

引用:宗浩,刘夏夏,张凤霞. 基于连续三角余模方幂的模糊蕴涵[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2025, 38(3): 333-345.

Citation: ZONG Hao, LIU Xiaxia, ZHANG Fengxia. Fuzzy implication based on power of continuous T -conorm[J]. Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition), 2025, 38(3): 333-345.

文章编号 1672-6634(2025)03-0333-13

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2024100008

基于连续三角余模方幂的模糊蕴涵

宗浩, 刘夏夏, 张凤霞

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 近似推理在模糊控制、图像处理和数据挖掘等诸多领域中占有重要的地位, 推理过程中往往要求推理规则的前件和后件加以相同语言修饰词时, 规则的真值保持不变, 这就要求反映推理过程的算子-模糊蕴涵具有幂不变性。 T -幂蕴涵作为满足该性质的一类重要蕴涵, 通过推广 Zadeh 的语言幂修饰词放松后件的方法得到。受此方法启发, 通过推广 Zadeh 的语言幂修饰词放松前件的方法, 提出一类基于连续三角余模方幂的模糊蕴涵, 即 S -幂蕴涵。对 S -幂蕴涵的性质, 刻画以及它与常见模糊蕴涵类关系的研究表明: S -幂蕴涵是一类新的模糊蕴涵, 且其中大多数成员都满足关于连续三角余模的幂不变性。此外, 对 S -幂蕴涵推理机制中的广义假言三段论(GHS)进行的研究, 将进一步为模糊控制、图像处理和数据挖掘等应用研究提供理论基础。

关键词 模糊蕴涵; 连续三角余模方幂; T -幂蕴涵; S -幂蕴涵

中图分类号 O159

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Fuzzy implication based on power of continuous T -conorm

ZONG Hao, LIU Xiaxia, ZHANG Fengxia

(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract Approximate reasoning plays a crucial role in many fields such as fuzzy control, image processing, and data mining. In the reasoning process, it is often required that when the same linguistic modifiers are added to the antecedent and consequent of a reasoning rule, the truth value of the rule remains unchanged. This requires that the operator reflecting the reasoning process, namely, fuzzy implication, has power invariance. T -power based implication, as an important class of fuzzy implications satisfying this property, is obtained by generalizing Zadeh's linguistic powering modifiers to relax the consequent. Inspired by this method, by generalizing Zadeh's linguistic powering modifiers to relax the antecedent, a class of fuzzy implications based on the powers of continuous t -conorms, namely, S -power based implication, is proposed. The research about the properties and characterization of S -power based implication as well as its relationship with common classes of fuzzy implications, shows that S -power based implication is a new class of fuzzy implications, and most of its members satisfy power invariance with respect to contin-

收稿日期: 2024-10-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(12171220); 聊城大学强特色学科建设-智能科学与技术项目(319462208)资助

通信作者: 张凤霞, 女, 汉族, 博士, 教授, 研究方向: 不确定性推理, 非经典数理逻辑和聚合函数, E-mail: fengxiazhang@163.com。

uous t -conorms. In addition, the research on the generalized hypothetical syllogism (GHS) in the reasoning mechanism of S -power implication, will further provide a theoretical basis for the research on applications such as fuzzy control, image processing, and data mining.

Keywords fuzzy implication; powers of continuous t -conorms; T -power based implication; S -power based implication

0 引言

模糊控制是以模糊集合论、模糊语言变量和模糊逻辑推理为基础的一种计算机数字控制技术。模糊控制在新能源汽车^[1]、工业机器人^[2]和 3D 打印^[3]等领域具有广泛应用。而模糊蕴涵作为模糊控制中一类重要的算子,也广泛应用于图像处理^[4-5]、数据挖掘^[6]等领域。在实际应用过程中,在面对不同的应用场景时通常需要采用不同的模糊蕴涵算子,由此提出了许多构造模糊蕴涵算子的方法^[7-15]。

最近,Massanet^[16-17]等人受到 Zadeh 的语言幂修饰词概念的启发,通过放松推理规则的后件,提出了一类新的模糊蕴涵,即 T -幂蕴涵 I^T 。这个模糊蕴涵家族的大多数成员在近似推理中满足一个重要性质:关于连续三角模的幂不变性。尽管模糊数学通常不需要这个性质,但它与近似推理的一个方面密切相关,即当模糊条件的前件和后件都使用相同的量词修饰时,模糊条件的真值保持不变。由于这个特殊性质的存在,学者们一方面致力于将关于连续三角模的幂不变性推广到更一般的模糊蕴涵和二元函数^[18-20]。另一方面,继续研究 T -幂蕴涵其他的代数性质^[21-24]。

基于上述结果,可以提出一个有意义的问题:能否基于连续三角余模方幂去构造新的模糊蕴涵,使其满足关于连续三角余模的幂不变性?

本文将通过运用 Zadeh 的语言幂修饰符放松前件,构造一类新的模糊蕴涵,即 S -幂蕴涵 I^S ,分析其基本性质以及与 T -幂蕴涵族和其它几类常见模糊蕴涵族的关系。值得一提的是,构造的新模糊蕴涵族中的大多数成员满足关于连续三角余模的幂不变性,这也同样能够解释当模糊规则的前件和后件被同一语言修饰语修饰时,模糊规则的真值不变这一性质。此外,研究 S -幂蕴涵的广义假言三段论(GHS 规则),也为该类蕴涵在模糊控制、图像处理和数据挖掘等领域的应用提供理论基础。

1 预备知识

我们假设读者已经熟悉三角模、三角余模,尤其是连续三角余模的基本理论。在本节中,将回顾一些关于模糊蕴涵和连续三角余模方幂的必要概念和结论。对于更多细节,读者可以参考文献[7,25]。

1.1 模糊蕴涵

定义 1^[7] 称二元函数 $I: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是模糊蕴涵,如果 I 关于第一变元递减,关于第二变元递增,且 $I(0,0) = I(1,1) = 1$, $I(1,0) = 0$ 。

所有模糊蕴涵的集合我们记为 F_I 。

定义 2^[7] 设 $I \in F_I$, T 是三角模, N 是模糊否定,称 I 满足:

- (1) 左单位元性质(NP),若对于任意 $y \in [0,1]$,有 $I(1,y) = y$;
- (2) 置换性质(EP),若对于任意 $x, y, z \in [0,1]$,有 $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$;
- (3) 恒同性质(IP),若对于任意 $x \in [0,1]$,有 $I(x,x) = 1$;
- (4) 序性质(OP),若对于任意 $x, y \in [0,1]$,有 $I(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \leq y$;
- (5) 输入法则(LIT),若对于任意 $x, y, z \in [0,1]$,有 $I(T(x,y), z) = I(x, I(y,z))$ 。

定义 3^[7] 设 $I \in F_I$, 对于任意的 $x \in [0,1]$, $N_I(x) = I(x,0)$ 被称为是关于 I 的自然否定。

定义 4^[16] 设 T 是一个连续三角模, $I: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是一个二元函数。如果对于所有的 $x, y \in [0,1]$, 满足 $I(x,y) = \sup\{r \in [0,1] \mid y_T^{(r)} \geq x\}$, 则称 I 是 T -幂蕴涵,记为 I^T 。

命题 1^[16] 设 T 是连续三角模, I^T 是由 T 生成的 T -幂蕴涵(这里规定任意的 $a \in [0, +\infty)$, $\frac{a}{+\infty} = 0$)。

