盖范围、实施频率及持续时间等方面的综合表征，用以反映在资源约束条件下可长期维持的中等干预水平。以下为三种防控措施：(1) $u_1(t)=u_3(t)=0.4$，$u_2(t)=u_4(t)=0$(联合人群防护措施)：表示社会中约 40%的人群能够持续采取有效防护行为，如使用驱蚊剂、长袖衣服、纱窗和蚊帐等，同时伴随中等频率的公共宣传(如每周 1～2 次社区宣传或提醒)。(2) $u_2(t)=u_4(t)=0.4$，$u_1(t)=u_3(t)=0$(联合蚊媒消杀措施)：表示实施中等频率的环境治理与药物消杀措施，如每周开展 1 次重点区域喷洒作业，并配合定期清理积水点和蚊虫孳生地，覆盖主要高风险区域但尚未达到全覆盖高强度治理水平。(3) $u_1(t)=u_2(t)=u_3(t)=u_4(t)=0.4$(联合人群防护与蚊媒消杀措施)：表示同时维持中等强度的人群防护与蚊媒消杀措施。

通过数值模拟得到不同控制措施下的感染人数，如图 3、4 所示。无控制情况下，城市和农村的感染人数都会快速地上升，城市大概在第 50 天达到峰值，农村则是在第 70 天左右达到峰值，之后便会缓慢下降，整体的感染规模较大，并且持续时间较长，疫情会长期存在。仅采取联合人群防护措施时，城市和农村的感染峰

值会明显下降,城市感染人数的降幅大概 47%,农村感染人数的降幅大概 56%,但疫情会持续存在,这说明人群防护对于疫情抑制效果有限。

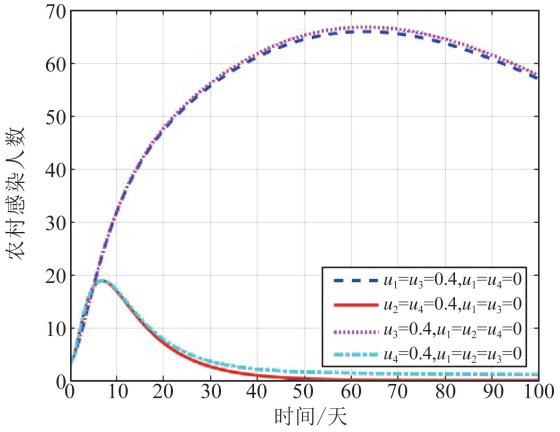



**图 3 不同联合控制措施下城市感染人数变化**

**Fig. 3 Changes in the number of infected individuals in urban areas under different combined control measures**

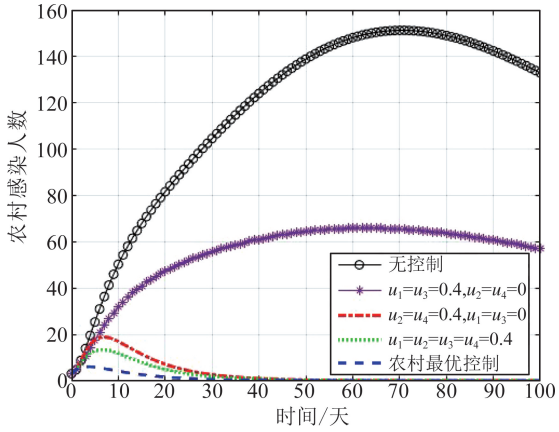



**图 4 不同联合控制措施下农村感染人数变化**

**Fig. 4 Changes in the number of infected individuals in rural areas under different combined control measures**

采取联合蚊媒消杀措施时,感染人数迅速下降,峰值大幅度地降低,城市感染人数的降幅大概在 67%,农村感染人数的降幅大概在 86%,疫情能够较快地得到控制,这表明采取联合蚊媒消杀措施是能够阻断病毒传播的,并且其效果要比联合人群防护要好。

采取联合人群防护与蚊媒消杀措施时,城市感染人数的峰值能够降至大约 12,降幅大概是 75%,农村感染人数的降幅大概是 91%,这表明,虽然单独采取联合人群防护措施或联合蚊媒消杀措施都对疫情有抑制效果,但当两种控制措施同时实施时,感染人数的减少最为显著,所以联合人群防护与蚊媒消杀措施是在所研究的区域减少疾病传播十分有效的方法。

采取最优控制后,防控效果达到最佳,城乡感染峰值均被控制在极低水平,城市较无控制场景降幅超 81%,农村降幅 94%,达峰时间更早,整体感染规模最小,疫情能够在最短时间内迅速消退,充分说明最优控制有显著优势。

对比城乡两条曲线可以发现,农村感染人数整体规模高于城市,但不同联合控制措施下的变化趋势与城市基本一致:无控制时传播迅猛,联合人群防护措施效果有限,联合蚊媒消杀措施可快速压制疫情,联合人群防护与蚊媒消杀措施效果进一步提升,最优控制则能实现最有效的疫情遏制,二者规律高度相似。

