

文章编号 1672-6634(2023)06-0001-08

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2023040007

等价划分下多智能体系统能控性的一种判定方法

纪志坚^{1,2}

(1. 青岛大学 自动化学院 系统科学研究院, 山东 青岛 266071; 2. 山东省工业控制技术重点实验室, 山东 青岛 266071)

摘 要 研究了多智能体系统的能控性问题, 基于网络图拓扑的等价划分, 给出了能控性的一种新的判定方法。在智能体之间信息交换图的基础上, 通过构造与等价划分相对应的分块矩阵的主子阵, 分析了系统能控性的变化情况, 得到了通过选取合适的领航者, 判定多智能体系统的分布式能控性的新方法。

关键词 能控性; 等价划分; 多智能体系统; 领航者

中图分类号 TP13

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



A Method for Determining the Controllability of Multi-Agent Systems under Equitable Partition

Ji Zhijian^{1,2}

(1. Institute of Complexity Science, College of Automation, Qingdao University, Qingdao 266071, China;
2. Shandong Key Laboratory of Industrial Control Technology, Qingdao 266071, China)

Abstract The controllability of multi-agent systems is studied in this paper. A new determination method of controllability is presented by using equitable partition of network graph topology. Based on the inter-connection graph between agents, the change of controllability of the system is analyzed by constructing the main submatrix of the block matrix corresponding to the equitable partition, and a new method is obtained to determine the distributed controllability of the multi-agent system by selecting the appropriate leaders.

Key words controllability; equitable partition; multi-agent systems; leader

1 引言

能控性是现代控制理论的一个基本概念,也是多智能体系统性能分析的一个核心问题,该问题的研究有助于认识系统的基本结构特性,促进建立多智能体动力学系统的性质与系统结构的关系,而等价划分是智能体间信息交换网络图拓扑结构的一个典型划分方法,是系统结构分解的一个重要方面,对它的研究,是深入理解系统动态演化规律的一个不可忽视的途径,这是文章研究等价划分下系统分布式能控性的主要原因。

收稿日期: 2023-04-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(62373205, 62033007); 山东省泰山学者攀登计划项目和泰山学者特聘教授项目(ts20190930)资助

通讯作者: 纪志坚, 男, 汉族, 博士, 教授, 泰山学者特聘教授, 研究方向: 多智能体网络系统、多机器人系统的分布式控制等, E-mail: jizhijian@pku.org.cn.

能控性概念最早是由卡尔曼(R. E. Kalman)等人在 20 世纪 60 年代初首次提出的^[1],作为系统的一个基本性质,多智能体系统的能控性在近年来得到了越来越多的关注和研究,相关成果不断涌现^[2-5, 31-35]。其中,得到最多研究的一个能控性定义如下:对系统中的部分节点(个体)施加外部控制输入,通过个体间的信息传递规则(即协议),在一定的时间内,将系统的全部节点从任意的初始状态转移到任意指定的终端状态,其中,被施加控制输入的节点被称为领航者(leader),其余节点则被称为跟从者(follower)。该定义借鉴了传统能控性的定义方式,它反映了将所有节点的状态驱动到任何所期望状态的能力。多智能体系统的能控性定义在网络辨识、队形控制、分布估计和生物网络等研究中均有所应用^[6-13]。在 2004 年, Tanner 首先提出了领航者-跟从者框架下的分布式能控问题,并给出了单积分器系统能控的代数充要条件,文中还指出,代数条件在图论意义上的解读是问题进一步解决的关键,这也为之后的科研工作者指出了一个新的努力目标^[14]。例如, Ji 和 Egerstedt 基于拓扑图的等价划分给出了系统能控的一个必要条件^[15]。此外, Ji 等人首次证明了多智能体系统能控性只需在连通图上进行研究,这不仅揭示了多智能体系统能控性由图拓扑结构唯一决定这一事实,而且还提出了能控性基于特征向量进行判定的充要条件,从而为通过特征向量确定领航者数量和位置提供了一个方法^[16]。

