

文章编号 1672-6634(2024)04-0033-10

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2023110009

基于预定义时间收敛的容噪零化神经网络 求解时变 Sylvester 方程

岳远达¹, 宓玲¹, 陈川^{2,3}

(1. 齐鲁工业大学(山东省科学院)数学与人工智能学部, 山东 济南 250353; 2. 齐鲁工业大学(山东省科学院),
山东省计算中心(国家超级计算济南中心), 算力互联网与信息安全教育部重点实验室, 山东 济南 250353;
3. 山东省计算机网络重点实验室, 山东省基础科学研究中心(计算机科学), 山东 济南 250014)

摘要 Sylvester 方程在数学和控制理论中经常使用, 而零化神经网络(ZNN)在求解此类时变方程方面非常有效。对 ZNN 的收敛性能进行了研究, 基于一个预定义时间稳定性定理设计了一个新的激活函数, 进而得到了一个用于求解时变 Sylvester 方程的新的 ZNN 模型。该模型被称为预定义时间收敛零化神经网络(PTZNN)模型。与之前的 ZNN 模型相比, 所提出的模型提高了收敛速度使其达到了预定义时间收敛并进一步提高了容噪声能力。最后通过仿真模拟验证了该模型在求解时变 Sylvester 方程方面优于其他已知模型。

关键词 零化神经网络; 容噪声能力; 预定义时间收敛; Sylvester 方程

中图分类号 TP183

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Predefined-Time Convergence-Based Noise-Tolerant Zeroing Neural Networks for Solving the Time-Varying Sylvester Equation

YUE Yuanda¹, MI Ling¹, CHEN Chuan^{2,3}

(1. Faculty of Mathematics and Artificial Intelligence, Qilu University of Technology (Shandong Academy of Sciences),
Jinan 250353, China; 2. Key Laboratory of Computing Internet and Information Security of Ministry of Education,
Shandong Computing Center (National Supercomputing Center in Jinan), Qilu University of Technology
(Shandong Academy of Sciences), Jinan 250353, China; 3. Shandong Key Laboratory of Computer
Network, Shandong Basic Science Research Center (Computer Science), Jinan 250014, China)

Abstract Sylvester equations are often used in mathematics and control theory, and zeroing neural networks (ZNN) are very effective at solving such time-varying equations. The convergence of ZNN is studied, and a new activation function is designed based on a predefined time stability theorem, and a new ZNN model for solving time-varying Sylvester equations is obtained. This model is called a predefined

收稿日期: 2023-11-16

基金项目: 国家重点研发计划课题(2023YFB3107303); 山东省自然科学基金项目(ZR2021MF090); 山东省科技型中小企业创新能力提升工程项目(2023TSGC0197)资助

通信作者: 宓玲, 女, 汉族, 博士, 教授, 研究方向: 微分方程与动力系统、复杂网络, E-mail: mi-ling@163.com。

Time Convergent zeroized neural network (PTZNN) model. Compared with the previous ZNN model, the proposed model improves the convergence speed to reach the predefined time convergence and further improves the noise tolerance. Then the simulation results show that the model is better than the known model in solving the time-varying Sylvester equation.

Key words zeroing neural network; noise-tolerant capacity; predefined-time convergence; Sylvester equation

0 引言

Sylvester 方程经常出现在数学和控制理论中,并应用于解决各种重要问题,如特征值分配^[1]和图像处理^[2]。因此,求解 Sylvester 方程是一个至关重要的问题。前人提出了许多优秀的算法,其中最典型的是传统的数值算法^[3-7]。然而,这些数值算法的最小时间复杂度非常高,导致了数值算法的时间消耗太大,严重影响了其使用范围。

近些年来,神经网络发展迅速,在许多控制领域得到了大量研究及应用^[8-10]。由于神经网络的并行分布特性和硬件可实现性的特点,研究人员采用了梯度神经网络(GNN)来对时不变 Sylvester 方程进行求解。GNN 在求解时不变 Sylvester 方程时取得了不错的效果^[11,12],例如,在文献[12]中,为求解时变 Sylvester 方程制定了一个新的激活函数,其中修改的 GNN 可以为所有可解的 Sylvester 方程提供快速收敛和极其精确的解。不幸的是,与数值算法一样,GNN 也仅能求解时不变问题,它在求解时变问题时存在较大的延迟误差,导致无法精确收敛到其解。在这样的背景下,Zhang 等人提出了一种新的 RNN 模型^[13]。因为误差逐渐趋向于零,所以称这个模型为零化神经网络(ZNN)模型。随着研究的深入,ZNN 模型被用来解决各种时变问题^[14-17]。但是普通的 ZNN 模型还有一些缺陷,因为它的收敛速度太慢了,需要无限长时间才能收敛到理论解。然后研究人员发现激活函数(AF)的选择对 ZNN 模型的收敛速度有显著影响,通过尝试各种激活函数,首先是达到了有限时间收敛^[18,19]。然而有限时间收敛与模型的初始状态密切相关^[20-22]。收敛时间随着初始状态值范数的增大而增大,而现实模型的初始条件往往无法确定,从而导致了模型适用性下降。值得指出的是,噪声干扰在现实生活中无处不在,不可避免。当加入噪声干扰时,普通的 ZNN 模型可能无法收敛到问题的精确解。因此,研究 ZNN 模型对外部噪声干扰的鲁棒性很有必要。事实上,已经有许多学者对 ZNN 模型的鲁棒性问题进行了深入的研究^[23,24],但他们得到的 ZNN 模型收敛速度仅达到有限时间收敛。针对上述两个问题,Xiao 等人设计了一种新的激活函数(表 1 中的 VAF)来激活 ZNN 模型^[25],这个模型不仅使收敛速度达到了固定时间收敛,而且还能容忍一定的噪声。对于固定时间收敛,虽然收敛时间与模型的初始值无关,但是收敛时间由稳定时间函数的上界限定,并不是任意时间,并且很难根据模型参数调整。尽管后来研究人员通过一系列的研究大大提高了固定时间收敛速度^[26-28],但依然没有达到任意时间。幸运的是,预定义时间收敛可以做到任意时间收敛^[29-31],与模型的初始值无关,并且预定义时间可以设置为模型参数。