### 3.3 单一控制策略

为了进一步量化不同单一控制措施对城乡疫情传播的具体影响,对比分析 4 种防控措施下感染人数的变化规律,并与无控制情况和最优控制情况进行比较,设控制变量为常数控制,大小为 0.4,表示现实中等强度干预。四种防控措施如下:(1) 城市人群防护措施($u_1(t)=0.4$, $u_2(t)=u_3(t)=u_4(t)=0$):表示城市中约 40%居民持续采取防蚊措施,如使用驱蚊剂、长袖衣服、纱窗和蚊帐等,同时通过社区或媒体进行中等频率的防护宣传,但尚未达到强制性或全民参与水平。(2) 城市蚊媒消杀措施($u_2(t)=0.4$, $u_1(t)=u_3(t)=u_4(t)=0$):表示城市中对公园、绿化带、排水系统等重点区域进行定期消杀,开展基础环境治理,但未实施高频次、大范围的集中灭蚊行动。(3) 农村人群防护措施($u_3(t)=0.4$, $u_1(t)=u_2(t)=u_4(t)=0$):表示农村地区约 40%人群采取防护措施,如使用蚊帐等传统方式,并结合村广播或集市宣传进行防蚊知识普及,但整体防护覆盖率和规范性仍处于中等水平。(4) 农村蚊媒消杀措施($u_4(t)=0.4$, $u_1(t)=u_2(t)=u_3(t)=0$):表示农村地区开展中等强度的蚊媒治理,如定期清理房前屋后积水、沟渠及水体,并对重点孳生地投放灭蚊药剂或幼虫控制措施,但尚未形成高强度、持续性的集中治理模式。

通过数值模拟得到不同单一控制措施下城乡感染人数的变化情况,如图 5 所示,从城市感染人数曲线可以看出,无控制情况下,感染人数快速攀升,约 50 天达到峰值,之后缓慢下降,整体感染规模较大,疫情持续时间较长,说明缺乏干预时疫情会广泛传播且难以自然消退。仅采取城市人群防护措施时,感染峰值降至约 30 人,较无控制场景降幅约 42%,达峰时间略有提前,但疫情仍持续较长时间,表明城市人群防护措施仅能

缓解传播，无法从根源上阻断城市疫情。仅实施城市蚊媒消杀措施时，感染人数在初期短暂上升后快速下降，峰值约 17 人，较无控制场景降幅约 67%，达峰时间提前至约 5 天，并且约 30 天后稳定在较低水平，说明城市蚊媒消杀措施可有效切断传播途径，防控效果显著优于城市人群防护措施。当采用农村人群防护措施和农村蚊媒消杀措施时，其对城市疫情的抑制效果有限，感染峰值仍维持在约 50 人，较无控制情况降幅仅约 3.8%，仅能稍微加快疫情消退速度，这表明针对农村地区的防控措施对城市疫情的影响较小，所以在现实生活中，不能仅依赖农村地区实施的防控措施来对城市地区的疫情进行改善。此外，城市的最优控制效果较为突出，感染人数峰值约 10 人，较无控制场景降幅约 81%，约 30 天后几乎降至 0，达峰时间最早，整体感染规模最小，是抑制城市疫情的最优方案。

如图 6 所示，从农村感染人数曲线可以看出，农村感染人数整体规模较大，无控制情况下感染人数约 70 天达峰，峰值约 152 人，之后缓慢下降，疫情持续时间很长，传播风险显著高于城市。仅采取农村人群防护措施时，感染峰值降至约 67 人，较无控制场景降幅约 55%，达峰时间约 65 天，虽能降低峰值，但对整体感染规模的抑制作用仍有限。仅实施农村蚊媒消杀措施时，感染峰值约 20 人，较无控制场景降幅约 86%，约 30 天后基本趋近于 0，达峰时间约 8 天，说明农村蚊媒消杀措施能快速阻断农村疫情传播。当采用城市蚊媒消杀措施和城市人群防护措施时，对农村疫情的抑制效果同样微弱，感染峰值约 151 人，较无控制情况降幅仅约 0.7%，仅能小幅度加快农村疫情消退速度，这表明针对城市地区的防控措施对农村疫情的影响同样有限，所以在现实生活中，不能仅依赖城市地区实施的防控措施来对农村地区的疫情进行改善。此外，农村最优控制效果最为彻底，感染人数峰值不足 5 人，较无控制场景降幅约 96%，初期短暂上升后迅速归零，达峰时间最早，能在最短时间内遏制农村疫情传播。

图 7 对比了采取城市人群防护措施、城市蚊媒消杀措施与联合人群防护措施、联合蚊媒消杀措施后城市感染人数的变化规律，展现了联合人群防护措施、联合蚊媒消杀措施对城市疫情的强化抑制效果。在蚊媒消杀措施维度，实施联合蚊媒消杀措施后，城市感染人数相较于城市蚊媒消杀措施的下降速率加快，疫情在更短时间内趋于零。在人群防护措施维度，实施联合人群防护措施，城市的感染人数进一步下降，所以建议在现实防控中，相较于城市人群防护措施、城市蚊媒消杀措施，选择采取联合人群防护措施、联合蚊媒消杀措施，可以优化城市疫情的防控效果。从图 8 可知，农村人群防护与联合人群防护相近，这就说明增加城市人群防护对农村的疫情而言改善较小，农村蚊媒消杀与联合蚊媒消杀相近，这就表明城市蚊媒消杀措施对农村的疫情影响比较低。

