

本文引用格式:曹秀君,付世华,赵建立,等. 单比特函数摄动下干扰布尔网络输出调节问题的可解性[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2025, 38(2): 159-169.

Citation format: CAO XiuJun, FU Shihua, ZHAO Jianli, et al. The solvability of output regulation problem for Boolean networks with disturbance inputs under one-bit function perturbation[J]. Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition), 2025, 38(2): 159-169.

文章编号 1672-6634(2025)02-0159-11

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2024100012

单比特函数摄动下干扰布尔网络 输出调节问题的可解性

曹秀君, 付世华, 赵建立, 李新岭

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 研究干扰布尔网络在单比特函数摄动下的输出调节问题。首先, 利用矩阵半张量积, 分别确立了带干扰的布尔网络以及参考系统的代数形式。其次, 通过建立一个增广系统, 将输出调节问题转化为增广系统的鲁棒集合稳定性问题。并且, 通过构造一系列状态集合, 得到了干扰布尔网络的输出在函数摄动之后仍然可以追踪上参考系统输出的几个判断准则。最后, 给出一个例子验证本文所得结果的有效性。

关键词 布尔网络; 输出调节; 干扰输入; 单比特函数摄动; 矩阵半张量积

中图分类号 O157.5; O231

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



The Solvability of Output Regulation Problem for Boolean Networks with Disturbance Inputs under One-Bit Function Perturbation

CAO XiuJun, FU Shihua, ZHAO Jianli, LI Xinling

(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract This article investigates the output regulation problem of Boolean networks with disturbance inputs under one-bit function perturbation. First, with the help of the semi-tensor product of matrices, the algebraic forms of Boolean networks with disturbances and the reference system are established, respectively. Then, by constructing an augmented system, the output regulation problem is transformed into the robust set stability problem of the augmented system. Moreover, by constructing a sequence of state sets, several criteria are obtained to verify whether the output of the Boolean networks with disturbances can still track the output of the reference system after function perturbation. Finally, an example is given to verify the effectiveness of the results obtained in this paper.

收稿日期: 2024-10-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(62103176); 山东省自然科学基金项目(ZR2022MA030)资助

通信作者: 付世华, 女, 汉族, 博士, 副教授, 研究方向: 网络演化博弈的策略调控与优化、逻辑网络的分析与控制等, E-mail: fush_shanda@163.com。

Key words Boolean networks; output regulation; disturbance input; one-bit function perturbation; semi-tensor product of matrices

0 引言

布尔网络最初是由 Kauffman 提出,旨在模拟基因调控网络^[1]。布尔网络是一种基于有向图的离散动态系统,其中状态变量仅取值为 1 或 0,分别表示基因的表达与不表达。并且,每个状态根据特定的逻辑函数进行演化,这些逻辑函数决定了状态演化的规则。目前,布尔网络已经广泛应用于电路理论^[2,3]、网络演化博弈^[4,5]和多智能体系统领域^[6,7]。

在过去的几十年里,程代展教授提出的矩阵半张量积为表示和分析布尔网络的动态特性提供了一种强大的数学工具^[8]。基于矩阵半张量积理论,布尔网络可以转化为线性离散系统。目前矩阵半张量积方法在布尔网络的分析与控制中已经取得了许多优秀的成果,包括稳定性和镇定性^[9,10]、可控性和可观性^[11,12]以及同步^[13,14]等方面。

受基因突变或外部不确定因素的影响,基因调控网络中的某些状态可能会发生变化,从而对有机体产生有害影响。当用布尔网络建模基因调控网络时,基因突变可被描述为函数摄动^[15]。因此,研究函数摄动对布尔网络的影响是一个非常重要的课题。文献[15]首次提出了布尔网络中函数摄动的概念,并分析函数摄动对状态转移的影响。文献[16]研究了函数摄动对切换布尔网络鲁棒稳定性的影响,并给出了在函数摄动之后系统仍然可以实现鲁棒稳定的几个判断准则。文献[17]研究了带干扰的布尔网络在单比特函数摄动下的鲁棒稳定性和镇定性问题,并且得到了函数摄动之后系统可以实现镇定的两个充分必要条件。文献[18]研究了随机函数摄动对概率布尔网络稳定性的影响,得到了系统可以实现有限时间稳定的几个充要条件。文献[19]提出了一个新的能控矩阵方法用来解决函数摄动下切换布尔控制网络的鲁棒能控和镇定问题。