本文根据一个预定义时间稳定性定理,设计了一个新的激活函数从而得到了一个新的 ZNN 模型,称为预定义时间收敛零化神经网络(PTZNN)模型,并用此模型求解时变 Sylvester 方程,与文献[25]相比,PTZNN 模型实现了预定义的时间收敛从而提高了收敛速度,同时进一步提高了模型的容噪声能力,最后分别从理论和数值模拟验证了 PTZNN 模型的收敛性和鲁棒性。

1 预备工作和 ZNN 模型

考虑下述时变 Sylvester 方程

$$\mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t)\mathbf{H}(t) = -\mathbf{K}(t), \quad (1)$$

式中 $\mathbf{F}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{H}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{K}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示已知的时变系数矩阵, $\mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示待求解的未知矩阵。我们假设 $\mathbf{X}^*(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示方程的理论解。

为了求解方程(1),我们首先定义了一个矩阵值误差函数

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t)\mathbf{H}(t) + \mathbf{K}(t), \quad (2)$$

显然,当 $\mathbf{E}(t)$ 的每个元素都收敛到 0 时,此时对应的 $\mathbf{X}(t)$ 就是方程(1)的解。所以,求解方程(1)可以等价转化为使 $\mathbf{E}(t)$ 收敛到 0。

然后,为了使误差函数 $\mathbf{E}(t)$ 能够收敛到 0,我们使用了 ZNN 设计公式

$$\frac{d\mathbf{E}(t)}{dt} = -\frac{1}{T_c}\Phi(\mathbf{E}(t)), \quad (3)$$

式中 $\Phi(\cdot): \mathbf{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示一个矩阵映射即激活函数数组, $T_c > 0$ 是预定义时间,它表示已知可调参数。

最后,将误差函数(2)代入 ZNN 设计公式(3),从而建立了时变 Sylvester 方程问题的 ZNN 模型

$$\mathbf{F}(t)\dot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{X}}(t)\mathbf{H}(t) = -\dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t)\dot{\mathbf{H}}(t) - \frac{1}{T_c}\Phi(\mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t)\mathbf{H}(t) + \mathbf{K}(t)) - \dot{\mathbf{K}}(t). \quad (4)$$

对于这个 ZNN 模型,无论 $\mathbf{X}(t)$ 从任意初始状态 $\mathbf{X}(0)$ 开始,它最终都会收敛到理论解 $\mathbf{X}^*(t)$ 。

在这一部分中,考虑非线性系统 $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$, 其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个连续函数,并且 $f(0) = 0$ 。

定义1 无论 $\mathbf{x}(t)$ 以任意初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 开始,如果对任意 $T_c > 0$,当 $\forall t \geq T_c$ 时,都有 $\mathbf{x}(t) = 0$,则上述非线性系统达到预定义时间收敛,并且 $T_c > 0$ 即是预定义的时间。

引理1^[32] 如果连续函数 $V(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ 满足:

$$(1) V(\mathbf{x}(t)) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) = 0;$$

$$(2) \|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow +\infty \Rightarrow V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow +\infty;$$

(3) 对于 $\forall \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\forall T_c > 0$, 存在 $\alpha, \beta > 0$, $p = 1 - \frac{1}{2\gamma}$, $q = 1 + \frac{1}{2\gamma}$ 使得 $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -\frac{\pi\gamma}{T_c \sqrt{\alpha\beta}}(\alpha V^p(\mathbf{x}(t)) + \beta V^q(\mathbf{x}(t)))$, 式中 $\gamma > 1$, 则上述非线性系统达到预定义时间收敛,并且 T_c 是预定义时间。

2 PTZNN 模型的预定时间收敛性

由于 ZNN 的收敛速度主要取决于激活函数(AF),首先介绍一些常用的 AF(见表 1)。

表 1 常用 AF 表

Table 1 Common AF Table

S/N	AFs	Formula
1	LAF	$\varphi(x) = x$
2	PAF	$\varphi(x) = x^r$, $r > 3$ and is odd
3	BPAF	$\varphi(x) = (1 - \exp(-\zeta x)) / (1 + \exp(-\zeta x))$, $\zeta > 1$
4	PSAF	$\varphi(x) = \begin{cases} x^r, & x \geq 1 \\ \frac{1 + \exp(-\zeta)}{1 - \exp(-\zeta)} \cdot \frac{1 - \exp(-\zeta x)}{1 + \exp(-\zeta x)}, & x < 1 \end{cases}$, $r > 3$ and is odd, $\zeta > 1$
5	HSAF	$\varphi(x) = (\exp(\zeta x) - \exp(-\zeta x)) / 2$, $\zeta > 1$
6	SBPAF	$\varphi(x) = (x ^\lambda + x ^{1/\lambda}) \operatorname{sgn}(x) / 2$, $0 < \lambda < 1$
7	VAF	$\varphi(x) = (k_1 x ^\lambda + k_2 x ^\omega) \operatorname{sgn}(x) + k_3 x + k_4 \operatorname{sgn}(x)$, $k_1, k_2 > 0, k_3, k_4 \geq 0, 0 < \lambda < 1, \omega > 1$