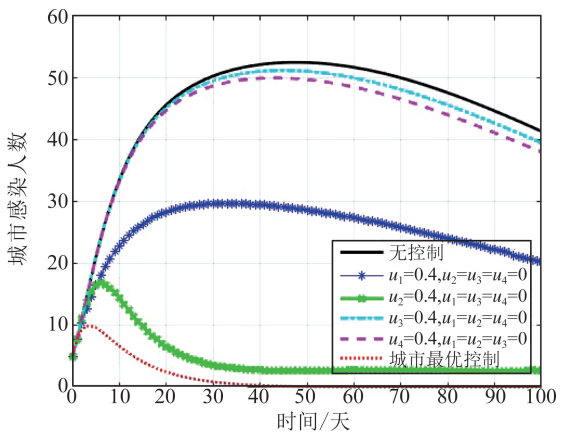



**图 5　不同单一控制措施下城市感染人数比较**

**Fig. 5　Comparison of urban infection numbers under different individual control strategies**

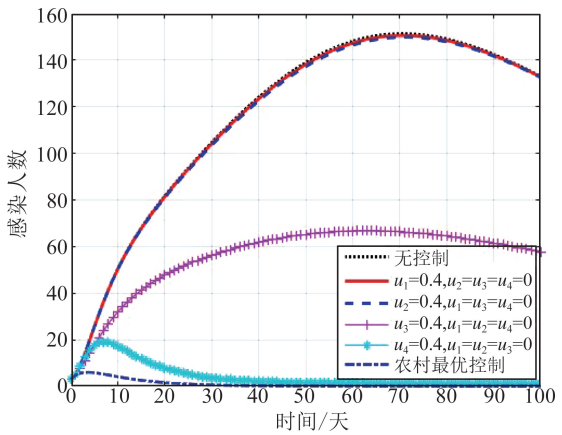



**图 6　不同单一控制措施下农村感染人数比较**

**Fig. 6　Comparison of rural infection numbers under different individual control strategies**

综上，最优控制策略在降低峰值、提前达峰时间以及缩减感染规模等方面均表现出最好的控制效果。单一控制策略虽然也可以减缓基孔肯雅热疫情的传播，但其整体抑制疫情传播的能力比较有限，特别是人群防护措施难以有效抑制传播。相比之下，联合控制策略通过同一时间的干预人群与蚊媒两个关键环节，可以大大提升疫情防控效率，其中以蚊媒消杀为主的防控措施效果更为突出。

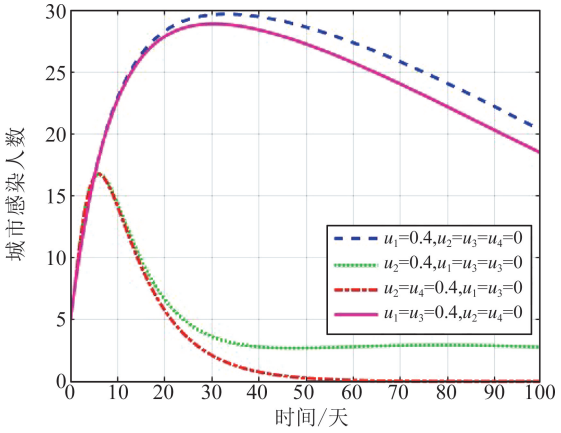



**图 7 不同人群防护/蚊媒消杀组合策略对城市感染人数的影响对比**

**Fig. 7 Comparison of the impacts of combined strategies for population protection/mosquito elimination on the number of urban infections**

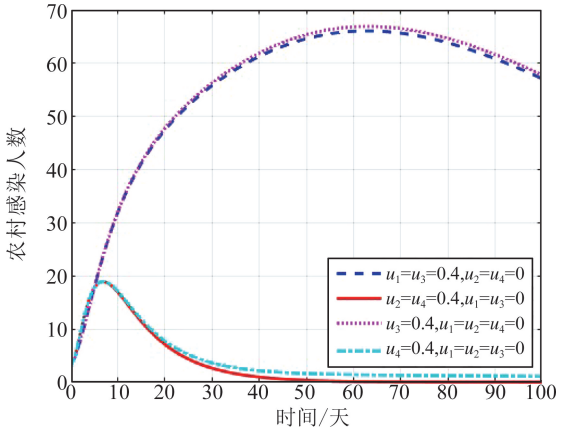



**图 8 不同人群防护/蚊媒消杀组合策略对农村感染人数的影响对比**

**Fig. 8 Comparison of the impacts of combined strategies for population protection/mosquito elimination on the number of rural infections**

## 4 结论与展望

本文构建了城乡差异化视角的基孔肯雅热传播动力学模型并提出相应的最优控制问题,系统分析了不同防控策略对疫情的控制效果。研究表明,蚊媒消杀措施在抑制传播中起关键作用,联合控制策略优于单一控制策略,最优控制策略可显著降低感染峰值并加快疫情消退。并且,城乡疫情具有明显的局部性特征。因此,实际防控中应根据城乡差异分区施策,在疫情早期实施以灭蚊为核心的联合干预,农村需适当延长高强度防控时间,以实现更高效的疫情控制。需要指出的是,尽管本模型参数未针对现实疫情数据进行拟合,但各项取值均依据流行病学文献与疾病生物学特征设定,高度契合城乡环境的客观差异。这种合理的参数界定,充分保障了模型的科学性与防控策略的现实指导意义。未来需结合广东省等地的真实数据对模型参数进行校准,进一步提升模型的实践应用价值。

## 参 考 文 献

[1] De Lima Cavalcanti T Y V, Pereira M R, De Paula S O, et al. A review on chikungunya virus epidemiology, pathogenesis and current vaccine development[J]. Viruses, 2022, 14(5):969.