(1) 若 $T = T_M$, 则 $I^{T_M}(x, y) = I_{RS}(x, y) = \begin{cases} 1, x \leq y, \\ 0, x > y. \end{cases}$

(2) 若 T 是有加法生成子 t 的阿基米德三角模, 则 $I^T(x, y) = \begin{cases} 1, x \leq y, \\ \frac{t(x)}{t(y)}, x > y. \end{cases}$

(3) 若 $T = (\langle a_j, b_j, T_j \rangle)_{j \in J}$ 是连续的序和三角模, 其中对于任意 $j \in J$, T_j 是由加法生成子 t_j 生成的连续阿基米德三角模, 则

$$I^T(x, y) = \begin{cases} 1, x \leq y, \\ \frac{t_j(\frac{x-a_j}{b_j-a_j})}{t_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}, x, y \in [a_j, b_j] \text{ 且 } x > y, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

备注1 在文献[16]中, 有一个被广泛使用的结论: 如果 x 是连续三角模 T 的幂等元, 则对于任意的 $r > 0$, 有 $x_T^{(r)} = x$ 。然而, 该文献中, 关于 $x_T^{(\frac{1}{n})}$ 定义为 $x_T^{(\frac{1}{n})} = \sup\{z \in [0, 1] \mid z_T^{(n)} \leq x\}$ 会造成这个结论错误。例如, 若 $T = T_{LK} = \max\{x + y - 1, 0\}$ 且 $n = 2$, 则 $0_T^{(\frac{1}{2})} = \sup\{z \in [0, 1] \mid z_T^{(2)} \leq 0\} = \sup[0, \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} \neq 0$ 。

因此, 为了保证 T -幂蕴涵的相关性质成立, 我们只需要将 $x_T^{(\frac{1}{n})}$ 的定义修改为 $x_T^{(\frac{1}{n})} = \sup\{z \in [0, 1] \mid z_T^{(n)} < x\}$ 。

命题2^[18] 设 $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是一个二元函数。则 I 是由严格阿基米德三角模生成的 T -幂蕴涵当且仅当 I 满足(OP)并且存在 $k \in (0, 1)$ 使得下述性质成立: (1) 对于任意的 $x > y > z > 0$ 且 $z < k$, 有 $I(x, y) \cdot I(y, z) = I(x, z)$; (2) 对于任意的 $z \in (0, k)$, 我们定义 $\varphi_z(x) = I(x, z)$, 它是 $(z, 1]$ 到 $[0, 1]$ 上的一个连续严格递减的一元函数; (3) 对于任意的 $x \in (0, 1]$, $I(x, 0) = 0$; (4) 对于任意的 $y \in [0, 1)$, $I(1, y) = 0$; (5) $I(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} I(x, y)$ 。

备注2 在文献[18]中, k 的取值范围为 $(0, 1]$, 接下来我们将说明 $k \neq 1$ 。在命题2中, k 的作用主要是在证明充分性过程中用于构造加法生成子 t 。具体来说, 文献[18]首先借助 k 构造 $(z, 1]$ 到 $[0, +\infty)$ 的函数 $t_z(k) = \frac{\varphi_z(x)}{\varphi_z(k)}$, 从这里可以看出 $k \neq 1$ 。一方面, 如果 $k = 1$, 则由命题2(1)和(4)可知, $\varphi_z(k) = 0$; 另一方面, 后续的证明中, 文献[18]得到了 $t_z(1) = 0$ 且 $t_z(k) = 1$ 的结论, 如果 $k = 1$, 则 $t_z(k) = t_z(1) = 0 \neq 1$ 。因此应将 k 的范围改为 $(0, 1)$ 。由此得到的 t_z 是一个连续严格递减的函数且 $t_z(1) = 0$ 。然后考虑族 $(t_z)_{0 < z < k}$ 中任意的 $z \leq z'$, 总是会得到对于所有的 $x > z'$, 有 $t_z(x) = t_{z'}(x)$ 。由于 z 的任意性, 当 z 和 z' 趋近于 0 时, 可以得连续严格递减的函数 $t: (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ 。借助命题2(5)可以证明 t 是严格阿基米德三角模 T 的加法生成子, 且 $I = I^T$ 。

1.2 连续三角余模的方幂

在没有具体说明的情况下, 将假设本文中提到的所有三角余模 S 都是连续的。在之前的文章中, 研究人员主要关注于三角模的方幂^[25-26]。然而, 由于三角模和三角余模的对偶性和相似性, 三角余模的方幂可以用类似的方式定义。

定义5^[25] 设 $S: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是一个三角余模, 由于 S 满足结合律, 因此, 可以通过归纳法将 S 扩展成 n 元运算, 即对于任意一个 n 元组 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, 定义

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = S(S(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n)。$$

特别地, 当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ 时, 简记为 $x_S^{(n)} = S(x, x, \dots, x)$ 。对于任意的 $x \in [0, 1]$, 规定

$$x_S^{(0)} = 0 \text{ 且 } x_S^{(1)} = x。$$

定义6^[25] 设 S 是一个连续三角余模且 $n \in \mathbb{N}$, 则 $x_S^{(\frac{1}{n})} = \inf\{z \in [0, 1] \mid z_S^{(n)} > x\}$ 被称为 x 关于连续三角余模 S 的 n 次根。

引理 1^[25] 设 S 是一个连续三角余模, 则对于任意的 $k, m, n \in \mathbf{N}$ 且 $k, n \neq 0$, 有 $x_s^{(\frac{km}{kn})} = x_s^{(\frac{m}{n})} = (x_s^{(\frac{1}{n})})_s^{(m)}$ 。

定义 7^[25] 设 S 是一个连续三角余模且 $r \in \mathbf{R}^+$ 是一个正实数, $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 是一个有理数数列且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$, 对于任意的 $x \in [0, 1]$, $x_s^{(r)}$ 定义为 $x_s^{(r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_s^{(a_n)}$ 。

引理 2 设 S 是一个连续三角余模。如果 x 是 S 的一个幂等元, 则对于任意的 $r > 0$, $x_s^{(r)} = x$ 。

证 假设 x 是 S 的一个幂等元。首先, 证明对于任意的 $n \in \mathbf{N}^+$, $x_s^{(\frac{1}{n})} = x$, 分以下三种情况讨论:

(1) 如果 $S = S_M$, 则任意的 $x \in [0, 1]$ 都是 S 的幂等元且 $x_s^{(n)} = x$ 。因此,

$$x_s^{(\frac{1}{n})} = \inf\{z \in [0, 1] \mid z_s^{(n)} > x\} = \inf\{z \in [0, 1] \mid z > x\} = \inf(x, 1] = x。$$

(2) 如果 S 是一个连续阿基米德三角余模, 则只有 0 和 1 是 S 的幂等元。因此,

$$0_s^{(\frac{1}{n})} = \inf\{z \in [0, 1] \mid z_s^{(n)} > 0\} = \inf(0, 1] = 0,$$

$$1_s^{(\frac{1}{n})} = \inf\{z \in [0, 1] \mid z_s^{(n)} > 1\} = \inf \emptyset = 1。$$

(3) 如果 S 是一个非平凡序和的形式, 即 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$, 其中 S_j ($j \in J$) 为连续阿基米德三角余模, 则我们分为以下两种情况进行讨论:

1) 如果任意的 $j \in J$, $x \notin [a_j, b_j]$, 则 x 是 S 的幂等元。因此,

$$x_s^{(\frac{1}{n})} = \inf\{z \in [0, 1] \mid z_s^{(n)} > x\} = \inf(x, 1] = x。$$