如表 1 所示的 AF 都曾被用来优化加快 ZNN 的收敛速度,比如 SBPAF 使得 ZNN 模型达到了有限时间收敛,VAF 使得 ZNN 模型达到了固定时间收敛,并能容忍一定的外部噪声。但是固定时间收敛由稳定时间函数的上界限定,并不是任意时间。为了进一步提高收敛速度并加强容噪声能力,在这些 AF 的基础上,我们设计了一个新的 AF,如下所示

$$\varphi(x) = \frac{\pi\mu}{\sqrt{a_1 a_2}} (a_1 |x|^p + a_2 |x|^q) \operatorname{sgn}(x) + a_3 x + a_4 \operatorname{sgn}(x), \quad (5)$$

式中 $a_1, a_2 > 0, a_3, a_4 \geq 0, p = 1 - \frac{1}{2\mu}, q = 1 + \frac{1}{2\mu}, \mu > 1$ 。

接下来,本文将在这个 AF 的基础上提出一个新的 ZNN 模型,然后证明它可以达到预定的时间收敛,并进一步考虑了有噪声干扰的情况。

注意,激活函数(5)是标量值函数,而 ZNN 模型(4)是矩阵值神经模型。所以,需要将激活函数(5)扩展到矩阵值。因此,使用 $\boldsymbol{\psi}(x) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示由 $n \times n$ 个激活函数(5)组成的矩阵值激活函数数组。所以,当使用激活函数数组 $\boldsymbol{\psi}(x)$ 激活 ZNN 模型(4)时,就得到了 PTZNN 模型

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t)\dot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{X}}(t)\mathbf{H}(t) &= -\dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t)\dot{\mathbf{H}}(t) \\ &\quad - \frac{1}{T_c} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t)\mathbf{H}(t) + \mathbf{K}(t)) - \dot{\mathbf{K}}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

定理1 从随机初始矩阵 $\mathbf{X}(0) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 开始,模型(6)在预定时间 T_c 内输出方程(1)的理论解。

证明 首先,模型(6)等价于 $\dot{\mathbf{E}}(t) = -\frac{1}{T_c} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{E}(t))$, 其第 i, j 个子系统为

$$\dot{e}_{i,j}(t) = -\frac{1}{T_c} \varphi(e_{i,j}(t)), i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (7)$$

式中 $e_{i,j}(t)$ 和 $\dot{e}_{i,j}(t)$ 分别是 $\mathbf{E}(t)$ 的第 i, j 个元素和 $\dot{\mathbf{E}}(t)$ 的第 i, j 个元素。

如果证明子系统(7)在预定时间 T_c 内收敛,则模型(6)也在预定时间 T_c 内收敛。为了证明子系统(7)的预定义时间收敛性,首先定义 Lyapunov 函数 $V(t) = | \dot{e}_{i,j}(t) |$, 其导数为 $\dot{V}(t) = \dot{e}_{i,j}(t) \operatorname{sgn}(e_{i,j}(t)) = -\frac{1}{T_c} \varphi(e_{i,j}(t)) \operatorname{sgn}(e_{i,j}(t))$ 。与(5)式结合,可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (a_1 |e_{i,j}(t)|^p + a_2 |e_{i,j}(t)|^q) - \frac{1}{T_c} (a_3 |e_{i,j}(t)| + a_4) \\ &\leq -\frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (a_1 |e_{i,j}(t)|^p + a_2 |e_{i,j}(t)|^q) \\ &= -\frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (a_1 V^p(t) + a_2 V^q(t)). \end{aligned}$$

通过与引理1对比可得,模型(6)可以在预定义时间 T_c 内达到预定义时间收敛。

考虑到现实生活中存在各种噪声干扰,我们可以进一步研究具有噪声干扰的 PTZNN 模型

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t)\dot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{X}}(t)\mathbf{H}(t) &= -\dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t)\dot{\mathbf{H}}(t) - \frac{1}{T_c} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t)\mathbf{H}(t) \\ &\quad + \mathbf{K}(t)) - \dot{\mathbf{K}}(t) - \mathbf{Z}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{Z}(t)$ 表示加性噪声。接下来,我们主要研究两种加性噪声:一种是时变有界消失噪声,另一种是时变有界不消失噪声。

(1) 当 $\mathbf{Z}(t)$ 是时变有界消失噪声时,对 PTZNN 模型(8)研究得到以下结果。

定理2 如果 $\mathbf{Z}(t)$ 是满足 $|z_{i,j}(t)| \leq \delta |e_{i,j}(t)|$ 的时变有界消失噪声,其中 $\delta \in (0, +\infty)$ 。只需要 $\frac{a_3}{T_c} \geq \delta$, 则从随机初始矩阵 $\mathbf{X}(0) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 开始,模型(8)在预定时间 T_c 内输出方程(1)的理论解。

证明 同理可得,模型(8)等价于 $\dot{\mathbf{E}}(t) = -\frac{1}{T_c} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{E}(t)) + \mathbf{Z}(t)$, 其第 i, j 个子系统为

$$\dot{e}_{i,j}(t) = -\frac{1}{T_c} \varphi(e_{i,j}(t)) + z_{i,j}(t), \quad (9)$$