控制理论中一个重要的问题是使一个系统的输出能够跟踪由外部系统产生的参考信号,这一问题被称为输出调节问题。例如,文献[20]提出了一种新型的反馈控制,以使大肠杆菌的乳糖调控系统中被诱导细胞的比例达到所需水平,这是输出调节在基因调控网络中的一个实例。文献[21]研究了当输出信号是常值时布尔网络的鲁棒输出追踪问题,得到追踪问题可解性的几个充要条件。文献[22]研究了干扰布尔网络在单比特函数摄动下的鲁棒输出追踪问题,并给出了干扰布尔网络在函数摄动之后仍然可以实现鲁棒输出追踪的判断准则。文献[23]研究了当输出信号是一个给定的输出序列时布尔控制网络的输出调节问题,给出了布尔控制网络在有限时间内可以追踪上所给参考输出轨迹的判断准则。当输出是由外部系统产生的参考信号时,文献[24]采用构建并联系统的方式,得到了可以实现输出调节的充分必要条件。

在实际应用中,系统往往不可避免地会受到各种干扰,这些干扰可能源自实验中的噪声、生物过程中的不确定性,或是其他外部因素。例如,在基因调控网络中,干扰可能包括基因重组过程中片段的复制或缺失以及外部环境刺激等^[25]。在博弈论中,公共舆论和潜在的攻击者也可以被看作是影响系统行为的外部干扰。这些情况表明,在研究布尔网络时,考虑干扰因素是至关重要的。然而,据作者所知,研究函数摄动对干扰布尔网络输出调节问题影响的文献极少。

受上述讨论的启发,本文主要研究带干扰的布尔网络在单比特函数摄动下的输出调节问题。本文的主要贡献有:(1)通过构造并联系统,将单比特函数摄动下干扰布尔网络的输出调节问题转化为并联系统结构矩阵多列发生摄动后并联系统的鲁棒集合稳定问题。(2)通过构造系统能达矩阵和一系列状态集,讨论并联系统摄动点集中状态是否形成环,以及所形成环和系统目标不变集的关系,得到了干扰布尔网络的输出在函数摄动之后仍然可以追踪上参考系统输出的判断准则。

1 预备知识

下面给出矩阵半张量积的基础知识和常见符号表示。

1.1 符号表示

$\mathbf{N}^+$ 是全体正整数的集合。 $\mathbf{R}_{a \times b}$ 代表全体 $a \times b$ 维实矩阵集合。 $\mathbf{A}^T$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置。 $(\mathbf{B})_{i,j}$ 是矩阵 $\mathbf{B}$ 第 i 行第 j 列的元素。 $\otimes$ 是 Kronecker 积。 $\Delta_m := \{\delta_m^i \mid i \in [1, m]\}$, 其中 δ_m^i 是单位矩阵 $\mathbf{I}_m$ 第 i 列。当 $m = 2$ 时, 简记 $\Delta_2 = \Delta$ 。 $\text{Col}_i(\mathbf{L})$ 是矩阵 $\mathbf{L}$ 的第 i 列。 $\text{Col}(\mathbf{L})$ 代表矩阵 $\mathbf{L}$ 全部列的集合。如果 $\text{Col}_i(\mathbf{L}) \subseteq \Delta_a$, $i \in [1, b]$, 则称 $\mathbf{L} \in \mathbf{R}_{a \times b}$ 是一个逻辑矩阵。 $\mathbf{L}_{a \times b}$ 代表全体 $a \times b$ 维逻辑矩阵的集合。如果 $\mathbf{L} = [\delta_n^{i_1}, \delta_n^{i_2}, \dots, \delta_n^{i_t}]$, 简记 $\mathbf{L} = \delta_n[i_1, i_2, \dots, i_t]$ 。如果 $(\mathbf{B})_{i,j} = 0$ 或者 1 , 对任意的 $i \in [1, m]$, $j \in [1, n]$ 都成立, 则称矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbf{R}_{m \times n}$ 是布尔矩阵。 $\mathbf{B}_{p \times q}$ 代表全体 $p \times q$ 维布尔矩阵的集合。假设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbf{B}_{p \times q}$, 则矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的布尔加为 $\mathbf{A} +_B \mathbf{B} = (a_{ij} \vee b_{ij})$ 。 ${}_B \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_j = \mathbf{K}_1 +_B \mathbf{K}_2 +_B \dots +_B \mathbf{K}_n$ 。假设 $\mathbf{A} \in \mathbf{B}_{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{B}_{n \times s}$, 则矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的布尔积为 $\mathbf{A} \times_B \mathbf{B} = (c_{ij})_{m \times s}$, 其中 $c_{ij} = {}_B \sum_{k=1}^n a_{ik} \wedge b_{kj}$ 。设 $\mathbf{A} \in \mathbf{B}_{m \times n}$, 则布尔幂 $\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k-1)} \times_B \mathbf{A}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^+$ 。 $D := \{1, 0\}$, $D^n := \underbrace{D \times D \times \dots \times D}_n$ 。假设 $S = \{\delta_n^{i_1}, \delta_n^{i_2}, \dots, \delta_n^{i_s}\}$, 定义 S 的索引向量 $\mathbf{J}_S = \delta_n^{i_1} + \delta_n^{i_2} + \dots + \delta_n^{i_s}$ 。