[2] Fahimi M, Nouri K, Torkzadeh L. Transmission dynamics of a stochastic model of Chikungunya virus: a case study of Brazil[J]. International Journal of Dynamics and Control, 2025, 13(1): 112.

[3] Haque M A, Chakraborty A K, Islam M A. Mathematical modeling and analysis of the dynamics of Chikungunya in Bangladesh[J]. Matematika, 2021, 37(2): 91-108.

[4] Agusto F B, Easley S, Freeman K, et al. Mathematical model of three age-structured transmission dynamics of Chikungunya virus[J]. Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2016: 4320514.

[5] Ndeffo-Mbah M L, Durham D P, Skrip L A, et al. Evaluating the effectiveness of localized control strategies to curtail Chikungunya[J]. Scientific Reports, 2016, 6: 23997.

[6] Helikumi M, Eustace G, Mushayabasa S. Dynamics of a fractional-order Chikungunya model with asymptomatic infectious class[J]. Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2022: 5118382.

[7] Fischer M, Staples J E. Notes from the field: Chikungunya virus spreads in the Americas-Caribbean and South America, 2013-2014[J]. Morbidity and Mortality Weekly Report, 2014, 63(22): 500-501.

[8] Stoddard S T, Morrison A C, Vazquez-Prokopec G M, et al. The role of human movement in the transmission of vector-borne pathogens [J]. PLoS Neglected Tropical Diseases, 2009, 3(7): e481.

[9] Henry O, Takyi A S, Ebenezer A L. A mathematical model of the transmission dynamics of Chikungunya fever[J]. International Journal of Scientific and Research Publications, 2020, 10(2): 748-759.

[10] Naresh Kumar C V M, Sai Gopal D V R. Reemergence of Chikungunya virus in Indian subcontinent[J]. Indian Journal of Virology, 2010,21:8-17.

(下转第 895 页)

[6] Zang X R, Zhao H B, Li J W, et al. Heterogeneous network SLIPS coating with soft-hard chain integration design for marine antifouling engineering[J]. Advanced Materials, 2026, 38(16): e22578.
[7] 许慧凌，林明华，王华，等. 功能性超疏水防冰涂层的研究进展[J]. 涂料工业，2025，55(12)：82-86.
[8] 卢林宇，袁文鹏，张越，等. 超疏水涂层耐久性研究进展[J]. 复合材料学报，2026，43(2)：637-654.
[9] Sedai B R, Khatiwada B K, Mortazavian H, et al. Development of superhydrophobicity in fluorosilane-treated diatomaceous earth polymer coatings[J]. Applied Surface Science, 2016, 386: 178-186.
[10] Zhang Q Q, Zhang S Y, Liu R, et al. Near-infrared light-responsive lubricating coating with polyaniline microspheres for long-term anti-icing and high-efficiency de-icing[J]. Small, 2025, 21(39): e07428.
[11] Ou S N, Zhang J Q, Gu L J, et al. Click chemistry of PMHS for fabrication of robust, transparent and hydrophobic silicone resin coating on wood substrate at room temperature[J]. Progress in Organic Coatings, 2024, 186: 107976.
[12] Chen Y, Liu R, Luo J. Enhancing weathering resistance of UV-curable coatings by using $TiO_2$ particles as filler[J]. Progress in Organic Coatings, 2022, 169: 106936.
[13] Zhang Z J, Liu R, Luo J. Silicone modified cardol based UV-curable coating with antifouling and anticorrosion performance[J]. Progress in Organic Coatings, 2025, 204: 109266.
[14] Cai Z, Guo H Z, Sun W S, et al. Recent advances in UV-curable resins for flexible electronic devices-formulations, properties, and applications[J]. Polymer Engineering & Science, 2026, 66(5): 3069-3099.
[15] Kuai S W, Tang J, Zhou L P, et al. Durable anti-icing coating with stability based on self-regulating oil storage layer[J]. Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 2024, 685: 133028.
[16] Veronesi F, Boveri G, Mora J, et al. Icephobic properties of anti-wetting coatings for aeronautical applications[J]. Surface and Coatings Technology, 2021, 421: 127363.