式中 $z_{i,j}(t)$ 是 $\mathbf{Z}(t)$ 的第 i, j 个元素。

如果证明子系统(9)在预定时间 T_c 内收敛,则模型(8)也在预定时间 T_c 内收敛。为了证明子系统(9)的预定义时间收敛性,定义 Lyapunov 函数 $V(t) = |e_{i,j}(t)|^2$, 其导数为 $\dot{V}(t) = 2e_{i,j}(t)\dot{e}_{i,j}(t) = 2e_{i,j}(t)(-\frac{1}{T_c}\varphi(e_{i,j}(t)) + z_{i,j}(t))$ 。与(5)式和 $\frac{a_3}{T_c} \geq \delta$ 结合,可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -2 \frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (a_1 |e_{i,j}(t)|^{p+1} + a_2 |e_{i,j}(t)|^{q+1}) - 2 \frac{1}{T_c} a_4 |e_{i,j}(t)| \\ &\quad + 2(e_{i,j}(t)z_{i,j}(t) - \frac{1}{T_c} a_3 |e_{i,j}(t)|^2) \\ &\leq -2 \frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (a_1 |e_{i,j}(t)|^{p+1} + a_2 |e_{i,j}(t)|^{q+1}) \\ &\quad + 2(\delta |e_{i,j}(t)|^2 - \frac{1}{T_c} a_3 |e_{i,j}(t)|^2) \\ &\leq -2 \frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (a_1 |e_{i,j}(t)|^{p+1} + a_2 |e_{i,j}(t)|^{q+1}) \\ &= -2 \frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (a_1 V^{\frac{p+1}{2}} + a_2 V^{\frac{q+1}{2}}) \\ &= -\frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (2a_1 V^{\frac{p+1}{2}} + 2a_2 V^{\frac{q+1}{2}})。\end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{p+1}{2} = 1 - \frac{1}{2\mu^*}, \frac{q+1}{2} = 1 + \frac{1}{2\mu^*}, \text{易证 } \frac{\pi\mu}{\sqrt{a_1 a_2}} = \frac{\pi\mu^*}{\sqrt{4a_1 a_2}}。$$

通过与引理1对比可得,模型(8)可以在预定义时间 T_c 内达到预定义时间收敛。

(2) 当 $\mathbf{Z}(t)$ 是时变有界不消失噪声时,对 PTZNN 模型(8)研究得到以下结果。

定理3 如果 $\mathbf{Z}(t)$ 是满足 $|z_{i,j}(t)| \leq \delta$ 的时变有界不消失噪声,其中 $\delta \in (0, +\infty)$ 。只需要 $\frac{a_4}{T_c} \geq \delta$,

则从随机初始矩阵 $\mathbf{X}(0) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 开始,模型(8)在预定时间 T_c 内输出方程(1)的理论解。

证明 与定理2相比,只有加性噪声 $\mathbf{Z}(t)$ 不同,同样根据子系统(9),定义 Lyapunov 函数 $V(t) = |e_{i,j}(t)|^2$, 其导数为 $\dot{V}(t) = 2e_{i,j}(t)\dot{e}_{i,j}(t) = 2e_{i,j}(t)(-\frac{1}{T_c}\varphi(e_{i,j}(t)) + z_{i,j}(t))$ 。与(5)式和 $\frac{a_4}{T_c} \geq \delta$ 结合,可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -2 \frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (a_1 |e_{i,j}(t)|^{p+1} + a_2 |e_{i,j}(t)|^{q+1}) - 2 \frac{1}{T_c} a_3 |e_{i,j}(t)|^2 \\ &\quad + 2(e_{i,j}(t)z_{i,j}(t) - \frac{1}{T_c} a_4 |e_{i,j}(t)|^2) \\ &\leq -2 \frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (a_1 |e_{i,j}(t)|^{p+1} + a_2 |e_{i,j}(t)|^{q+1}) + 2(\delta |e_{i,j}(t)|^2 - \frac{1}{T_c} a_4 |e_{i,j}(t)|^2) \\ &\leq -2 \frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (a_1 |e_{i,j}(t)|^{p+1} + a_2 |e_{i,j}(t)|^{q+1}) \\ &= -2 \frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (a_1 V^{\frac{p+1}{2}} + a_2 V^{\frac{q+1}{2}}) \\ &= -\frac{\pi\mu}{T_c \sqrt{a_1 a_2}} (2a_1 V^{\frac{p+1}{2}} + 2a_2 V^{\frac{q+1}{2}})。$$

与定理2同理,通过与引理1对比可得,模型(8)可以在预定义时间 T_c 内达到预定义时间收敛。

3 数值模拟

在本节中,通过数值模拟验证了第三节得证的结果。仿真结果表明,本文建立的模型在求解时变 Sylvester 方程方面优于其他已知模型。

3.1 例 1

令 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, \mu = 2$, 通过简单计算得 $p = 0.75, q = 1.25$ 。方程(1)的系数矩阵为

$$F(t) = \begin{bmatrix} \sin(3t) & \cos(3t) \\ -\cos(3t) & \sin(3t) \end{bmatrix}, H(t) = 0, K(t) = -I。$$