1.2 矩阵半张量积

定义 1^[8] 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}_{a \times b}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}_{p \times s}$, 则矩阵 $\mathbf{A}$ 和矩阵 $\mathbf{B}$ 的半张量积定义为

$$\mathbf{A} \ltimes \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_{\gamma/b})(\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_{\gamma/p}),$$

式中 γ 为 b 和 p 的最小公倍数。

注 1 当 $b = p$ 时, 矩阵半张量积则为传统矩阵乘积。并且, 矩阵半张量积几乎保留了普通矩阵乘积的所有运算性质, 因此它是普通矩阵乘积的推广, 下面省略符号“ $\ltimes$ ”。

引理 1^[8] 矩阵半张量积具有如下一些基本性质:

(1) 设列向量 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}_{m \times 1}$, 矩阵 $\mathbf{L} \in \mathbf{R}_{a \times b}$, 则 $\mathbf{XL} = (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{L})\mathbf{X}$ 。

(2) 设列向量 $\mathbf{a} \in \mathbf{R}_{m \times 1}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_{n \times 1}$, 则 $\mathbf{W}_{[m,n]}(\mathbf{ab}) = \mathbf{ba}$,

式中 $\mathbf{W}_{[m,n]} := \delta_{nm}[1, m+1, \dots, (n-1)m+1, 2, m+2, \dots, (n-1)m+2, \dots, m, 2m, \dots, nm]$ 称为换位矩阵。

定义 1 $\sim \delta_2^1$, $0 \sim \delta_2^2$, δ_2^1 和 δ_2^2 分别是 1 和 0 的向量形式, 可以得到 $D \sim \Delta$ 。

引理 2^[8] 给出一个逻辑函数 $f: D^s \mapsto D$, 则存在一个唯一的矩阵 $\mathbf{L}_f \in \mathbf{L}_{2 \times 2^s}$, 使得 $f(X_1, X_2, \dots, X_s) \sim \mathbf{L}_f \ltimes_{i=1}^s \mathbf{x}_i$, 其中 $\mathbf{x}_i \in \Delta$, $i \in [1, s]$ 是 $X_i \in D$ 的向量形式并且 $\mathbf{L}_f$ 称为 f 的结构矩阵。

2 问题描述

2.1 布尔网络模型及代数表示

一个具有 n 个状态, q 个干扰输入以及 m 个输出的布尔网络可以描述为

$$\begin{cases} X_i(t+1) = f_j(\mathbf{X}(t), \mathbf{\Xi}(t)), i \in [1, n], \\ Y_j(t) = h_j(\mathbf{X}(t)), j \in [1, m], \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t)) \in D^n$, $\mathbf{\Xi}(t) = (\Xi_1(t), \dots, \Xi_q(t)) \in D^q$ 和 $\mathbf{Y}(t) = (Y_1(t), \dots, Y_m(t)) \in D^m$ 分别表示状态变量, 干扰输入和输出。 $f_i: D^{n+q} \mapsto D, i \in [1, n]$ 和 $h_j: D^n \mapsto D, j \in [1, m]$ 是布尔函数。