（责任编辑：陈梦圆）

（上接第 884 页）

[11] Naowarat, Tawarat W, Tang M I. Control of the transmission of chikungunya fever epidemic through the use of adulticide[J]. American Journal of Applied Sciences, 2011, 8(6): 558-565.
[12] Dumont Y, Chiroleu F. Vector control for the chikungunya disease[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2010, 7(2): 313-345.
[13] Moulay D, Aziz-Alaoui M A, Cadivel M. The chikungunya disease: modeling, vector and transmission global dynamics[J]. Mathematical Biosciences, 2011, 229(1): 50-63.
[14] Srichan S, Naowarat S. Effect of Environmental Factors on the Transmission of Chikungunya Fever[J]. Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 2015, 9(13): 19-25.
[15] Pialoux G, GaüzèRe B A, Jauréguiberry S, et al. Chikungunya, an epidemic arbovirosis[J]. The Lancet Infectious Diseases, 2007, 7(5): 319-327.
[16] Manore C A, Hickmann K S, Xu S, et al. Comparing dengue and chikungunya emergence and endemic transmission in A. aegypti and A. albopictus[J]. Journal of Theoretical Biology, 2014, 356: 174-191.
[17] Lahariya C, Pradhan S K. Emergence of chikungunya virus in Indian subcontinent after 32 years: a review[J]. Journal of Vector Borne Diseases, 2006, 43(4): 151-160.
[18] Sebastian M R, Lodha R, Kabra S K. Chikungunya infection in children[J]. The Indian Journal of Pediatrics, 2009, 76(2): 185-189.
[19] Schwartz O, Albert M L. Biology and pathogenesis of chikungunya virus[J]. Nature Reviews Microbiology, 2010, 8(7): 491-500.
[20] Chitnis N, Hyman J M, Cushing J M. Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2008, 70(5): 1272-1296.
[21] Pontryagin L S. Mathematical Theory of Optimal Processes[M]. London: Routledge, 2018: 1-74.
[22] Pang L Y, Ruan S G, Liu S H, et al. Transmission dynamics and optimal control of measles epidemics[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 256: 131-147.
[23] 陈丽丽，丁春晓. 尼日利亚猴痘疫情不确定 Logistic 增长模型分析[J]. 山东大学学报(理学版)，2025，60(12)：49-54.
[24] 赵锦，刘如春，陈水连，等. 中国基孔肯雅热暴发疫情关键控制措施效果模拟[J]. 中华流行病学杂志，2015，36(11)：1253-1257.
[25] 金秀蕾. 两类蚊媒传染病动力学特性和控制策略的研究[D]. 哈尔滨：哈尔滨工程大学，2023.
[26] 张宛玉. 几类具有年龄结构的蚊媒传染病建模与分析[D]. 信阳：信阳师范大学，2024.
[27] Mallapaty S. Dengue vaccine poised for roll-out but safety concerns linger[J]. Nature, 2022, 611(7936): 434-435.

（责任编辑：刘庆松）

**文章编号** 1672-6634(2026)06-0877-08 **DOI** 10.19728/j.issn1672-6634.2026040008

# 支撑材料

Supporting Information

# 基于城乡差异化视角的基孔肯雅热最优防控策略分析

谢文清,刘新灵,丁春晓

(聊城大学 数学与系统科学学院,山东 聊城 252059)

# Based on the urban-rural differentiation perspective: analysis of optimal prevention and control strategies for Chikungunya fever

XIE Wenqing, LIU Xinling, DING Chunxiao

(School of Mathematics and Systems Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

## 1 相关推导

### 1.1 无病平衡点推导过程

假设模型(1)中疾病未发生传播,即人群与蚊媒中均不存在潜伏者、感染者及康复者。令模型(1)中的染病相关舱室均为零,即

$$E_h^u=I_h^u=R_h^u=0,\ I_v^u=0,E_h^r=I_h^r=R_h^r=0,\ I_v^r=0。$$

在平衡状态下,各状态变量随时间的变化率均为零。将上述无病条件代入模型(1)中,原方程组变为关于易感人群和易感蚊媒稳态值的线性代数方程组

$$\begin{cases}\Lambda_h^u-(\mu_h+m_{ur})S_h^u+m_{ru}S_h^r=0,\\ \Lambda_h^r-(\mu_h+m_{ru})S_h^r+m_{ur}S_h^u=0,\\ \Lambda_v^u-\mu_vS_v^u=0,\\ \Lambda_v^r-\mu_vS_v^r=0。\end{cases}$$

对上述方程组进行求解。对于易感蚊媒变量,得 $S_v^u=\dfrac{\Lambda_v^u}{\mu_v}$, $S_v^r=\dfrac{\Lambda_v^r}{\mu_v}$。对于易感人群变量,联立求解前两个方程,得 $S_h^u=\dfrac{\Lambda_h^u(\mu_h+m_{ru})+\Lambda_h^rm_{ru}}{\mu_h(\mu_h+m_{ur}+m_{ru})}$, $S_h^r=\dfrac{\Lambda_h^r(\mu_h+m_{ur})+\Lambda_h^um_{ur}}{\mu_h(\mu_h+m_{ur}+m_{ru})}$。记 $S_v^{u0}=S_v^u$, $S_v^{r0}=S_v^r$,$S_h^{u0}=S_h^u$,$S_h^{r0}=S_h^r$,综上所述,可得模型(1)的无病平衡点为 $P_0=(S_h^{u0},0,0,0,S_v^{u0},0,S_h^{r0},0,0,0,S_v^{r0},0)$。