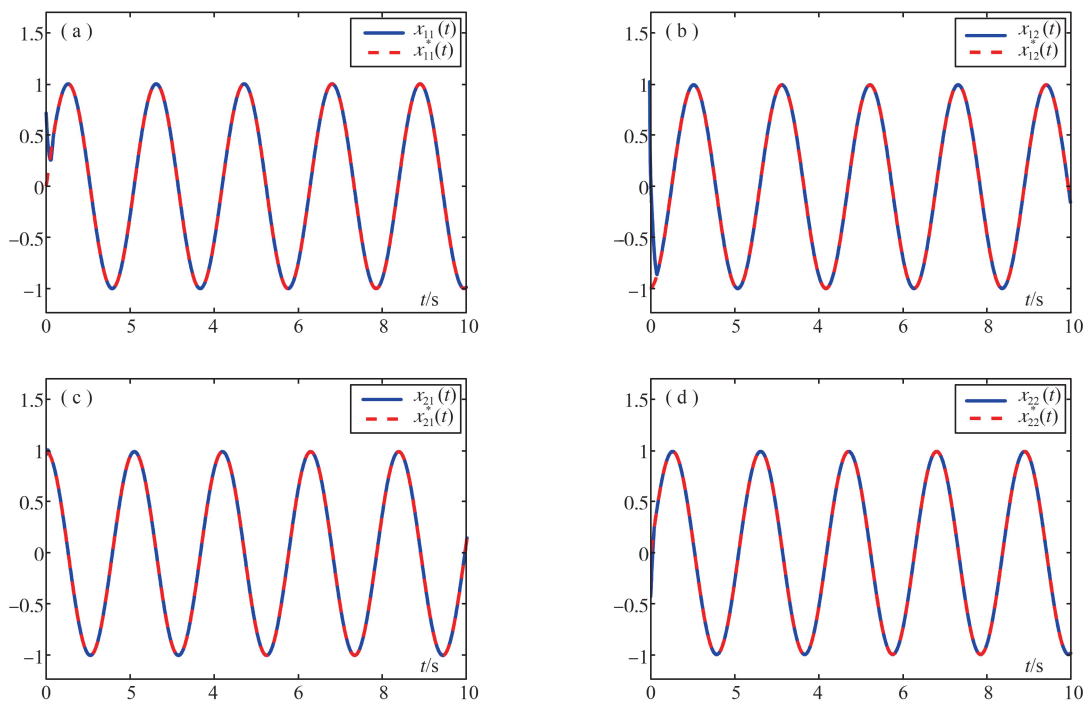


图 1 (a)~(d)表示基于模型(6)的无噪声方程(1)的状态解,其中方程(1)的参数已在例 1 中给出。

Fig. 1 (a)~(d) illustrate the state solution of the noiseless equation (1) based on model (6),

where the parameters of equation (1) have been given in Example 1.

设预定义时间 $T_c = 1$ s, 并求出方程(1)的理论解为

$$X^*(t) = \begin{bmatrix} \sin(3t) & -\cos(3t) \\ \cos(3t) & \sin(3t) \end{bmatrix}。$$

首先,通过使用模型(6)来求解无噪声 Sylvester 方程(1),主要仿真结果如图 1~2 所示,基于模型(6)的时变 Sylvester 方程的状态解如图 1 所示。从图 1 中可以看出,蓝线和红线在短时间内重叠,其中蓝线表示每个子系统从 $X(0)$ 开始的状态解,红线表示每个子系统的精确解 $X^*(t)$ 。

图 2 表示使用模型(6)求解时变 Sylvester 方程时的残差。如图 2 所示,基于模型(6)的残差在约 0.2 秒内收敛为零,这意味着实际收敛时间不超过预定义时间 $T_c = 1$ s。

为了进行比较,分别使用 LAF, PSAF, VAF 激活的 ZNN 模型和 PTZNN 模型(8)同时求解具有不同噪声的方程(1),相应的残差如图 3 所示。图 3 表明,无论噪声类型如何,基于模型(8)的残差收敛速度几乎不受影响,

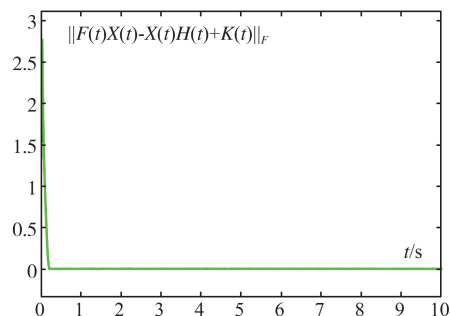


图 2 表示基于模型(6)的无噪声方程(1)的残差,其中方程(1)的参数已在例 1 中给出

Fig. 2 Represents the residual of the noiseless equation (1) based on model (6), where the parameters of equation (1) have been given in Example 1.

都在预定义时间内。而在不同噪声的影响下,LAF,PSAF,VAF 激活的 ZNN 模型的残差均受到显著影响,其中在三种不同噪声下,LAF,PSAF 激活的 ZNN 模型的残差都无法收敛到 0,VAF 激活的 ZNN 模型的残差在前两种噪声下,收敛速度明显减慢。其在噪声 $z_{i,j}(t) = \pi$ 下,残差也是无法收敛到 0。由此可得出结论,与以前的 ZNN 模型相比,模型(8)不仅能达到预定义时间收敛,并且具有更好的容噪声性能。