从领航者选取和协议设计等角度对能控性问题进行研究,可以得到能控性与拓扑结构之间关系的一些新的理解。例如, Ji 等人提出了多智能体系统能控性的一种统一认识方法,表明了能控性作为系统内在性质的价值所在,并给出了非能控拓扑结构的一种构造方法^[17]。Cai 等人则在 Laplacian 矩阵结构的基础上建立了系统能控的条件,并给出了基于路形拓扑的一种能控标准型^[18]。Zhao 等人通过领航者数量的调整以及边权重的选取,提高了系统的能控性能,这种做法可以被认为是一种改变信息传递图拓扑结构的另一种方式^[19]。

信息交换图的拓扑结构划分是拓扑结构分解的一个主要形式,它是能控性研究的一个重要途径。Lou 等人研究了权重-平衡划分下的能控性问题^[20]; Zhang 和 Guan 等人基于拓扑图的距离等价划分研究了多智能体分布式系统的能控子空间^[21, 22]; Ji 等人通过引入坐标划分研究了能控性的特征结构属性^[23],并通过拓扑结构的另一种形式的划分,即将两类图以适当的形式进行衔接,形成一种新的具有能控性的拓扑结构,从而提出了一种构造能控拓扑图的方法^[24]。除此之外,等价划分和松弛等价划分也是研究分布式能控的常用方法^[15, 25-28]。例如, Martin 等人在研究中运用了能控性分解,并通过松弛等价划分给出了能控性的图论刻画^[29]; Su 等人结合自同构给出了等价划分下多智能体系统能控性的技术改进方法^[30]。本文基于等价划分研究了多智能体系统能控性的判定问题,并给出了能控性的一种确定方法。在智能体之间信息交换图的基础上,通过分析平凡或(和)非平凡胞腔进入领导者节点集合时的情形,探讨了多智能体系统能控性会发生何种变化,给出了分块矩阵的主子阵的构造方法,并得到了通过选取合适的领航者使得系统能控的方法。文中通过识别领航者使得系统不可控,清楚地给出了使多智能体能控的领航者选择方法,为判定多智能体系统的分布式能控性提供了一个可供借鉴的新方法。

2 问题描述

多智能体系统描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = u_i, & i = 1, \dots, N, \\ \dot{x}_{N+j} = u_{N+j}, & j = 1, \dots, l, \end{cases} \quad (1)$$

式中 N 和 l 分别表示跟从者和领航者的数量, x_i 表示第 i 个智能体的状态, $i = 1, \dots, N + l$ 。设 N_i 为 v_i 的邻居集合, 即 $N_i = \{j \mid v_i \sim v_j; j \neq i\}$, 且协议定义为

$$u_i = - \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j) \quad (2)$$

使 $x_{N+1}, \dots, x_{N+l}$ 扮演领航者角色, 并将这些智能体重命名为

$$\begin{cases} y_i \triangleq x_i, & i=1, \dots, N, \\ z_j \triangleq x_{N+j}, & j=1, \dots, l, \end{cases}$$

式中 y 是所有 y_i 的堆栈向量, z 是所有 z_j 的堆栈向量, u 是所有 u_{N+j} 的堆栈向量, $j=1, \dots, l$ 。然后, 在式(2)下, 跟从者的动态方程为

$$\dot{y} = -Fy - Rz, \quad (3)$$

式中 F 为 G 的拉普拉斯矩阵 L 删除最后 l 行和 l 列后得到的矩阵。 R 是由被删除列的前 N 个元素组成的 $N \times l$ 阶子矩阵。

定义 1 如果系统(3)在控制输入 z 下是能控的, 那么称在领航者 x_{N+j} , $j=1, \dots, l$ 和固定拓扑下的多智能体系统(1)是能控的。