2) 如果存在某个 $j \in J$, 使得 $x \in [a_j, b_j]$, 则只有 a_j 和 b_j 是 S 的幂等元。因此,

$$(a_j)_s^{(\frac{1}{n})} = \inf\{z \in [0, 1] \mid z_s^{(n)} > a_j\} = \inf(a_j, 1] = a_j,$$

$$(b_j)_s^{(\frac{1}{n})} = \inf\{z \in [0, 1] \mid z_s^{(n)} > b_j\} = \inf(b_j, 1] = b_j。$$

综上所述, 如果 x 是 S 的幂等元, 则对于任意的 $n \in \mathbf{N}^+$, $x_s^{(\frac{1}{n})} = x$ 。进一步地, 如果 r 是一个正有理数, 则存在 $m, n \in \mathbf{N}^+$ 使得 $r = \frac{m}{n}$ 。因此, $x_s^{(r)} = x_s^{(\frac{m}{n})} = (x_s^{(\frac{1}{n})})_s^{(m)} = x_s^{(m)} = x$ 。

如果 r 是一个无理数, 则存在一个有理数数列 $\{r_n\} \subset [0, 1]$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$ 。因此, 我们得到

$$x_s^{(r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_s^{(r_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x = x。$$

综上所述, 结论成立。

命题 3^[27] 设 S 是一个具有加法生成子 g 的连续阿基米德三角余模。则对于任意的 $x \in [0, 1]$ 和 $r \geq 0$, 我们有 $x_s^{(r)} = g^{-1}(\min\{rg(x), g(1)\})$ 。

命题 4 设 S 是一个连续三角余模, $r \geq 0$ 是一个固定的实数, 则对于任意的 $x, y \in [0, 1]$ 且 $x \leq y$, 我们有 $x_s^{(r)} \leq y_s^{(r)}$ 。

证 设 $x, y \in [0, 1]$ 且 $x \leq y$, 如果 $r = 0$, 则 $x_s^{(0)} = 0 = y_s^{(0)}$ 。如果 r 是一个正有理数, 则存在 $m, n \in \mathbf{N}^+$ 使得 $r = \frac{m}{n}$ 。设 $z \in [0, 1]$ 且 $z_s^{(n)} > y$, 则 $z_s^{(n)} > x$ 。因此, 我们有

$$\{z \in [0, 1] \mid z_s^{(n)} > y\} \subseteq \{z \in [0, 1] \mid z_s^{(n)} > x\}。$$

进一步地, 我们得到 $x_s^{(\frac{1}{n})} = \inf\{z \in [0, 1] \mid z_s^{(n)} > x\} \leq \inf\{z \in [0, 1] \mid z_s^{(n)} > y\} = y_s^{(\frac{1}{n})}$ 。因此, $x_s^{(r)} = x_s^{(\frac{m}{n})} = (x_s^{(\frac{1}{n})})_s^{(m)} \leq (y_s^{(\frac{1}{n})})_s^{(m)} = y_s^{(\frac{m}{n})} = y_s^{(r)}$ 。

如果 r 是正无理数, 则存在一个有理数数列 $\{r_n\} \subset [0, 1]$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$ 。从定义 7, 可以得到

$$x_s^{(r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_s^{(r_n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_s^{(r_n)} = y_s^{(r)}。$$

命题 5 设 S 是一个连续三角余模且具有非平凡序和的形式, 即 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$ 。则对于任意的

$x \in [a_j, b_j]$ 且 $r > 0$, 有

$$x_s^{(r)} = a_j + (b_j - a_j) \left(\frac{x - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(r)}.$$

证 首先考虑 r 是一个正有理数, 则存在 $m, n \in \mathbf{N}^+$ 使得 $r = \frac{m}{n}$ 。对于 $x \in [a_j, b_j]$ 且 $m \in \mathbf{N}^+$, 有

$$x_s^{(m)} = a_j + (b_j - a_j) \left(\frac{x - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(m)}.$$

对于任意的 $x \in [a_j, b_j]$ 且 $n \in \mathbf{N}^+$, 因为 $a_j = (a_j)_s^{(\frac{1}{n})} \leq x_s^{(\frac{1}{n})} \leq (b_j)_s^{(\frac{1}{n})} = b_j$, 所以, 由定义 6 得到

$$\begin{aligned} x_s^{(\frac{1}{n})} &= \inf\{z \in [0, 1] \mid z_s^{(n)} > x\} = \inf\{z \in [a_j, b_j] \mid z_s^{(n)} > x\} \\ &= \inf\{z \in [a_j, b_j] \mid a_j + (b_j - a_j) \left(\frac{z - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(n)} > x\} = \inf\{z \in [a_j, b_j] \mid \left(\frac{z - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(n)} > \frac{x - a_j}{b_j - a_j}\} \\ &= a_j + (b_j - a_j) \cdot \inf\left\{\frac{z - a_j}{b_j - a_j} \in [0, 1] \mid \left(\frac{z - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(n)} > \frac{x - a_j}{b_j - a_j}\right\} = a_j + (b_j - a_j) \left(\frac{x - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(\frac{1}{n})}. \end{aligned}$$

因此, 当 r 是一个有理数时, 有

$$\begin{aligned} x_s^{(r)} &= x_s^{(\frac{m}{n})} = a_j + (b_j - a_j) \left(\frac{x_s^{(\frac{1}{n})} - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(m)} = a_j + (b_j - a_j) \left(\left(\frac{x - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(\frac{1}{n})} \right)_{s_j}^{(m)} \\ &= a_j + (b_j - a_j) \left(\frac{x - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(\frac{m}{n})} = a_j + (b_j - a_j) \left(\frac{x - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(r)}. \end{aligned}$$

最后, 当 r 为无理数时, 则存在一个有理数数列 $\{a_n\} \subset [0, 1]$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$ 。因此,

$$x_s^{(r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_s^{(a_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_j + (b_j - a_j) \left(\frac{x - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(a_n)} = a_j + (b_j - a_j) \left(\frac{x - a_j}{b_j - a_j} \right)_{s_j}^{(r)}.$$

2 S-幂蕴涵的定义及例子

定义 8 设 S 是一个连续三角余模, $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是一个二元函数。如果对于所有的 $x, y \in [0, 1]$, 满足 $I^S(x, y) = \sup\{r \in [0, 1] \mid x_s^{(r)} \leq y\}$, 则称 I 是 S -幂蕴涵, 记为 I^S 。

备注 3 因为对于任意的三角余模 S 和 $x \in [0, 1]$, $x_s^{(0)} = 0$, 因此集合 $\{r \in [0, 1] \mid x_s^{(r)} \leq y\}$ 不是空集。

命题 6 设 S 是一个连续三角余模, 则 $I^S \in F_I$ 。

证 首先证明关于第一变量递减。设 $x_1, x_2, y \in [0, 1]$ 且 $x_1 \leq x_2$, 则由命题 4, 得

$$\{r \in [0, 1] \mid (x_1)_s^{(r)} \leq y\} \supset \{r \in [0, 1] \mid (x_2)_s^{(r)} \leq y\}.$$