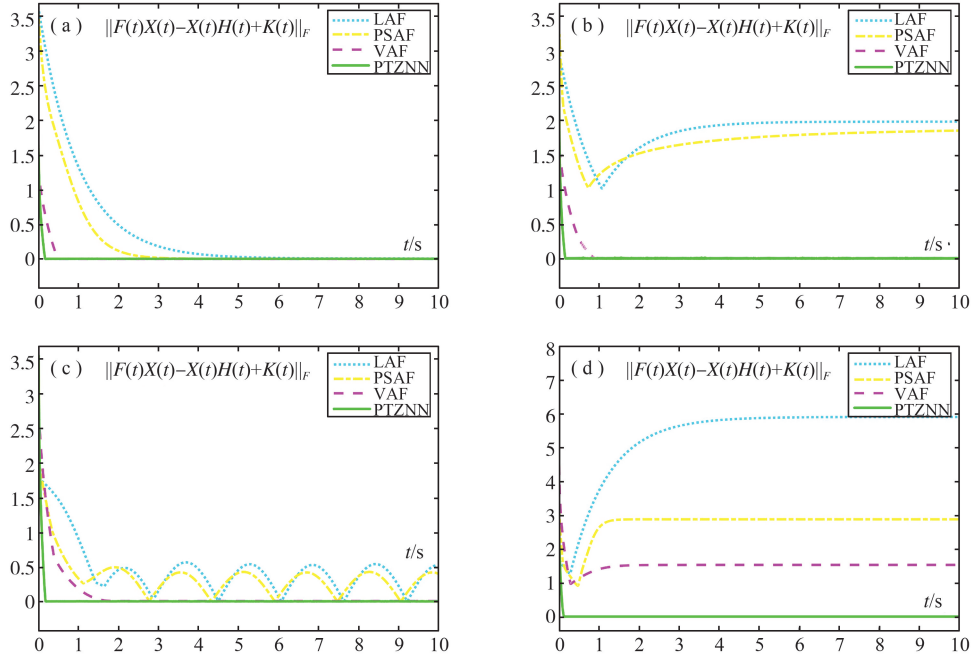


图3 表示在不同噪声情况下,LAF,PSAF,VAF 激活的 ZNN 模型和模型(8)求解方程(1)的残差,其中方程(1)的参数已在例1中给出。(a)表示噪声 $z_{i,j}(t) = 0$, (b)表示噪声 $z_{i,j}(t) = 1$, (c)表示噪声 $z_{i,j}(t) = 0.6\cos(2t)$, (d)表示噪声 $z_{i,j}(t) = \pi$

Fig. 3 Represents the residuals of equation (1) solved by the ZNN model activated by LAF, PSAF, and VAF under different noise conditions and model (8), where the parameters of equation (1) have been given in Example 1. (a) With noise $z_{i,j}(t) = 0$, (b) With noise $z_{i,j}(t) = 1$, (c) With noise $z_{i,j}(t) = 0.6\cos(2t)$, (d) With noise $z_{i,j}(t) = \pi$

3.2 例2

本例考察一个较为复杂的二阶矩阵方程,并设置模型参数与例1不同。令 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.5$, $\mu = 2.5$,通过简单计算得 $p = 0.8$, $q = 1.2$ 。设定预定义时间 $T_c = 1$ s。方程(1)的系数矩阵为

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \sin(2t) & \cos(2t) \\ -\cos(2t) & \sin(2t) \end{bmatrix}, \mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} 0.1\sin(2t) & 0 \\ 0 & 0.2\cos(2t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} 0.1\sin^2(2t) - 1 & -0.2\cos^2(2t) \\ 0.1\sin(2t)\cos(2t) & 0.2\sin(2t)\cos(2t) - 1 \end{bmatrix}.$$

然后分别使用 LAF,PSAF,VAF 激活的 ZNN 模型和 PTZNN 模型(8)同时求解这个二阶矩阵方程,相应的残差如图4所示。

本例使用的是放大后的与例1相同类型的三种噪声,从图4可以看出,PTZNN 模型(8)在放大后的噪声影响下,求解这个二阶矩阵方程时表现依然十分优秀,无论放大后的噪声类型如何,基于 PTZNN 模型(8)的残差收敛速度均未受到影响,并且显然都在预定义时间 $T_c = 1$ s 内。而 LAF,PSAF,VAF 激活的 ZNN 模型与例1相比,在放大后的噪声影响下,残差波动变的更大。值得一提的是,其中 VAF 激活的 ZNN 模型在噪声 $z_{i,j}(t) = 1.5\sin(2t)$ 和 $z_{i,j}(t) = 2$ 影响下,残差都无法收敛到 0,而其在相对较小的同类噪声影响下求解例1,残差虽然收敛速度变慢,但最终收敛到 0,说明其具备一定的容噪声能力,但是有限且不够稳定,而 PTZNN 模型(8)表现十分稳定。

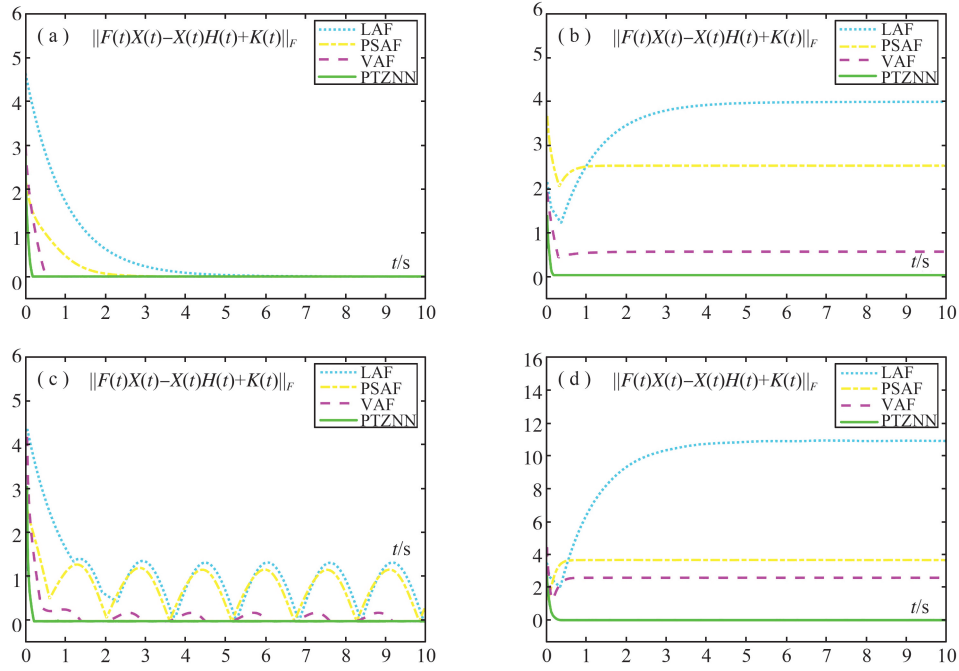


图 4 表示在不同噪声情况下,LAF,PSAF,VAF 激活的 ZNN 模型和模型(8)求解方程(1)的残差,其中方程(1)的参数已在例 2 中给出。(a) 表示噪声 $z_{i,j}(t) = 0$; (b) 表示噪声 $z_{i,j}(t) = 2$; (c) 表示噪声 $z_{i,j}(t) = 1.5\sin(2t)$; (d) 表示噪声 $z_{i,j}(t) = 2\pi$