多智能体系统分布式能控的几个模型的讨论和最新结果, 可参阅[31]和[32]。

3 一种能控性的判定方法

本节研究了信息交换图 G 的等价划分, 当平凡或(和)非平凡胞腔属于领航者节点集合时, 系统的能控性会发生什么变化。

胞腔 $C \subset V$ 是节点集的一个子集。图的划分是指将其节点集分组为不同的胞腔。接下来, 回顾一下等价划分的定义。

定义 2 (等价划分) 对于任意的 i, j , 如果 C_j 中的每个节点在 C_i 中都有相同数量的邻居, 则称 V_g 的 r -划分 π 是等价划分, 其中 π 中的胞腔为 $C_1, \dots, C_r$ 。在这种情况下, C_i 中任意节点在 C_j 中的邻居数用 b_{ij} 表示, 且用 $r = |\pi|$ 表示划分 π 的基数。

在文献[15, 25]中, 提出了利用信息交换图的等价划分来处理多领航者条件下的能控性问题。根据这个概念, 下面的结论给出了系统不能控的图理论特征。

引理 1^[25] 给定一个信息交换图 G 和诱导子图 G_f , 如果在 G 和 G_f 上分别存在非平凡等价划分 π 和 π_f , 则系统(3)是不能控的, 此时 π 的所有非平凡胞腔都包含在 π_f 中。

结果表明, 等价划分是理解多智能体能控性的一个很有效的概念。这促使本文考虑以下问题: 给定信息交换图 G 的一个等价划分 π , 当领航者来自平凡或(和)非平凡胞腔的一部分时, 系统能控性如何? 下面给出了两个相关的性质。

设 $C_1, \dots, C_r$ 表示与等价划分 π 相关的所有平凡胞腔, 其中 $1 \leq \gamma \leq r-1$, 表示为 $\Gamma_{i_1, \dots, i_j} \triangleq C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_j}$, $\forall i_1, \dots, i_j \in \{1, \dots, \gamma\}$, $1 \leq j \leq \gamma$ 。可以看到 $\Gamma_{i_1, \dots, i_j}$ 是一个节点集, 包含 $C_1, \dots, C_r$ 中任意 j 个胞腔中的节点。

命题 1 如果从 $\Gamma_{i_1, \dots, i_j}$ 中选择任意一个节点作为领航者, 则多智能体系统(1)是不能控的。

证明 为了简化命题 1, 不失一般性, 本文假设 $i_1=1, \dots, i_j=j$ 。在这种情况下, 领航者从 $\Gamma_{i_1, \dots, i_j}$ 中选择, 因此, 跟从者子图 G_f 是由节点集 $C_{j+1}, \dots, C_r$ 组成的诱导子图。因为 $C_1, \dots, C_j$ 是同时从原始的信息交换图 G 中移除的, G_f 中的胞腔 $C_{j+1}, \dots, C_r$ 被保存得很好。因此, C_k 中的每个节点在 $C_{k'}$ 中都有相同数量的邻居, 其中 $\forall k, k' \in \{j+1, \dots, r\}$ 。也就是说, $C_{j+1}, \dots, C_r$ 是 G_f 的一个等价划分。因为 $C_1, \dots, C_j$ 都是平凡胞腔, 所以 G 和 G_f 共享胞腔集 $\{C_{j+1}, \dots, C_r\}$ 中的所有非平凡胞腔。根据引理 1 可得, 这个系统是不能控的。

注释 1 命题 1 表明, 当从非平凡胞腔中选择领航者时, 多智能体系统是不能控的。

在命题 1 中, 是从 $\Gamma_{i_1, \dots, i_j}$ 的一组平凡胞腔中选择领航者。在后续讨论中, 本文考虑领航者也可以从非平凡胞腔中选取的情况。要继续研究, 此时需要回忆起两个结果。

假设 π 是 G 的一个等价划分, P 是 π 对应的特征矩阵。设 $\bar{P}$ 为标准化的 P , 选择 $\bar{Q}$ 使 $T = [\bar{P} \mid \bar{Q}]$ 是一个标准正交矩阵。下面的引理是在[15, 25]中推导出来的。