### 1.2 基本再生数推导过程

取六个染病变量,定义向量 $\boldsymbol{X}=(E_h^u,\ E_h^r,\ I_h^u,\ I_h^r,\ I_v^u,\ I_v^r)^{\mathrm{T}}$,在无病平衡点 $P_0$ 处构造新感染矩阵 $\boldsymbol{F}$ 与状态转移矩阵 $\boldsymbol{V}$,

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\beta_{hv}^{u}&0\\0&0&0&0&0&\beta_{hv}^{r}\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&\beta_{vh}^{u}\dfrac{S_v^{u0}}{N_h^{u0}}&0&0&0\\0&0&0&\beta_{vh}^{r}\dfrac{S_v^{r0}}{N_h^{r0}}&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\alpha_{h1}&-m_{ru}&0&0&0&0\\-m_{ur}&\alpha_{h2}&0&0&0&0\\-\sigma_h&0&d_{h1}&-m_{ru}&0&0\\0&-\sigma_h&-m_{ur}&d_{h2}&0&0\\0&0&0&0&\mu_v&0\\0&0&0&0&0&\mu_v\end{pmatrix},$$

式中,$\alpha_{h1}=\sigma_h+\mu_h+m_{ur}$,$\alpha_{h2}=\sigma_h+\mu_h+m_{ru}$,$d_{h1}=\gamma_h+\mu_h+m_{ur}$,$d_{h2}=\gamma_h+\mu_h+m_{ru}$。

定义 $\delta=(\sigma_h+\mu_h)(\sigma_h+\mu_h+m_{ur}+m_{ru})$,$\theta=(\gamma_h+\mu_h)(\gamma_h+\mu_h+m_{ur}+m_{ru})$。通过 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}^{-1}$ 得到等价的矩阵 $\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}\\W_{21}&W_{22}\end{pmatrix}$,则(1)的基本再生数为 $R_0=\sqrt{\rho(\boldsymbol{W})}=\sqrt{\dfrac{W_{11}+W_{22}+\sqrt{(W_{11}-W_{22})^2+4W_{12}W_{21}}}{2}}$,式中 $W_{11}=\dfrac{\sigma_h\beta_{hv}^{u}\beta_{vh}^{u}S_v^{u0}}{\mu_v N_h^{u0}\delta\theta}(\alpha_{h2}d_{h2}+m_{ru}m_{ur})$,$W_{22}=\dfrac{\sigma_h\beta_{hv}^{r}\beta_{vh}^{r}S_v^{r0}}{\mu_v N_h^{r0}\delta\theta}(\alpha_{h1}d_{h1}+m_{ur}m_{ru})$,$W_{12}=\dfrac{\sigma_h\beta_{hv}^{r}\beta_{vh}^{u}S_v^{u0}}{\mu_v N_h^{u0}\delta\theta}m_{ru}(\alpha_{h1}+d_{h2})$,$W_{21}=\dfrac{\sigma_h\beta_{hv}^{u}\beta_{vh}^{r}S_v^{r0}}{\mu_v N_h^{r0}\delta\theta}m_{ur}(\alpha_{h2}+d_{h1})$,$N_h^{u0}=\dfrac{\Lambda_h^{u}(\mu_h+m_{ru})+\Lambda_h^{r}m_{ru}}{\mu_h(\mu_h+m_{ur}+m_{ru})}$,$N_h^{r0}=\dfrac{\Lambda_h^{r}(\mu_h+m_{ur})+\Lambda_h^{u}m_{ur}}{\mu_h(\mu_h+m_{ur}+m_{ru})}$。

### 1.3 定理 1 证明过程

将变量按 $(S_h^{u},S_h^{r},R_h^{u},R_h^{r},S_v^{u},S_v^{r},E_h^{u},E_h^{r},I_h^{u},I_h^{r},I_v^{u},I_v^{r})^{T}$ 排序,定义 $s(\boldsymbol{M}_1)=\max\{\mathrm{Re}\lambda:\lambda$ 是 $\boldsymbol{M}_1$ 的特征根$\}$,其中 $\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{V}$ 分别为新感染矩阵和状态转移矩阵,无病平衡点 $P_0$ 处的 Jacobian 矩阵为 $J=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1&*\\0&\boldsymbol{M}_1\end{bmatrix}$,其中 $*$ 表示 $6\times6$ 维非零矩阵,

$$\boldsymbol{J}_1=\begin{bmatrix}-(\mu_h+m_{ur})&m_{ru}&0&0&0&0\\m_{ur}&-(\mu_h+m_{ru})&0&0&0&0\\0&0&-(\mu_h+m_{ur})&m_{ru}&0&0\\0&0&m_{ur}&-(\mu_h+m_{ru})&0&0\\0&0&0&0&-\mu_v&0\\0&0&0&0&0&-\mu_v\end{bmatrix}。$$

因此,矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}|=(\lambda+\mu_v)^2[\lambda^2+(2\mu_h+m_{ur}+m_{ru})\lambda+\mu_h(\mu_h+m_{ur}+m_{ru})]^2|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{M}_1|=0。$$