Fig. 4 Represents the residuals of equation (1) solved by the ZNN model activated by LAF, PSAF, and VAF under different noise conditions and model (8), where the parameters of equation (1) have been given in Example 2. (a) With noise $z_{i,j}(t) = 0$; (b) With noise $z_{i,j}(t) = 2$; (c) With noise $z_{i,j}(t) = 1.5\sin(2t)$; (d) With noise $z_{i,j}(t) = 2\pi$

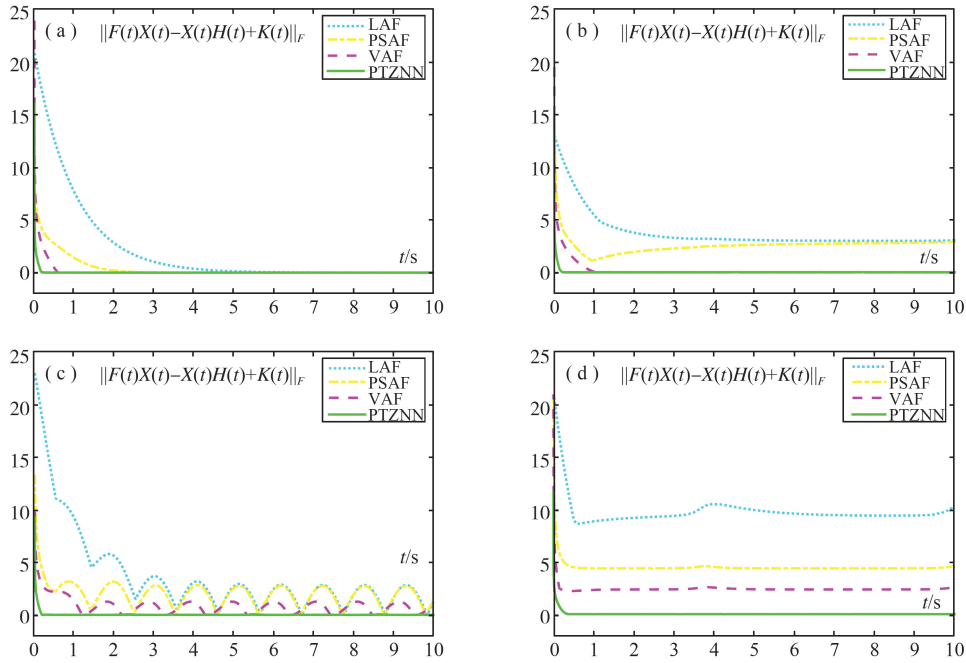


图 5 表示在不同噪声情况下,LAF,PSAF,VAF 激活的 ZNN 模型和模型(8)求解方程(1)的残差,其中方程(1)的参数已在例 3 中给出。(a) 表示噪声 $z_{i,j}(t) = 0$; (b) 表示噪声 $z_{i,j}(t) = 1$; (c) 表示噪声 $z_{i,j}(t) = 6\sin(3t)$; (d) 表示噪声 $z_{i,j}(t) = 2\pi$

Fig. 5 Represents the residuals of equation (1) solved by the ZNN model activated by LAF, PSAF, and VAF under different noise conditions and model (8), where the parameters of equation (1) have been given in Example 3. (a) With noise $z_{i,j}(t) = 0$; (b) With noise $z_{i,j}(t) = 1$; (c) With noise $z_{i,j}(t) = 6\sin(3t)$; (d) With noise $z_{i,j}(t) = 2\pi$

3.3 例3

为了考察模型的适用性,本例考虑一个三阶矩阵方程,并且模型参数设置与例1相同。令方程(1)的系数矩阵为

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 4 + 2\sin(t) & 2\cos(t) & \cos(t) \\ 2\cos(t) & 4 + 2\sin(t) & 2\cos(t) \\ \cos(t) & 2\cos(t) & 4 + 2\sin(t) \end{bmatrix}, \mathbf{H}(t) = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}, \mathbf{K}(t) = -\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}。$$

然后分别使用 LAF,PSAF,VAF 激活的 ZNN 模型和 PTZNN 模型(8)同时求解这个三阶矩阵方程,相应的残差如图5所示。

从图5可以看出,PTZNN 模型(8)在求解三阶矩阵方程时表现依然十分优秀,无论噪声类型如何,基于 PTZNN 模型(8)的残差收敛速度均未受到影响,且显然都在预定义时间 $T_c = 1$ s 内。

4 总结与展望

本文通过设计新的激活函数,提出了一个 PTZNN 模型,并用于求解时变 Sylvester 方程。然后通过公式推导,从理论上分析了它的预定时间收敛性和容噪声性能。最后,通过数值模拟验证了该模型的预定时间收敛性和容噪声性能优于以往的模型。本文主要研究了两种加性噪声,未来可以在保持 ZNN 模型预定义时间收敛下的前提下,继续加强模型的容噪声性能,研究更多类型的噪声。