引理 2^[15, 25] 如果图 G 有一个非平凡等价划分(NEP) π , 所对应的特征矩阵为 P , 则拉普拉斯矩阵 L

相似于对角块矩阵

$$\bar{L} = T^T L T = \begin{bmatrix} L_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_Q \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中 $L_P = \bar{P}^T L \bar{P}$, $L_Q = \bar{Q}^T L \bar{Q}$, 并且 $T = [\bar{P} \mid \bar{Q}]$ 定义了 R^n 关于 π 的一组标准正交基。

设 P_f 为 G_f 的一个等价划分 π_f 的特征矩阵。设 $\bar{P}_f = P_f (P_f^T P_f)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\bar{Q}_f$ 为满足 $R(\bar{Q}_f) = R(\bar{P}_f)^\perp$ 的矩阵。这样, $T_f = [\bar{P}_f \mid \bar{Q}_f]$ 是 R^{n_f} 相对于 π_f 的一个标准正交基。

引理 3^[15,25] 设 G_f 为跟从者子图, L_f 是 G_f 的拉普拉斯矩阵 L 的对角子矩阵。如果 G_f 中有一个非平凡等价划分 (NEP) π_f , 并且 G 中有一个划分 π , 这个 π_f 中的所有非平凡胞腔也是 π 中的胞腔, 那么

$$\bar{L}_f = T_f^T L_f T_f = \begin{bmatrix} L_{fP} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{fQ} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中 T_f 是上面定义的矩阵。

引理 4^[15] 假设信息交换图 G 是连通的, 当且仅当 L 和 F 不共享任何共同的特征值时, 多智能体系统是能控的。

对于信息交换图 G 的一个等价划分 π , 设 $C_1, \dots, C_l$ 为非平凡胞腔, $C_{l+1}, \dots, C_r$ 为平凡胞腔。设 $\{i_1, \dots, i_h\}$ 是 $\{1, \dots, l\}$ 的任意子集, 其中 $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_h \leq l$, $1 \leq h \leq l-1$ 。并且, $\{i_1, \dots, i_h\}$ 中的元素个数最多为 $l-1$ 个。设 $\{j_1, \dots, j_s\}$ 是 $\{l+1, \dots, r\}$ 的任意子集, 其中 $l+1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s \leq r$, $1 \leq s \leq r-l$ 。并且, s 的最大值为 $r-l$ 。在这种情况下, $\{j_1, \dots, j_s\}$ 的最大集合与 $\{l+1, \dots, r\}$ 重合。这与 $\{i_1, \dots, i_h\}$ 不同, $\{i_1, \dots, i_h\}$ 始终是 $\{1, \dots, l\}$ 的一个子集。对于一个任意的固定索引集 $\{i_1, \dots, i_h\}$ 和 $\{j_1, \dots, j_s\}$ 。表示为

$$X_{h,s} \triangleq (C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_h}) \cup (C_{j_1} \cup \dots \cup C_{j_s}).$$

接下来陈述以下结果。

定理 1 如果节点集 $X_{h,s}$ 中所有的智能体都被选为领航者, 那么可以构造出引理 2 和引理 3 中的正交矩阵 T 和 T_f , 使 L_{fQ} 和 L_{fP} 分别是 L_Q 和 L_P 的主子矩阵, 其中 L_Q, L_{fQ}, L_P 和 L_{fP} 分别为式 (4) 和 (5) 中介绍的对角块矩阵。

证明 为了简化陈述, 本文对一个特殊的情况进行证明。一般的情况也可以用同样的方式来证明。

假设信息交换图 G 有一个包含非平凡胞腔 C_1, C_2, C_3 和平凡胞腔 C_4, C_5, C_6 的等价划分 π 。现在, 选择胞腔 C_3 和 C_6 中的所有智能体作为领航者。在这种情况下, $i_1=3, j_1=6, X_{1,1} \triangleq C_{i_1} \cup C_{j_1}$ 。