显然,$-\mu_v$ 为特征方程的两个负实根。对于二次方程部分,因其各项系数均大于零,由 Routh-Hurwitz 判据可知其根均具有负实部。对 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{M}_1|=0$,由下一代矩阵相关定理可知,当 $R_0<1$ 时,$s(\boldsymbol{M}_1)<0$,故特征方程的所有特征值均有负实部。因此,模型(1)的无病平衡点 $P_0$ 局部渐近稳定。当 $R_0>1$ 时,$s(\boldsymbol{M}_1)>0$,这意味着特征方程至少存在一个实部为正的特征值。因此,模型(1)的无病平衡点 $P_0$ 是不稳定的。

### 1.4 定理 2 证明过程

设染病向量 $\boldsymbol{X}=(E_h^{u},E_h^{r},I_h^{u},I_h^{r},I_v^{u},I_v^{r})^{T}$,新感染矩阵 $\boldsymbol{F}$ 非负且状态转移矩阵 $\boldsymbol{V}$ 为非奇异的 $\boldsymbol{M}$-矩阵。由 Perron-Frobenius 定理,存在矩阵 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}^{-1}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}^{-1})=R_0$,构造的严格正左特征向量 $\boldsymbol{c}^{T}=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6)>0$,即满足 $\boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}^{-1}=R_0\boldsymbol{c}^{T}$,则有 $\boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{F}=R_0\boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{V}$。定义 Lyapunov 函数 $V_1=c_1E_h^{u}+c_2E_h^{r}+c_3I_h^{u}+c_4I_h^{r}+c_5I_v^{u}+c_6I_v^{r}$,计算 $V_1$ 沿着模型(1)轨线的全导数得

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=c_1\left[\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}-(\sigma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}})E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}\right]+c_2\left[\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{r}}\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}-(\sigma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ru}})E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}\right]$$
$$+c_3\left[\sigma_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-(\gamma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}})I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}\right]+c_4\left[\sigma_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-(\gamma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ru}})I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}\right]$$
$$+c_5\left[\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{u}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}-\mu_{\mathrm{v}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}\right]+c_6\left[\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{r}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}-\mu_{\mathrm{v}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}\right]。$$

由于在生物学可行域内，易感者比例受到系统最大容量限制，满足 $\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}\leqslant 1$，$\frac{S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}\leqslant 1$，且易感蚊媒密度 $\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}\leqslant\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u0}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u0}}}$，$\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}\leqslant\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r0}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r0}}}$。代入基础流失率参数 $\alpha_{\mathrm{h1}}$，$\alpha_{\mathrm{h2}}$，$d_{\mathrm{h1}}$，$d_{\mathrm{h2}}$ 对上式进行放缩

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\leqslant c_1(\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}-\alpha_{\mathrm{h1}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}})+c_2(\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}-\alpha_{\mathrm{h2}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}})+c_3(\sigma_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-d_{\mathrm{h1}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{ru}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}})$$
$$+c_4(\sigma_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-d_{\mathrm{h2}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+m_{\mathrm{ur}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}})+c_5\left(\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{u}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u0}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u0}}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{v}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}\right)+c_6\left(\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{r}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r0}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r0}}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-\mu_{\mathrm{v}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}\right)$$
$$=\left(c_1\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}+c_2\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{r}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}+c_5\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{u}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u0}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u0}}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+c_6\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{r}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r0}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r0}}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}\right)-\left[c_1(\alpha_{\mathrm{h1}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-m_{\mathrm{ru}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}})+c_2(\alpha_{\mathrm{h2}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-m_{\mathrm{ur}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}})+\right.$$
$$\left.c_3(d_{\mathrm{h1}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-\sigma_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}-m_{\mathrm{ru}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}})+c_4(d_{\mathrm{h2}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-\sigma_{\mathrm{h}}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}-m_{\mathrm{ur}}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}})+c_5\mu_{\mathrm{v}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}+c_6\mu_{\mathrm{v}}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}\right]$$
$$=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}$$
$$=R_0\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}$$
$$=(R_0-1)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}，$$

式中令 $\Delta(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}$。由于组合系数 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}>0$ 且矩阵 $\boldsymbol{V}$ 为非奇异的 $\boldsymbol{M}$-矩阵，$\Delta(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 恒成立。当 $R_0<1$ 时，对于所有的 $\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 且 $\boldsymbol{x}\neq 0$，均严格有 $\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$。

$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=0$ 成立的充要条件是 $x=0$，即 $E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}=E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}=I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}=I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}=I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}=I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}=0$。此时，系统其余非染病变量也将自然趋于无病稳态。由 LaSalle 不变集原理可知，当 $R_0<1$ 时，模型(1)的无病平衡点 $P_0$ 全局渐近稳定。

### 1.5　定理 3 证明过程

设状态向量 $\boldsymbol{x}(t)=(S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}, E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}, I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}, R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}, S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}, I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}, S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}, E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}, I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}, R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}, S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}, I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}})$，引入对应伴随变量 $\lambda_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,12)$，哈密顿函数定义为 $H=A_1I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}+A_2I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}+\sum_{i=1}^{4}B_iu_i^2(t)+\sum_{i=1}^{12}\lambda_i\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$，结合约束条件(3)，令

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\left(\frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}R_{\mathrm{h}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{T}}。$$

伴随变量满足 $\dot{\lambda}_i(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_i}$，$i=1, 2, \cdots, 12$，即