参 考 文 献

- [1] BRAHMA S, DATTA B. An optimization approach for minimum norm and robust partial quadratic eigenvalue assignment problems for vibrating structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 324(3-5): 471-489.
- [2] CALVETTI D, REICHEL L. Application of ADI iterative methods to the restoration of noisy images[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1996, 17(1): 165-186.
- [3] LIN Y, WEI Y. Condition numbers of the generalized Sylvester equation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(12): 2380-2385.
- [4] ZHOU B, DUAN G R, LI Z Y. Gradient based iterative algorithm for solving coupled matrix equations[J]. Systems & Control Letters, 2009, 58(5): 327-333.
- [5] DING F, CHEN T. Gradient based iterative algorithms for solving a class of matrix equations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(8): 1216-1221.
- [6] SONG C, FENG J, WANG X, et al. Finite iterative method for solving coupled Sylvester-transpose matrix equations[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2014, 46(1-2): 351-372.
- [7] DIAO H, XIAN H, WEI Y. Mixed, componentwise condition numbers and small sample statistical condition estimation of Sylvester equations[J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2012, 19(4): 639-654.
- [8] 王涵, 徐凌伟, 林文忠. 基于 Elman 神经网络的移动通信系统智能预测方法[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2021, 34(3): 12-17.
- [9] LI S, ZHANG Y, JIN L. Kinematic control of redundant manipulators using neural networks[J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2016, 28(10): 2243-2254.
- [10] XIAO L, LIAO B, LI S, et al. Design and analysis of FTZNN applied to the real-time solution of a nonstationary Lyapunov equation and tracking control of a wheeled mobile manipulator[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2017, 14(1): 98-105.
- [11] YI C, CHEN Y, LU Z. Improved gradient-based neural networks for online solution of Lyapunov matrix equation[J]. Information processing letters, 2011, 111(16): 780-786.
- [12] LIU B, FU D, QI Y, et al. Noise-tolerant gradient-oriented neurodynamic model for solving the Sylvester equation[J]. Applied Soft Computing, 2021, 109: 107514.
- [13] ZHANG Y, GE S S. Design and analysis of a general recurrent neural network model for time-varying matrix inversion[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2005, 16(6): 1477-1490.
- [14] ZHANG Y, LI W, GUO D, et al. Different Zhang functions leading to different ZNN models illustrated via time-varying matrix square roots finding[J]. Expert systems with applications, 2013, 40(11): 4393-4403.

- [15] ZHANG Y, YANG Y, CAI B, et al. Zhang neural network and its application to Newton iteration for matrix square root estimation[J]. *Neural Computing and Applications*, 2012, 21: 453-460.
- [16] XIAO L, ZHANG Z, ZHANG Z, et al. Design, verification and robotic application of a novel recurrent neural network for computing dynamic Sylvester equation[J]. *Neural networks*, 2018, 105: 185-196.
- [17] UHLIG F, ZHANG Y. Time-varying matrix eigenanalyses via Zhang neural networks and look-ahead finite difference equations[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2019, 580: 417-435.
- [18] XIAO L, LIAO B, LI S, et al. Nonlinear recurrent neural networks for finite-time solution of general time-varying linear matrix equations[J]. *Neural Networks*, 2018, 98: 102-113.
- [19] LI S, CHEN S, LIU B. Accelerating a recurrent neural network to finite-time convergence for solving time-varying Sylvester equation by using a sign-bi-power activation function[J]. *Neural processing letters*, 2013, 37: 189-205.
- [20] ZENG Y, XIAO L, LI K, et al. Solving time-varying linear inequalities by finite-time convergent zeroing neural networks[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(12): 8137-8155.
- [21] SIMOS T E, KATSIKIS V N, MOURTAS S D, et al. Finite-time convergent zeroing neural network for solving time-varying algebraic Riccati equations[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2022, 359(18): 10867-10883.
- [22] JIN J, ZHU J, ZHAO L, et al. A fixed-time convergent and noise-tolerant zeroing neural network for online solution of time-varying matrix inversion[J]. *Applied Soft Computing*, 2022, 130: 109691.
- [23] JIN L, LI S, XIAO L, et al. Cooperative motion generation in a distributed network of redundant robot manipulators with noises[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 48(10): 1715-1724.
- [24] XIAO L, LI K, DUAN M. Computing time-varying quadratic optimization with finite-time convergence and noise tolerance: a unified framework for zeroing neural network[J]. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 2019, 30(11): 3360-3369.
- [25] XIAO L, ZHANG Y, DAI J, et al. New noise-tolerant ZNN models with predefined-time convergence for time-variant Sylvester equation solving[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, 51(6): 3629-3640.
- [26] CHEN C, LI L, PENG H, et al. A new fixed-time stability theorem and its application to the fixed-time synchronization of neural networks[J]. *Neural networks*, 2020, 123: 412-419.
- [27] CHEN C, LI L, PENG H, et al. A new fixed-time stability theorem and its application to the synchronization control of memristive neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2019, 349: 290-300.
- [28] ZHANG M, ZHENG B. Accelerating noise-tolerant zeroing neural network with fixed-time convergence to solve the time-varying Sylvester equation[J]. *Automatica*, 2022, 135: 109998.
- [29] CHEN C, MI L, LIU Z, et al. Predefined-time synchronization of competitive neural networks[J]. *Neural Networks*, 2021, 142: 492-499.
- [30] LIU A, ZHAO H, WANG Q, et al. A new predefined-time stability theorem and its application in the synchronization of memristive complex-valued BAM neural networks[J]. *Neural Networks*, 2022, 153: 152-163.
- [31] ZHANG Y, YANG Y, TAN N. Time-varying matrix square roots solving via zhang neural network and gradient neural network: modeling, verification and comparison[C]. // *Advances in Neural Networks-ISNN 2009: 6th International Symposium on Neural Networks, ISNN 2009 Wuhan, China, May 26-29, 2009 Proceedings, Part I 6*. Springer Berlin Heidelberg, 2009: 11-20.
- [32] PARSEGOV S, POLYAKOV A, SHCHERBAKOV P. Nonlinear fixed-time control protocol for uniform allocation of agents on a segment[C]. // *2012 IEEE 51st IEEE conference on decision and control (CDC)*, IEEE, 2012: 7732-7737.

(责任编辑:刘庆松)