一个参考布尔网络可以描述为

$$\begin{cases} \hat{X}_r(t+1) = \hat{f}_r(\hat{\mathbf{X}}(t)), r \in [1, n], \\ \hat{Y}_{j(t)} = \hat{h}_j(\hat{\mathbf{X}}(t)), j \in [1, m], \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\hat{\mathbf{X}}(t) = (\hat{X}_1(t), \dots, \hat{X}_{n_1}(t)) \in D^{n_1}$ 和 $\hat{\mathbf{Y}}(t) = (\hat{Y}_1(t), \dots, \hat{Y}_m(t)) \in D^m$ 分别表示状态变量和输出。 $\hat{f}_r: D^{n_1} \mapsto D, r \in [1, n_1]$ 和 $\hat{h}_j: D^{n_1} \mapsto D, j \in [1, m]$ 是布尔函数。

记 $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_j$ 和 $\mathbf{\xi}_s$ 分别为 X_i , Y_j 和 Ξ_s 的向量形式, 其中 $i \in [1, n]$, $j \in [1, m]$, $s \in [1, q]$ 。利用引理

2, 系统可以表达为代数形式

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{L}\xi(t)\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (3)$$

式中 $\mathbf{x}(t) = \kappa_{i=1}^n \mathbf{x}_i(t) \in \Delta_{2^n}$, $\xi(t) = \kappa_{s=1}^q \xi_s(t) \in \Delta_{2^q}$, $\mathbf{y}(t) = \kappa_{j=1}^m \mathbf{y}_j(t) \in \Delta_{2^m}$ 。 $\mathbf{L} \in \mathbf{L}_{2^n \times 2^{q+n}}$ 和 $\mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2^m \times 2^n}$ 分别是系统的状态转移矩阵和输出状态转移矩阵。

类似地, 系统可以表达为如下代数形式

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t+1) = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{x}}(t), \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}}(t), \end{cases} \quad (4)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}_r$ 和 $\hat{\mathbf{y}}_j$ 分别是 $\hat{\mathbf{x}}_r$ 和 $\hat{\mathbf{y}}_j$ 的向量形式, $r \in [1, n_1]$, $j \in [1, m]$, $\hat{\mathbf{x}}(t) = \kappa_{r=1}^{n_1} \hat{\mathbf{x}}_r(t) \in \Delta_{2^{n_1}}$, $\hat{\mathbf{y}}(t) = \kappa_{j=1}^m \hat{\mathbf{y}}_j(t) \in \Delta_{2^m}$ 。 $\hat{\mathbf{L}} \in \mathbf{L}_{2^{n_1} \times 2^{n_1}}$ 和 $\hat{\mathbf{H}} \in \mathbf{L}_{2^m \times 2^{n_1}}$ 分别是系统的状态转移矩阵和输出状态转移矩阵。

2.2 干扰布尔网络的输出调节

定义 2^[26] 如果存在有限时间 $T \geq 0$, 使得对任意的初始状态 $\mathbf{x}(0)$, $\hat{\mathbf{x}}(0)$ 和干扰输入 $\xi(t) \in \Delta_{2^q}$, 都有

$$\mathbf{y}(t, \mathbf{x}(0), \xi(t)) = \hat{\mathbf{y}}(t, \hat{\mathbf{x}}(0)), \forall t \geq T \quad (5)$$

成立, 那么称系统的输出可以追踪上参考信号 $\hat{\mathbf{y}}(t, \hat{\mathbf{x}}(0))$ 。

我们将系统和构造为一个增广系统来解决输出调节问题。令 $\mathbf{z}(t) := \mathbf{x}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)$, $\omega(t) := \mathbf{y}(t)\hat{\mathbf{y}}(t)$, 则

$$\mathbf{z}(t+1) = \mathbf{x}(t+1)\hat{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{L}\xi(t)\mathbf{x}(t)\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{L} \otimes \hat{\mathbf{L}})\xi(t)\mathbf{x}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{K}\xi(t)\mathbf{z}(t), \quad (6)$$

$$\omega(t+1) = \mathbf{y}(t)\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t)\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{H} \otimes \hat{\mathbf{H}})\mathbf{x}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t). \quad (7)$$

输出调节问题可以转化为增广系统的鲁棒集合稳定性问题, 并且目标集合是

$$\Omega = \{\delta_{2^{n+n_1}}^k \mid F\delta_{2^{n+n_1}}^k = \delta_{2^m}^j \times \delta_{2^m}^j, j \in [1, 2^m]\}. \quad (8)$$

显然地, 集合 Ω 包含了系统所有输出属于集合 $\{\delta_{2^m}^j \times \delta_{2^m}^j : j \in [1, 2^m]\}$ 的状态。因此, 系统的输出可以追踪上参考信号 $\hat{\mathbf{y}}(t, \hat{\mathbf{x}}(0))$ 当且仅当系统可以鲁棒稳定到集合 Ω 。