(1) 城市人群伴随方程

$$\dot{\lambda}_1=\lambda_1\left(\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}(1-u_1)\frac{I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}}\right)-\lambda_2\beta_{\mathrm{hv}}^{\mathrm{u}}(1-u_1)\frac{I_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}-\lambda_6\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{u}}\frac{I_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}},$$

$$\dot{\lambda}_2=(\sigma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}})\lambda_2-\sigma_{\mathrm{h}}\lambda_3,$$

$$\dot{\lambda}_3=-A_1+(\gamma_{\mathrm{h}}+\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}})\lambda_3-\gamma_{\mathrm{h}}\lambda_4-\beta_{\mathrm{vh}}^{\mathrm{u}}\frac{S_{\mathrm{v}}^{\mathrm{u}}}{N_{\mathrm{h}}^{\mathrm{u}}}(\lambda_5-\lambda_6),$$

$$\dot{\lambda}_4=(\mu_{\mathrm{h}}+m_{\mathrm{ur}})\lambda_4。$$

(2) 城市蚊媒伴随方程

$$\dot{\lambda}_5=(\mu_v+u_2)\lambda_5-\beta_{vh}^{u}\frac{I_h^u}{N_h^u}(\lambda_6-\lambda_5),$$

$$\dot{\lambda}_6=(\mu_v+u_2)\lambda_6-\beta_{hv}^{u}(1-u_1)\frac{S_h^u}{N_h^u}(\lambda_1-\lambda_2)。$$

(3) 农村人群伴随方程

$$\dot{\lambda}_7=\lambda_7\left(\beta_{hv}^{r}(1-u_3)\frac{I_v^r}{N_h^r}+\mu_h+m_{ru}\right)-\lambda_8\beta_{hv}^{r}(1-u_3)\frac{I_v^r}{N_h^r}-\lambda_{12}\beta_{vh}^{r}\frac{I_h^r}{N_h^r},$$

$$\dot{\lambda}_8=(\sigma_h+\mu_h+m_{ru})\lambda_8-\sigma_h\lambda_9,$$

$$\dot{\lambda}_9=-A_2+(\gamma_h+\mu_h+m_{ru})\lambda_9-\gamma_h\lambda_{10}-\beta_{vh}^{r}\frac{S_v^r}{N_h^r}(\lambda_{11}-\lambda_{12}),$$

$$\dot{\lambda}_{10}=(\mu_h+m_{ru})\lambda_{10}。$$

(4) 农村蚊媒伴随方程

$$\dot{\lambda}_{11}=(\mu_v+u_4)\lambda_{11}-\beta_{vh}^{r}\frac{I_h^r}{N_h^r}(\lambda_{12}-\lambda_{11}),$$

$$\dot{\lambda}_{12}=(\mu_v+u_4)\lambda_{12}-\beta_{hv}^{r}(1-u_3)\frac{S_h^r}{N_h^r}(\lambda_7-\lambda_8)。$$

考虑边界条件$\lambda_i(T)=0$,应用 Pontryagin 极大值原理[21],在控制约束集$U$内求解方程$\frac{\partial H}{\partial u_i}=0$, $i=1$, 2, 3, 4, 得到最优解(4)。

## 2 相关表格

**表 1 城乡差异化视角下的基孔肯雅热传播动力学模型的参数值**

**Tab. 1 Parameter values of the Chikungunya transmission dynamics model from the perspective of urban-rural differences**

| 参数 | 生物意义 | 取值 | 参考文献 |
|---|---|---|---|
| $\Lambda_h^u$ | 城市人群在剥离城乡迁移项后的有效补充率 | 0.021 | [11] |
| $\Lambda_h^r$ | 农村人群在剥离城乡迁移项后的有效补充率 | 0.022 | [11] |
| $\Lambda_v^u$ | 城市地区蚊媒种群的招募率 | 0.024 | [12] |
| $\Lambda_v^r$ | 农村地区蚊媒种群的招募率 | 0.026 | [12] |
| $\beta_{hv}^u$ | 城市地区感染蚊媒向易感人群传播疾病的有效接触率 | 0.27 | [13] |
| $\beta_{hv}^r$ | 农村地区感染蚊媒向易感人群传播疾病的有效传播率 | 0.31 | [13] |
| $\beta_{vh}^u$ | 城市地区感染人群向易感蚊媒传播疾病的有效传播率 | 0.057 | [14] |
| $\beta_{vh}^r$ | 农村地区感染人群向易感蚊媒传播疾病的有效传播率 | 0.059 | [14] |
| $\sigma_h$ | 人群的潜伏期转化率 | 1/3 | [5,15,16,17,18,19] |
| $\gamma_h$ | 人群康复率 | 0.095 | [13,16,18,19] |
| $\mu_h$ | 人群的自然死亡率 | $3.9\times10^{-5}$ | [16,20] |
| $\mu_v$ | 蚊媒的自然死亡率 | 0.015 | [11] |
| $m_{ur}$ | 人群由城市向农村迁移的迁移率 | 0.001 5 | 假设 |
| $m_{ru}$ | 人群由农村向城市迁移的迁移率 | 0.002 | 假设 |

(责任编辑:刘庆松)