因此, $I^S(x_1, y) = \sup\{r \in [0, 1] \mid (x_1)_s^{(r)} \leq y\} \geq \sup\{r \in [0, 1] \mid (x_2)_s^{(r)} \leq y\} = I^S(x_2, y)$ 。即 I^S 关于第一变量递减。同理可以得到 I^S 关于第二变量递增。此外,

$$I(0, 0) = \sup\{r \in [0, 1] \mid 0_s^{(r)} \leq 0\} = \sup[0, 1] = 1,$$

$$I(1, 1) = \sup\{r \in [0, 1] \mid 1_s^{(r)} \leq 1\} = \sup[0, 1] = 1,$$

$$I(1, 0) = \sup\{r \in [0, 1] \mid 1_s^{(r)} \leq 0\} = \sup\{0\} = 0.$$

综上所述, $I^S \in F_I$ 。

命题 7 设 S 是连续三角余模, I^S 是由 S 生成的 S -幂蕴涵 (这里规定任意的 $a \in [0, +\infty)$, $\frac{a}{+\infty} = 0$)。

(1) 若 $S = S_M$, 则

$$I^{S_M}(x, y) = I_{RS}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ 0, & x > y. \end{cases}$$

(2) 若 S 是有加法生成子 g 的阿基米德三角余模, 则

$$I^S(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ \frac{g(y)}{g(x)}, & x > y. \end{cases}$$

(3) 若 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$ 是连续的序和三角余模, 其中对于任意 $j \in J$, S_j 是由加法生成子 g_j 生成的阿基米德三角余模, 则

$$I^S(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ \frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{x-a_j}{b_j-a_j})}, & x, y \in [a_j, b_j] \text{ 且 } x > y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证 通过定义 8, 可以得到 $I^S(x, y) = 1 \Leftrightarrow \sup\{r \in [0, 1] \mid x_s^{(r)} \leq y\} = 1 \Leftrightarrow x_s^{(1)} = x \leq y$. 因此, 只需考虑 $x > y$ 的情况.

(1) 如果 $S = S_M$ 且 $x > y$, 则对于任意的 $r > 0$, 有 $x_s^{(r)} = x > y$. 因此,

$$I^S(x, y) = \sup\{r \in [0, 1] \mid x_s^{(r)} \leq y\} = \sup\{0\} = 0.$$

(2) 如果 S 是有加法生成子 g 的阿基米德三角余模, 则由命题 3, 可以得到

$$\begin{aligned} I^S(x, y) &= \sup\{r \in [0, 1] \mid x_s^{(r)} \leq y\} = \sup\{r \in [0, 1] \mid g^{-1}(\min\{rg(x), g(1)\}) \leq y\} \\ &= \sup\{r \in [0, 1] \mid g^{-1}(rg(x)) \leq y\} = \sup\{r \in [0, 1] \mid r \leq \frac{g(y)}{g(x)}\} = \frac{g(y)}{g(x)}. \end{aligned}$$

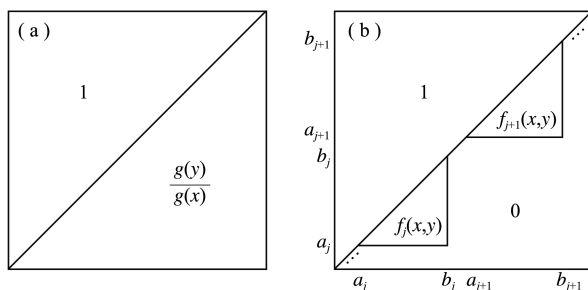
(3) 如果 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$ 是连续的序和三角余模, 则可以分以下两种情况进行讨论:

1) 如果存在某个 S 的幂等元 a , 使得 $x > a > y$, 则由引理 2, 得到对于任意的 $r > 0$, 有 $x_s^{(r)} \geq a_s^{(r)} = a > y$. 因此, $I^S(x, y) = \sup\{r \in [0, 1] \mid x_s^{(r)} \leq y\} = \sup\{0\} = 0$.

2) 如果存在某个 $j \in J$, 使得 $x, y \in [a_j, b_j]$ 且 $x > y$, 则根据命题 5 和 (2), 有

$$\begin{aligned} I^S(x, y) &= \sup\{r \in [0, 1] \mid x_s^{(r)} \leq y\} = \sup\{r \in [0, 1] \mid a_j + (b_j - a_j) \left(\frac{x - a_j}{b_j - a_j}\right)_{S_j}^{(r)} \leq y\} \\ &= \sup\left\{r \in [0, 1] \mid \left(\frac{x - a_j}{b_j - a_j}\right)_{S_j}^{(r)} \leq \frac{y - a_j}{b_j - a_j}\right\} = \frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{x-a_j}{b_j-a_j})}. \end{aligned}$$

以下给出了 S -幂蕴涵在阿基米德和序和情形下的结构图, 其中 $f_j(x, y) = \frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{x-a_j}{b_j-a_j})}$ (见图 1).



注: (a) S 是连续阿基米德三角余模的 S -幂蕴涵; (b) S 是连续序和三角余模时的 S -幂蕴涵.

图 1 连续三角余模时的 S -幂蕴涵

Fig. 1 S -power based implications generated by continuous t-conorms

例 1 以下给出连续阿基米德三角余模 S_P 和 S_{LK} 以及 $S = (\langle 0, 0.5, S_P \rangle, \langle 0.5, 1, S_{LK} \rangle)$ 生成的 S -幂蕴

涵的表达式。

(1) 若 $S = S_P = x + y - xy$, 它的加法生成子为 $g(x) = -\log(1-x)$, 则

$$I^{S_P}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ \frac{\log(1-y)}{\log(1-x)}, & x > y. \end{cases}$$

(2) 若 $S = S_{LK} = \min(x+y, 1)$, 它的加法生成子为 $g(x) = x$, 则

$$I^{S_{LK}}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases} = I_{GG}(x, y)。$$

(3) 若 $S = (\langle 0, \frac{1}{2}, S_{LK} \rangle, \langle \frac{1}{2}, 1, S_P \rangle)$, 则

$$I^S(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ \frac{y}{x}, & x, y \in [0, \frac{1}{2}] \text{ 且 } x > y, \\ \frac{\log(2-2y)}{\log(2-2x)}, & x, y \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ 且 } x > y, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

备注 4 设 S 是连续三角余模, I^S 是由 S 生成的 S -幂蕴涵。

(1) 设 T 是一个具有加法生成子 t 的连续阿基米德三角模, 由于 $g(x) = t(1-x)$ (见文献[25]的 Fig. 3.15), 因此可以使用 t 去表示 S -幂蕴涵。

(2) 很明显, I^S 满足(OP)和(IP)。同时, 该结构与 T -幂蕴涵的结构相似, 但在性质和与其他蕴涵的关系等方面仍存在一些差异, 这将在下一节中进行分析。

3 S-幂蕴涵的性质、与其他模糊蕴涵的关系以及刻画

3.1 S-幂蕴涵的一般性质

命题 8 设 S 是一个连续三角余模且 I^S 是其 S -幂蕴涵, 则下述结论成立:

(1) I^S 满足(OP)和(IP)。

(2) I^S 的自然否定为 Gödel 否定, 即 $N_{I^S}(x) = N_{DI}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

(3) I^S 满足(NP)当且仅当 $S = S_{LK}$, 即 I^S 是 Goguen 蕴涵 $I_{GG}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ \frac{y}{x}, & x > y. \end{cases}$

证 由命题 7 知, (1)和(2)显然成立, 只需证明(3)。

假设 I^S 满足(NP), 则从命题 7 中知, S 是一个具有加法生成子 g 的幂零三角余模, 否则存在 $y \in (0, 1)$ 使得 $I^S(1, y) = 0$ 。为了方便起见, 不妨取 g 为标准加法生成子, 即 $g(1) = 1$ 。因此, 对于任意的 $y \in [0, 1)$, 我们有 $y = I^S(1, y) = \frac{g(y)}{g(1)} = g(y)$ 。根据例 1(2)知, I^S 是 Goguen 蕴涵 I_{GG} 。