跟从者子图 G_f 由胞腔 C_1, C_2, C_4 和 C_5 组成。此外, 从等价划分的定义可知, C_1, C_2, C_4 和 C_5 构成了 G_f 的一个等价划分 π_f 。

对于等价划分 $\pi_f = \{C_{f1}, C_{f2}, C_{f3}, C_{f4}\}$, 其中 $C_{f1} = C_1, C_{f2} = C_2, C_{f3} = C_4, C_{f4} = C_5$, π_f 的特征矩阵为 $P_f = [p_{f1}, p_{f2}, p_{f3}, p_{f4}]_{n_f \times r_f}$, 其中 n_f 代表 G_f 中的节点个数, r_f 代表 π_f 中的胞腔个数。基于上述论证, π_f 中的所有非平凡胞腔也是 π 中的胞腔, 因此, 根据引理 3, 可以构造出一个正交矩阵 T_f 使式 (5) 成立。

结合 G_f 的划分 π_f , 本文将 G 的等价划分 π 重新标记为 $C_{l1} \triangleq C_1, C_{l2} \triangleq C_2, C_{l3} \triangleq C_4, C_{l4} \triangleq C_5, C_{l5} \triangleq C_3, C_{l6} \triangleq C_6$, 也就是说, G 和 G_f 共同的胞腔 C_1, C_2, C_4 和 C_5 在 π 中以更高的优先级重新标记。于是, π 的特征矩阵为 $P = [p_1, \dots, p_6]_{n \times r}$, 其中 p_i 对应于 C_{li} , n 代表 G 中的节点数, r 代表 π 中的胞腔数, $i=1, \dots, 6$ 。

接下来, 分析正交矩阵 T 和 T_f 的结构。注意到, $T = [\bar{P} \mid \bar{Q}]$, $T_f = [\bar{P}_f \mid \bar{Q}_f]$, 且 $\bar{P}$ 和 $\bar{P}_f$ 分别是标准化的 P 和 P_f 。那么 $\bar{P}$ 和 P 具有相同的块结构, $\bar{P}_f$ 和 P_f 也是如此。对于特征矩阵 P 和 P_f , 向量 p_i 和 p_{fi} 之间的关系如

$$p_i = \begin{bmatrix} p_{fi} \\ \mathbf{0}_{n-n_f} \end{bmatrix}, i=1, 2, \quad (6)$$

这是因为 C_1, C_2 都是 π 和 π_f 的非平凡胞腔。由于 p_3 和 p_4 分别对应于平凡胞腔 C_4 和 C_5 , p_{f3} 和 p_{f4} 也是如此, 所以得到

$$p_j = \begin{bmatrix} p_{f(j-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, j=3,4, \quad (7)$$

式中 $\mathbf{0}$ 是一个具有相应的适当维数的向量。 $\bar{P}$ 和 $\bar{P}_f$ 分别与 P 和 P_f 具有相同的块结构。对于 P 和 P_f 之间对应的列向量, 式(6)和(7)仍然成立。这样, 我们可以构造矩阵 P 和 P_f , 使得

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中 $\bar{P}_{22}$ 与 π 和 π_f 不共享的胞腔相关联。同时, 这也使得我们能够构造矩阵 $\bar{Q}$ 和 $\bar{Q}_f$ 来实现

$$\bar{Q} = [\bar{Q}_1 \mid \bar{Q}_2], \bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} \bar{Q}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{n \times (n_f - r_f)}. \quad (9)$$

更具体地, 为了构造 $\bar{Q}_1$ 和 $\bar{Q}_f$ 使式(9)成立, 可以首先考虑 Q_f , 然后对 Q_f 进行规范化, 从而得到 $\bar{Q}_f$ 和 $\bar{Q}_1$ 。对于这里提到的特殊情况, Q_f 可取为 $Q_f = [Q_{f1}, Q_{f2}]$, 且

$$Q_{fi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{Q}_{fi} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{n_i \times (n_i - 1)}, i=1,2,$$