反之, 由例 1(2)知, (NP)显然成立。

备注 5 由文献[16]的命题 8 和命题 13 知, T -幂蕴涵不满足(NP), (EP)和(LIT)。然而, 当 $S = S_{LK}$ 时, $I^S = I_{GG}$ 是一个由乘积三角模生成的 R -蕴涵, I_{GG} 满足(NP)和(EP)且 I_{GG} 满足(LIT)当且仅当 T 为乘积三角模(见文献[7]命题 7.3.5)。因此, 有下面关于 S -幂蕴涵(EP)和(LIT)的命题。

命题 9 设 S 是一个连续三角余模且 I^S 是其 S -幂蕴涵。则以下条件成立: (1) I^S 满足(EP)当且仅当 $S = S_{LK}$ 。(2) I^S 满足(LIT)当且仅当 $S = S_{LK}$ 且 $T = T_P$ 。

证 当 $S = S_{LK}$ 时,其 S -幂蕴涵是 I_{GG} 。结合注 5,只需证(1)和(2)的必要性。

(1) 假设 I^S 满足(EP),又因为 I^S 满足(OP),则由文献[7]的引理 1.3.4 可知,当模糊蕴涵满足性质(EP)和(OP)时,一定满足(NP),于是 I^S 满足(NP)。由命题 8(3)知 $S = S_{LK}$ 。

(2) 假设 I^S 满足(LIT),由 T 的交换性可得 I^S 满足(EP)。则由以上的(1)和备注 5 知 $S = S_{LK}$ 且 $T = T_P$ 。

3.2 S -幂蕴涵与其他模糊蕴涵的关系

众所周知,大多数常见的模糊蕴涵类,如 R -蕴涵、 (S, N) -蕴涵、 QL 蕴涵、Yager 蕴涵和 k -蕴涵,都满足(NP), I^S 满足(NP)当且仅当 I^S 是 Goguen 蕴涵 I_{GG} 。因此,根据 I_{GG} 与其他常见模糊蕴涵族的关系,可以得出以下命题。

命题 10 设 S 是一个连续三角余模且 I^S 是其 S -幂蕴涵,则接下来条件成立:

(1) I^S 是 R -蕴涵或 g -蕴涵或 k -蕴涵当且仅当 $I^S = I_{GG}$ 。

(2) I^S 既不是 (S, N) -蕴涵,也不是 QL 蕴涵和 f -蕴涵。

在下文中,将重点讨论 S -幂蕴涵和 T -幂蕴涵之间的关系。它们的交集不是空集,因为 I_{RS} 既是 T -幂蕴涵,也是 S -幂蕴涵。首先,考虑三角余模 S 是连续阿基米德三角余模的情况。

命题 11 设 I^S 是由幂零三角余模 S 生成的 S -幂蕴涵,则 I^S 不是一个 T -幂蕴涵。

证 设 S 是一个具有加法生成子 g 的幂零三角余模, I^S 是其生成的 S -幂蕴涵。任取固定 $x \in (0, 1)$, 则从命题 7(2)中,得到对于任意的 $y \in [0, x]$, $I_x^S(y) = I^S(x, y) = \frac{g(y)}{g(x)}$ 在区间 $[0, x]$ 上严格递增。因此,如果 I^S 是一个 T -幂蕴涵,即对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, $I^S(x, y) = I^T(x, y)$,则由命题 1 知,三角模 T 一定是一个连续阿基米德三角模。假设 t 是三角模 T 的一个加法生成子,则对于任意的 $y \in (0, 1)$, $I^S(1, y) = \frac{g(y)}{g(1)} > 0 = \frac{t(1)}{t(y)} = I^T(1, y)$,矛盾。因此, I^S 不是一个 T -幂蕴涵。

命题 12 设 S 是由加法生成子 g 生成的严格三角余模, I^S 是其 S -幂蕴涵。则存在一个由加法生成子 t 生成的严格三角模 T , 这里 t 对于任意的常数 $k > 0$ 满足 $t = \frac{k}{g}$, 使得 $I^T = I^S$ (规定 $\frac{1}{0} = \infty$ 且 $\frac{1}{\infty} = 0$)。

证 因为 S -幂蕴涵和 T -幂蕴涵都满足(OP),所以我们只需要考虑 $x > y$ 的情况。考虑 S 是一个具有加法生成子 g 的连续三角余模。设 $t = \frac{k}{g}$, 这里 $k > 0$, 则存在一个以 t 为加法生成子的严格三角模 T 。对

于任意的 $x > y$, 我们有 $I^T(x, y) = \frac{t(x)}{t(y)} = \frac{\frac{k}{g(x)}}{\frac{k}{g(y)}} = \frac{g(y)}{g(x)} = I^S(x, y)$ 。

根据命题 7(2)和(3),命题 11 和命题 12,可得如下结论。

命题 13 设 S 是一个非平凡序和形式的三角余模,即 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$, I^S 是其 S -幂蕴涵。如果 I^S 是一个 T -幂蕴涵,则对于任意的 $j \in J$, S_j 是一个严格三角余模。

备注 6 用以下符号表示各类蕴涵:(1) I^S : S -幂蕴涵族;(2) I^T : T -幂蕴涵族;(3) I^{Sp} : 所有由严格三角余模生成的 S -幂蕴涵族;(4) I^{SLK} : 所有由幂零三角余模生成的 S -幂蕴涵族;(5) I^{Tp} : 所有由严格三角余模生成的 T -幂蕴涵族;(6) I^{Scp} : 所有由序和三角余模生成的 S -幂蕴涵族且这里的每个序和加数都是严格三角余模。

总结命题 11~13,可得如下结论:(1) $I^{SLK} \subseteq I^S \setminus I^T$; (2) $I^{Sp} = I^{Tp}$; (3) $I^S \cap I^T = I^{Scp} \cup \{I_{RS}\}$ 。

3.3 S -幂蕴涵的刻画

在本小节中,我们将根据连续三角余模 S 的三种形式分别去刻画其 S -幂蕴涵,即取大三角余模 S_M 、连续阿基米德三角余模和具有非平凡序和形式的连续三角余模。如果 S 为取大三角余模 S_M , 则 $I^S = I_{RS}$, 文献[7]的定理 7.5.5 已经给出了刻画。如果 S 是一个严格三角余模,则 I^S 等价于由严格三角模 T 生成的 T -

幂蕴涵,命题2已经给出了刻画。因此,我们只需要考虑幂零三角余模和非平凡序和三角余模两种情况。

引理3 设 S 是一个连续三角余模, I^S 是其 S -幂蕴涵。则对于任意的 $x > y > z$, 有

$$I^S(x, y) \cdot I^S(y, z) = I^S(x, z)。$$

证 当 $S = S_M$ 时,其结果是显然的。当 S 是具有加法生成子 g 的连续阿基米德三角余模时,对于任意的 $x > y > z$, 我们有

$$I^S(x, y) \cdot I^S(y, z) = \frac{g(y)}{g(x)} \cdot \frac{g(z)}{g(y)} = \frac{g(z)}{g(x)} = I^S(x, z)。$$

最后,当 S 具有非平凡序和形式时,结合前面两种情况,我们可以类似地得到结果。

命题14 设 $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是一个二元函数。则 I 是一个由幂零三角余模 S 生成的 S -幂蕴涵当且仅当接下来条件成立:(1) I 满足(OP);(2) 对于任意的 $x > y$, $I(1, x) \cdot I(x, y) = I(1, y)$; (3) $I(1, \cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是一个连续严格递增的函数且 $I(1, 0) = 0$ 。

证 假设 I 是一个由幂零三角余模 S 生成的 S -幂蕴涵,则(1)~(3)容易由命题7(2)和引理3得到。反之,因为(OP)成立,因此只需考虑 $x > y$ 的情况。定义 $g(x) = I(1, x)$, 则(3)说明 g 是某个幂零三角余模 S 的加法生成子。再由(2),得到对于任意的 $x > y$, $I(x, y) = \frac{I(1, y)}{I(1, x)} = \frac{g(y)}{g(x)}$ 。所以, I 是由某个具有加法生成子 g 的幂零三角余模生成的 S -幂蕴涵。

因为 $I_{GG} = I^{S_{LK}}$, 因此可以得到关于 I_{GG} 的另外一种刻画。

命题15 设 $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是一个二元函数。则 I 是 Goguen 蕴涵 I_{GG} 当且仅当下述条件成立:(1) I 满足(OP)和(NP);(2) 对于任意的 $x > y$, $I(1, x) \cdot I(x, y) = I(1, y)$ 。最后,将刻画三角余模 S 具有非平凡序和时的情况。结合以上的命题14和命题2,易证以下命题成立。

命题16 设 $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是一个二元函数。 S 是一个具有非平凡序和形式的连续三角余模,即 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$ 。则 I 是一个由 S 生成的 S -幂蕴涵当且仅当接下来的条件成立:

(1) I 满足(OP);

(2) 如果存在某个 S 的幂等元 a 使得 $x > a > y$, 则 $I(x, y) = 0$;

(3) 对于所有的 $j \in J$, 下面两种情况之一成立:1) 如果 S_j 是幂零三角余模,则有接下来的性质成立:

① 对于任意的 $x > y$ 且 $x, y \in [a_j, b_j]$, $I(b_j, x) \cdot I(x, y) = I(b_j, y)$; ② $I(b_j, \cdot): [a_j, b_j] \rightarrow [0, 1]$ 是一个连续严格递增的函数且 $I(b_j, a_j) = 0$ 。2) 如果 S_j 是严格三角余模,则存在 $k_j \in (a_j, b_j)$ 使得接下来的性质成立:① 对于任意的 $b_j \geq x > y > z > a_j$ 且 $z < k_j$, 有 $I(x, y) \cdot I(y, z) = I(x, z)$; ② 对于任意的 $z \in (a_j, k_j)$, 我们定义 $\varphi_z(x) = I(x, z)$, 它是 $(z, b_j]$ 到 $[0, 1]$ 上的一个连续严格递增的一元函数; ③ 对于任意的 $x \in (a_j, b_j]$, $I(x, a_j) = 0$; ④ 对于任意的 $y \in [a_j, b_j]$, $I(b_j, y) = 0$; ⑤ 对于任意的 $x \in (a_j, b_j]$, $I(x, a_j) = \lim_{y \rightarrow a_j} I(x, y)$ 。

4 S-幂不变性和 GHS 规则

4.1 S-幂不变性

文献[28]给出了关于任意二元函数 $F: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 的 S -幂不变性的定义,并刻画了满足 S -幂不变性的二元函数以及一般模糊蕴涵。以下将刻画满足 S -幂不变性的 S -幂蕴涵。

定义9^[28] 设 I 是一个模糊蕴涵, S 是一个连续三角余模。如果对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, $r > 0$ 且 $x_s^{(r)}, y_s^{(r)} \neq 0, 1$, 有 $I(x, y) = I(x_s^{(r)}, y_s^{(r)})$ 成立,则称 I 满足 S -幂不变性,简记为(PIS)。

备注7 如果 $S = S_M$, 因为对于任意的 $r > 0$, $x_s^{(r)} = x$, 所以 S_M -幂不变性对于任意的模糊蕴涵 I 都成立,即任意的模糊蕴涵 I 都满足 S_M -幂不变性。

注意到,在例1(3)中,如果取 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$ 且 $r = 2$, 则 $I^S((\frac{1}{2})_s^{(2)}, (\frac{1}{4})_s^{(2)}) = I^S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1 > \frac{1}{2} =$

$I^S(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, S -幂不变性不成立。其根本问题在于当 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$ 时, 存在某个 $b_j \neq 1$ 使得 S_j 是个幂零三角余模。因此, 有下述定义。

定义 10 设 S 是一个具有序和形式的连续三角余模, 即 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$ 。如果对于所有的 $b_j \neq 1, S_j$ 都是严格三角余模, 则称 S 为严格序和三角余模。

备注 8 用 S_{SOS} 来表示所有严格序和三角余模的集合, 则该集合也包括了 S_M (当 J 为空集) 和所有的连续阿基米德三角余模 (当 $J = \{1\}$ 且 $[a_j, b_j] = [0, 1]$) 两种特殊情况。

命题 17 设 S 是一个连续三角余模, I^S 是其 S -幂蕴涵。则 I^S 满足 S -幂不变性当且仅当 $S \in S_{\text{SOS}}$ 。

证 如果 I^S 满足 S -幂不变性, 假设 $S \notin S_{\text{SOS}}$, 即存在某个 $b_j \neq 1$ 使得 S_j 是个幂零三角余模。由于 S_j 是个幂零三角余模, 所以存在某个 $x \in (a_j, b_j)$ 使得 $x_s^{(2)} = b_j$ 。因此,

$$1 > I^S(b_j, x) = I^S((b_j)_s^{(2)}, x_s^{(2)}) = I^S(b_j, b_j) = 1。$$

所以, $S \in S_{\text{SOS}}$ 。

反过来, 设 $S \in S_{\text{SOS}}$, 如果 $x \leq y$, 则 $x_s^{(r)} \leq y_s^{(r)}$, 从而 $I(x, y) = I(x_s^{(r)}, y_s^{(r)}) = 1$ 。因此, 只需要证明 $x > y$ 的情况。进一步地, 由上述备注 7 和 8 可知, 仅需讨论以下两种情况:

(1) 如果 S 是一个具有加法生成子 g 的连续阿基米德三角余模, 任意取 $x > y$ 且 $x_s^{(r)}, y_s^{(r)} \neq 0, 1$ 。则 $x_s^{(r)} = g^{-1}(rg(x)) > g^{-1}(rg(y)) = y_s^{(r)}$ 。因此,

$$I^S(x_s^{(r)}, y_s^{(r)}) = I^S(g^{-1}(rg(x)), g^{-1}(rg(y))) = \frac{rg(x)}{rg(y)} = \frac{g(x)}{g(y)} = I^S(x, y)。$$

(2) 如果 S 是一个具有非平凡序和形式的连续三角余模, 即 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$, 这里对于任意的 $b_j \neq 1, S_j$ 是具有加法生成子 g_j 的严格三角余模。任意取 $x > y$ 且 $x_s^{(r)}, y_s^{(r)} \neq 0, 1$ 。则有以下两种情况:

1) 如果存在某个 S 的幂等元 $a \in (0, 1)$, 使得 $x > a > y$ 。若 $r \geq 1$, 则 $x_s^{(r)} \geq x > a \geq y_s^{(r)}$, 因此 $I^S(x_s^{(r)}, y_s^{(r)}) = I^S(x, y) = 0$ 。若 $r < 1$, 则 $x > x_s^{(r)} \geq a > y \geq y_s^{(r)}$, 因此 $I^S(x_s^{(r)}, y_s^{(r)}) = I^S(x, y) = 0$ 。