式中 Q_{fi} 对应于 C_{fi} , $i=1,2$ 。在 Q_{fi} 中, 上、下两个部分是具有适当维数(可能是空的)的零矩阵, 且 $\bar{Q}_{fi}$ 为

$$\bar{Q}_{fi} = \begin{bmatrix} I_{n_i-1} \\ -\mathbf{1}^T \end{bmatrix}_{n_i \times (n_i-1)},$$

式中 $\mathbf{1} \in R^{n_i-1}$ 是每个元素都是 1 的向量, n_i 是胞腔 C_{fi} 中的节点数。记

$$L_Q = \bar{Q}^T L \bar{Q} \triangleq \begin{bmatrix} L_Q(1,1) & L_Q(1,2) \\ L_Q(2,1) & L_Q(2,2) \end{bmatrix},$$

式中 L_Q 是引理 2 中引入的矩阵。根据式(9),

$$\begin{aligned} L_Q(1,1) &= \bar{Q}_1^T L \bar{Q}_1 = [\bar{Q}_f^T \quad \mathbf{0}^T]_{(n_f-r_f) \times n} \begin{bmatrix} L_f & L_{fl} \\ L_{fl}^T & L_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{n \times (n_f-r_f)} \\ &= \bar{Q}_f^T L_f \bar{Q}_f \\ &= L_{fQ}, \end{aligned}$$

即, L_{fQ} 是 L_Q 的一个主子矩阵。

为了证明 L_{fQ} 是 L_P 的一个主子矩阵, 需要重新回顾式(8)。记

$$L_P \triangleq \begin{bmatrix} L_P(1,1) & L_P(1,2) \\ L_P(2,1) & L_P(2,2) \end{bmatrix}.$$

既然

$$L_P = \bar{P}^T L \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_f^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \bar{P}_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_f & L_{fl} \\ L_{fl}^T & L_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \bar{P}_{22} \end{bmatrix},$$

由此得出

$$L_P(1,1) = \bar{P}_f^T L_f \bar{P}_f = L_{fP},$$

即, L_{fP} 是 L_P 的一个主子矩阵。

例 1 下面这个例子被用来验证定理 1 的证明思路。假设 G 的等价划分 π 的胞腔为 $C_1, \dots, C_5$, 其中 $C_1 = \{v_1, v_2\}$, $C_2 = \{v_3, v_4\}$, $C_3 = \{v_5, v_6\}$, $C_4 = \{v_7\}$, $C_5 = \{v_8\}$ 。选择胞腔 $C_3 = \{v_5, v_6\}$ 中的节点为领

航者。特征矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{P}_f$ 分别为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此,正交矩阵 $\mathbf{T} = [\bar{\mathbf{P}} \mid \bar{\mathbf{Q}}]$ 和 $\mathbf{T}_f = [\bar{\mathbf{P}}_f \mid \bar{\mathbf{Q}}_f]$ 可以构造如

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}_{n \times (n-r)},$$

$$\bar{\mathbf{P}}_f = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n_f \times r_f}, \bar{\mathbf{Q}}_f = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n_f \times (n_f - r_f)}.$$

可以看出

$$\bar{\mathbf{Q}} = [\bar{\mathbf{Q}}_1 \mid \bar{\mathbf{Q}}_2], \bar{\mathbf{Q}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ 和 } \bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \bar{\mathbf{P}}_{22} \end{bmatrix},$$

由上述矩阵之间的关联,可以看到,定理 1 成立。

注释 2 给定 G 的等价划分 π , 是否存在一种识别领航者的方法,从而使相关的多智能体系统不是能控的。定理 1 提出了一种方法来处理这个问题。例如,可以利用定理 1 来讨论下面推论 1 中的能控性问题。此外,定理 1 的证明是构造性的,在证明过程中,蕴含了网络图拓扑结构的划分、领航者的选取和能控性是否成立这三者之间的重要关系,这为将来构造或设计能控或不能控的拓扑结构提供了一个值得借鉴的尝试途径。这也是定理 1 提出来的方法的一个主要优势。