2) 如果存在某个 $j \in J$, 使得 $a_j \leq y < x \leq b_j$ 。则由于 $S \in S_{\text{SOS}}$, 所以 $x_s^{(r)} = a_j + (b_j - a_j)g_j^{-1}(rg_j(\frac{x - a_j}{b_j - a_j}))$, $y_s^{(r)} = a_j + (b_j - a_j)g_j^{-1}(rg_j(\frac{y - a_j}{b_j - a_j}))$ 。由此可得:

$$\begin{aligned} I^S(x_s^{(r)}, y_s^{(r)}) &= I^S(a_j + (b_j - a_j)g_j^{-1}(rg_j(\frac{x - a_j}{b_j - a_j})), a_j + (b_j - a_j)g_j^{-1}(rg_j(\frac{y - a_j}{b_j - a_j}))) \\ &= \frac{rg_j(\frac{y - a_j}{b_j - a_j})}{rg_j(\frac{x - a_j}{b_j - a_j})} = \frac{g_j(\frac{y - a_j}{b_j - a_j})}{g_j(\frac{x - a_j}{b_j - a_j})} = I^S(x, y)。 \end{aligned}$$

综上所述, 当 $S \in S_{\text{SOS}}$ 时, S -幂蕴涵 I^S 满足 S -幂不变性。

4.2 S -幂蕴涵的广义假言三段论(GHS 规则)

定义 11 设 S 是一个连续三角余模, T 是一个三角模且 I 是一个模糊蕴涵。如果对于任意的 $x, y \in [0, 1]$ 满足 $\sup_{z \in [0, 1]} T(I(x, z), I(z, y)) = I(x, y)$, 则称 (T, I) 满足广义假言三段论, 简记为(GHS)。

注意到, 如果上面的函数方程被不等式 $T(I(x, z), I(z, y)) \leq I(x, y)$ 代替, 那么就可以得到(HS)性质, 也称为 T -传递性。由于 S -幂蕴涵满足(IP), 则由文献[29]的命题 3.5 知, S -幂蕴涵的(GHS)与(HS)等价。

命题 18 设 I^S 是 S -幂蕴涵, T 是一个三角模。则 (T, I^S) 的(GHS)与(HS)等价。

命题 19 设 T 是一个三角模, $S = S_M$, I^S 是其 S -幂蕴涵。则 (T, I^S) 总是满足(GHS)。

证 如果 $S = S_M$, 则由命题 7(1) 知, $I^S = I_{\text{RS}}$ 。下面分两种情况讨论。如果 $x \leq y$, 则 $T(I^S(x, z), I^S(z, y)) \leq I^S(x, y) = 1$, (GHS)显然成立。如果 $x > y$, 则 $I^S(x, y) = 0$ 。此时, 如果 $x > z$, 则 $T(I^S(x, z), I^S(z, y)) = T(0, I^S(z, y)) = 0$; 如果 $x \leq z$, 则 $z > y$, $T(I^S(x, z), I^S(z, y)) =$

$T(I^S(x, z), 0) = 0$ 。综上, (T, I^S) 总是满足(GHS)。

命题 20 设 T 是一个三角模, S 是一个具有序和形式的连续三角余模, 即 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$, 这里每个 S_j 都是具有加法生成子 g_j 的连续阿基米德三角余模, I^S 是其 S -幂蕴涵。则 (T, I^S) 满足(GHS)当且仅当 $T \leq T_P$ 。

证 首先证必要性。对于任意的 $j \in J$, 取任意的 $x, y, z \in [a_j, b_j]$ 使得 $x > z > y$, 则由命题 7(3) 得到以下不等式成立

$$T\left(\frac{g_j(\frac{z-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{x-a_j}{b_j-a_j})}, \frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{z-a_j}{b_j-a_j})}\right) \leq \frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{x-a_j}{b_j-a_j})} = \frac{g_j(\frac{z-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{x-a_j}{b_j-a_j})} \cdot \frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{z-a_j}{b_j-a_j})} \quad (1)$$

如果 S_j 是一个严格三角余模, 则 $g_j(1) = +\infty$ 。对于式(1), 任意固定 $z = z_0 \in (a_j, b_j)$ 。则由于 g_j 的

连续性, 我们得到, $\frac{g_j(\frac{z_0-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{x-a_j}{b_j-a_j})}$ 和 $\frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{z_0-a_j}{b_j-a_j})}$ 的值域都是 $[0, 1]$ 。所以任意的 $u, v \in [0, 1]$, $T(u, v) \leq$

$uv = T_P(u, v)$ 。

如果 S_j 是一个幂零三角余模, 则我们不妨取 $g_j(1) = 1$ 。令 $x = b_j$ 且任意固定 $z = z_0 \in (a_j, b_j)$, 则

$\frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{z_0-a_j}{b_j-a_j})}$ 的值域是 $[0, 1]$, 所以对任意的 $v \in [0, 1]$, $T(g_j(\frac{z_0-a_j}{b_j-a_j}), v) \leq g_j(\frac{z_0-a_j}{b_j-a_j})v$ 。由 $z_0 \in$

(a_j, b_j) 的任意性, 以及 $g_j(\frac{z-a_j}{b_j-a_j})$ 的值域是 $[0, 1]$, 可得对任意的 $u, v \in [0, 1]$, $T(u, v) \leq uv = T_P(u, v)$ 。

再证充分性。从命题 18 知, S -幂蕴涵的(GHS)和(HS)等价, 因此只需考虑(HS)性质。当 $x \leq y$ 时, (HS)显然成立。以下考虑 $x > y$ 的情形:

(1) 如果对于任意的 $j \in J$, $(x, y) \notin [a_j, b_j]^2$, 则根据 z 的取值范围, 分以下几种情况讨论:

1) 如果 $z \in [0, 1] \setminus \bigcup_{j \in J} [a_j, b_j]$, 则不论 $x > z > y$, $z \geq x > y$ 还是 $x > y \geq z$, 总有 $I^S(x, z) = 0$ 或者 $I^S(z, y) = 0$ 。因此(HS)成立。

2) 如果存在某个 $j \in J$, $z \in [a_j, b_j]$ 。也同样的有 $I^S(x, z) = 0$ 或者 $I^S(z, y) = 0$ 。因此(HS)成立。

(2) 如果对于某个 $j \in J$, $(x, y) \in [a_j, b_j]^2$, 则根据 z 的取值范围, 有如下讨论:

1) 如果 $z \in [0, a_j] \cup (b_j, 1]$, 则有 $T(I^S(x, z), I^S(z, y)) = 0$ 。因此, (HS)成立。

2) 如果 $z \in [a_j, b_j]$ 。进一步地, 分为三种情况。

① 如果 $x > z > y$, 则由于 $T \leq T_P$, 所以,

$$T(I^S(x, z), I^S(z, y)) \leq T_P\left(\frac{g_j(\frac{z-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{x-a_j}{b_j-a_j})}, \frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{z-a_j}{b_j-a_j})}\right) = \frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{x-a_j}{b_j-a_j})} = I^S(x, y)。$$

② 如果 $z \geq x > y$, 则

$$T(I^S(x, z), I^S(z, y)) = \frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{z-a_j}{b_j-a_j})} \leq \frac{g_j(\frac{y-a_j}{b_j-a_j})}{g_j(\frac{x-a_j}{b_j-a_j})} = I^S(x, y)。$$

③ 如果 $x > y \geq z$, 则

$$T(I^S(x, z), I^S(z, y)) = \frac{g_j(\frac{z - a_j}{b_j - a_j})}{g_j(\frac{x - a_j}{b_j - a_j})} \leq \frac{g_j(\frac{y - a_j}{b_j - a_j})}{g_j(\frac{x - a_j}{b_j - a_j})} = I^S(x, y)。$$

综上所述, (T, I^S) 满足(GHS)。

将命题 19 和命题 20 结合起来, 得到如下命题:

命题 21 设 T 是一个三角模, S 是一个连续三角余模且 I^S 是其 S -幂蕴涵。则以下条件等价: (1) (T, I^S) 满足(GHS)。 (2) 以下情形 1) 或 2) 成立: 1) $S = S_M$; 2) S 是一个具有序和形式的连续三角余模, 即 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$ 且 $T \leq T_P$ 。

5 结论

本文通过推广 Zadeh 的语言幂修饰符放松前件的方法, 提出了 S -幂蕴涵, 研究了其结构、基本性质、以及与常见模糊蕴涵族的关系, 并刻画了该类模糊蕴涵; 提出了 S -幂不变性, 并研究了 S -幂蕴涵的 S -幂不变性, 以及推理机制中的一个重要性质-广义假言三段论, 即 GHS 规则。值得一提的是, S -幂蕴涵与 T -幂蕴涵之间存在诸多的交集和差异。一方面, 它们的结构相似, 并且都满足性质(OP)和(IP)。同时, 当 S 是严格三角余模、 S_M 或序和形式 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$ (其中每个 S_j 都是严格的) 时, 它的 S -幂蕴涵就是 T -幂蕴涵。另一方面, S -幂蕴涵族中有很大大一部分成员不是 T -幂蕴涵, 即, 当三角余模 S 为幂零三角余模, 或由序和形式 $S = (\langle a_j, b_j, S_j \rangle)_{j \in J}$ 表示时, 若存在 $j \in J$, 使得 S_j 为幂零三角余模, 则 S -幂蕴涵不是 T -幂蕴涵。通过研究发现: S -幂蕴涵保留了 T -幂蕴涵的大部分相关性质, 使得基于聚合算子幂的模糊蕴涵在近似推理中能够得到更广泛的应用。此外, 将与近似推理密切相关的幂不变性从连续三角模的幂进一步扩展到连续三角余模的幂, 可以进一步满足不同应用领域对蕴涵算子的选择要求。

参 考 文 献

- [1] 邢作兴, 周家旺, 冯利辉, 等. 基于 PID 与模糊控制的汽车集成热管理系统研究[J]. 陕西科技大学学报, 2024, 42(5): 157-165.
- [2] 李路骋, 王振忠, 黄雪鹏. 基于模糊阻抗控制的机器人气囊抛光恒力控制系统研究[J/OL]. 中国机械工程: 1-9[2024-10-18]. <https://link.cnki.net/urlid/42.1294.TH.20241014.1533.012>.
- [3] 张跃瀚, 胡嘉杰, 卜方鑫, 等. 基于 WOA 算法的低温 3D 打印系统模糊 PID 温度控制策略研究[J/OL]. 南京师范大学学报(工程技术版): 1-15[2024-10-18]. <https://link.cnki.net/urlid/32.1684.T.20241010.1718.002>.
- [4] BUSTINCE H, PAGOLA M, BARRENECHEA E. Construction of fuzzy indices from fuzzy DI-subsethood measures: application to the global comparison of images[J]. Information Sciences, 2006, 177(3): 906-929.
- [5] KERRE E E, NACHTEGAEL M. Fuzzy Techniques in Image Processing[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2000.
- [6] YAN P, CHEN G Q. Discovering a cover set of arsi with hierarchy from quantitative databases[J]. Information Sciences, 2005, 173(4): 319-336.
- [7] BACZYNSKI M, JAYARAM B. Fuzzy Implications[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [8] GRZEGORZEWSKI P. Probabilistic implications[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 226(1): 53-66.
- [9] DIMURO G P, BEDREGAL B. On residual implications derived from overlap functions[J]. Information Sciences, 2015, 312(10): 78-88.
- [10] DIMURO G P, BEDREGAL B, Santiago R H N. On (G, N) -implications derived from grouping functions[J]. Information Sciences, 2014, 279(20): 1-17.
- [11] BALASUBRAMANIAM J. Yager's new class of implications J_f and some classical tautologies[J]. Information Sciences, 2007, 177(3): 930-946.
- [12] ZHOU H J. Characterizations and applications of fuzzy implications generated by a pair of generators of t-norms and the usual addition of real numbers[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(6): 1952-1966.
- [13] SU Y, XIE A F, LIU H W. On ordinal sum implications[J]. Information Sciences, 2015, 293(1): 251-262.
- [14] MASSANET S, TORRENS J. Threshold generation method of construction of a new implication from two given ones[J]. Fuzzy Sets and

- Systems, 2012, 205(16): 50-75.
- [15] MASSANET S, TORRENS J. On the vertical threshold generation method of fuzzy implication and its properties[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 226(1): 32-52.
- [16] MASSANET S, RECASENS J, TORRENS J. Fuzzy implication functions based on powers of continuous t -norms[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 83: 265-279.
- [17] MASSANET S, RECASENS J, TORRENS J. Corrigendum to “fuzzy implication functions based on powers of continuous t -norms” [Int. J. Approx. Reason. 83 (2017)265-279][J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2019, 104: 144-147.
- [18] MASSANET S, RECASENS J, TORRENS J. Some characterizations of T -power based implications[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2019, 359 (15): 42-62.
- [19] PERALTA F R, MASSANET S, MIR A. On strict T -power invariant implications: properties and intersections[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 423(30): 1-28.
- [20] PERALTA F R, MASSANET S, MIR A. An analysis of the invariance property with respect to powers of nilpotent t -norms on fuzzy implication functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2022, 466 (30): 108444.
- [21] PENG Z, PAN J. On the distributivity of T -power based implications[J]. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2022, 19(2): 169-186.
- [22] LI W H, QIN F, XIE A F. Modus ponens property of T -power based implications[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2022, 431(15): 129-142.
- [23] LI W H, QIN F, ZHANG T H. Investigations of T -power based implications satisfying some functional equations related to reasoning schemes[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2023, 158: 108918.
- [24] PENG Z M. On the T -conditionality of T -power based implications[J]. Kybernetika, 2022, 58(1): 43-63.
- [25] KLEMENT E P, MESIAR R, PAP E. Triangular Norms[M]. Netherlands: Springer Science and Business Media Dordrecht, 2000.
- [26] WALKER C L, WALKER E A. Powers of t -norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 129(1): 1-18.
- [27] SANCHEZ T C, SASTRE J T. Fuzzy Logic and Information Fusion[M]. Switzerland: Springer International, 2016.
- [28] MOS G, BACZYNSKI M. The S -power invariance property and the mixed invariance property for fuzzy implication functions[C]// 2023 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ) Proceedings. Incheon: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2023.
- [29] MIS K, BACZYNSKI M, HELBIN P. Some remarks on the generalized scheme of reduction to absurdity and generalized hypothetical syllogism in fuzzy logic[C]//Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2019). Paris: Atlantis Press, 2019.

(责任编辑:刘庆松)