推论 1 当节点集 $X_{h,,}$ 中的所有智能体都被选为领航者时,如果 G 和 G_f 上分别存在等价划分 π 和 π_f ,使得 π 和 π_f 共享所有的非平凡胞腔,则多智能体系统是不能控的。

证明 由定理 1 的证明可知,当 G 和 G_f 共享所有非平凡胞腔时,矩阵 $\bar{\mathbf{Q}}$ 只包含 $\bar{\mathbf{Q}}_1$ 。在这种情况下,式 (9)精简为

$$\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}_1, \bar{\mathbf{Q}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{n \times (n_f - r_f)},$$

可得到

$$L_Q = \bar{Q}^T L \bar{Q} = \bar{Q}_1^T L \bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} \bar{Q}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T L \begin{bmatrix} \bar{Q}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \bar{Q}_f^T L_f \bar{Q}_f = L_{fQ},$$

然后,再结合式(4)和(5),就意味着, L 和 L_f 有共同的特征值。根据引理4可得,多智能体系统是不能控的。

注释3 与引理1不同,推论1清楚地给出了使多智能体能控的领航者选择方法。

4 结论

在本文中,我们主要研究了图划分下的多智能体系统能控性的判定问题。基于等价划分,文中得到了多智能体系统能控性的一种判定方法。在智能体之间信息交换图的基础上,分析了当平凡或(和)非平凡胞腔进入领航者节点集合时,多智能体系统能控性的变化情况。此外,我们还给出了分块矩阵的主子阵的构造方法,进而得到了通过选取合适的领航者使得系统能控的方法。文中通过识别领航者使得系统不可控,清楚地给出了使多智能体能控的领航者选择方法,为判定多智能体系统的分布式能控性提供了一个可供借鉴的新方法。

参 考 文 献

- [1] KALMAN R E, HO Y C, NARENDRA K S. Controllability of linear dynamical systems[J]. Contributions to Differential Equations, 1963, 37(3): 189-213.
- [2] CHAO Y C, JI Z J. Necessary and sufficient conditions for multi-agent controllability of path and star topologies by exploring the information of second-order neighbours[J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2021, 38: 1-14.
- [3] JI Z J, WANG Z D, LIN H, et al. Controllability of multi-agent systems with time-delay in state and switching topology[J]. International Journal of Control, 2010, 83(2): 371-386.
- [4] LIU X Z, JI Z J. Controllability of multi-agent systems based on path and cycle graphs[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 28(1): 296-309.
- [5] JI Z J, LIN H, CAO S B, et al. The complexity in complete graphic characterizations of multiagent controllability[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(1): 64-76.
- [6] WANG Y P, XIANG J, LI Y J, et al. Controllability of dynamic-edge multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2018, 5(3): 857-867.
- [7] 张志伟, 纪志坚. 有向路径下的一类多智能体系统的能控性分析[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2022, 19(2): 63-70.
- [8] LIU Y Y, SLOTINE J J, BARABÁSI A L. Controllability of complex networks[J]. Nature, 2011, 473(10): 167-173.
- [9] ZHU J W, ZHOU Q Q, WU L B, et al. Topology reconstruction based fault identification for uncertain multi-agent systems with application to multi-axis motion control system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 399: 1-15.
- [10] 杜向阳, 李伟勋, 陈增强, 等. 非线性耦合多智能体系统编队跟踪控制[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2022, 19(4): 72-79.
- [11] LIU B, HAN Y, JIANG F C, et al. Group controllability of discrete-time multi-agent systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353: 3524-3559.
- [12] LIU B, SU H S, WU L C, et al. A new perspective to algebraic characterization on controllability of multiagent systems[J]. Complexity, 2020(20): 1-12.
- [13] 闫晓雪, 纪志坚. 社交网络中多领航者观点的博弈建模分析[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2022, 19(1): 20-26.
- [14] TANNER H G. On the controllability of nearest neighbor interconnections[C]. //Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004
- [15] JI M, EGERSTED T M. A graph theoretic characterization of controllability for multi-agent systems[C]. //Proceedings of the 2007 American Control Conference, 2007.
- [16] JI Z J, WANG Z D, LIN H, et al. Interconnection topologies for multi-agent coordination under leader-follower framework[J]. Automatica, 2009, 45(12): 2857-2863.
- [17] JI Z J, LIN H, YU H S. Protocols design and uncontrollable topologies construction for multi-agent networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(3): 781-786.

- [18] CAI N, ZHONG Y S. Formation controllability of high order linear time-invariant swarm systems[J]. IET Control Theory Applications, 2010, 4: 646-654.
- [19] ZHAO B, GUAN Y Q, WANG L. Controllability improvement for multi-agent systems: leader selection and weight adjustment[J]. International Journal of Control, 2016, 89(10): 2008-2018.
- [20] LOU Y C, HONG Y G. Controllability analysis of multi-agent systems with directed and weighted interconnection[J]. International Journal of Control, 2012, 85(10): 1486-1496.
- [21] ZHANG S, CAO M, CAMLIBEL M K. Upper and lower bounds for controllable subspaces of networks of diffusively coupled agents[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(3): 745-750.
- [22] GUAN Y Q, JI Z J, ZHANG L, et al. Controllability of multi-agent systems under directed topology[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(18): 4333-4347.
- [23] JI Z J, LIN H, YU H S. Leaders in multi-agent controllability under consensus algorithm and tree topology[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(9): 918-925.
- [24] JI Z J, CHEN T W, YU H S. A design method for controllable topologies of multi-agent networks[C]. //Proceedings of the 35th Chinese Control Conference, 2016: 7578-7584.
- [25] RAHMAN A, JI M, MESBAHI M, et al. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2009, 48(1): 162-186.
- [26] CAO M, ZHANG S, CAMLIBEL M K. A class of uncontrollable diffusively coupled multi-agent systems with multi-chain topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(2): 465-469.
- [27] EGERSTEDT M, MARTINI S, CAO M, et al. Interacting with networks: How does structure relate to controllability in single-leader, consensus networks? [J]. IEEE Control Systems Magazine, 2012, 32(4): 66-73.
- [28] CARDOSO D M, DELORME C, RAMA P. Laplacian eigenvectors and eigenvalues and almost equitable partitions[J]. European Journal of Combinatorics, 2007, 28(3): 665-673.
- [29] MARTINI S, EGERSTEDT M, BICCHI A. Controllability analysis of multi-agent systems using relaxed equitable partitions[J]. International Journal of Systems Control and Communications, 2010, 2(1): 100-121.
- [30] SU M M, JI Z J, LIU Y G, et al. Improved multi-agent controllability processing technique based on equitable partition[J]. ISA Transactions, 2023. DOI: 10.1016/j.isatra.2023.03.004.
- [31] 刘萌萌, 纪志坚, 刘允刚, 等. 基于等势节点的能控图的构造[J/OL]. 系统科学与数学, 2023. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2019.01.20230419.1620.002.html>.
- [32] GUO J H, JI Z J, LIU Y G, et al. Unified understanding and new results of controllability model of multi-agent systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(11): 6330-6345.
- [33] LU Z, ZHANG Z, JI Z J. Strong targeted controllability of multi-agent systems with time-varying topologies over finite fields[J]. Automatica, 2022, 142: 110404.
- [34] SHABBIR M, ABBAS W, YAZICIOGLU A Y, et al. Computation of the distance-based bound on strong structural controllability in networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68(3): 1768-1775.
- [35] ABBAS W, SHABBIR M, YAZICIOGLU Y, et al. Edge augmentation with controllability constraints in directed Laplacian networks [J]. IEEE Control Systems Letters, 2022, 6: 1106-1111.

(责任编辑:刘庆松)