下面给出一些相关的定义和结论。

定义 3^[27] 考虑系统(6)。如果存在正整数 $T \geq 0$, 使得任意给定的初始状态 $\mathbf{z}(0)$ 和干扰输入 $\xi(t) \in \Delta_{2^q}$, 都有 $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}(0), \xi(t)) \in \Omega$, $\forall t \geq T$ 成立, 那么称系统鲁棒稳定到集合 Ω 。

许多优秀的成果已经证明了一个逻辑动态系统稳定到一个集合当且仅当它可以稳定到这个集合的最大鲁棒不变集。下面给出最大鲁棒不变集的定义。

定义 4^[28] 如果对任意的 $\mathbf{z}(t) \in M$ 和干扰 $\xi(t) \in \Delta_{2^q}$, 都有 $\mathbf{z}(t+1) \in M$ 成立, 则称非空集合 M 是系统的一个鲁棒不变集。

定义 5^[28] 如果集合 $\mathcal{A}_\Omega$ 是一个鲁棒不变集, 并且集合 Ω 的每一个鲁棒不变集都是 $\mathcal{A}_\Omega$ 的一个子集, 则称子集 $\mathcal{A}_\Omega$ 是集合 Ω 的最大鲁棒不变集。

记目标集合 Ω 的最大鲁棒不变集为 $\mathcal{A}_\Omega$ 。现在已有很多成熟的方法计算最大鲁棒不变集, 在这不作进一步的说明, 有关详细细节, 请参考文献[29]和[30]。

单比特函数摄动的发生是真值表中的一列发生变化, 也就意味着结构矩阵中的一列发生变化。我们仅考虑原干扰布尔网络发生单比特函数摄动, 而参考系统未发生摄动的情形。为了准确描述摄动, 将干扰布尔网络的结构矩阵根据干扰分块如 $\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \cdots \mathbf{L}_{2^q}]$, 式中 $\mathbf{L}_i \in \mathbf{L}_{2^n \times 2^n}$, $i \in [1, 2^q]$ 。我们给出如下假设。

假设 1 单比特函数摄动之前, 系统的输出在任意的干扰下可以追踪上参考系统的输出。

假设 2 单比特函数摄动之后, $\text{Col}_\beta(\mathbf{L}_\gamma)$ 由 $\delta_{2^n}^a$ 摄动为 $\delta_{2^n}^{\hat{a}}$, 其中 $\delta_{2^n}^a \neq \delta_{2^n}^{\hat{a}}$ 。

由假设 2 可知, 单比特函数摄动对系统中干扰为 $\delta_{2^q}^\gamma$ 时的状态 $\delta_{2^n}^\beta$ 产生影响。根据式, 可得增广系统的结构矩阵 $\mathbf{K}$ 也发生相应的变化。

将 $\mathbf{K}$ 分成 2^q 个等块, $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \cdots \mathbf{K}_\gamma \cdots \mathbf{K}_{2^q}]$ 。当 L_γ 发生变化时, 可得 $\mathbf{K}_\gamma$ 也发生变化。记 $\hat{\mathbf{L}} = \delta_{2^{n_1}} [a_1, a_2, \cdots, a_{2^{n_1}}]$, 当 $\text{Col}_\beta(L_\gamma)$ 发生如假设 2 中摄动时, 则 $\mathbf{K}_\gamma$ 的 $(\beta-1)2^{n_1} + i, i \in [1, 2^{n_1}]$ 列发生摄动, 为了方便讨论, 记 $t_i = (\beta-1)2^{n_1} + i, i \in [1, 2^{n_1}]$ 。

假设 $\text{Col}_{t_i}(\mathbf{K}_\gamma)$ 由 $\delta_{2^{n+n_1}}^{(a-1)2^{n_1}+a_i}$ 摄动为 $\delta_{2^{n+n_1}}^{(\hat{a}-1)2^{n_1}+a_i}$, 其中 $\delta_{2^{n+n_1}}^{(a-1)2^{n_1}+a_i} \neq \delta_{2^{n+n_1}}^{(\hat{a}-1)2^{n_1}+a_i}, i \in [1, 2^{n_1}]$ 。记 $p_i = (a-1)2^{n_1} + a_i, \hat{p}_i = (\hat{a}-1)2^{n_1} + a_i$ 。

记摄动点的集合为 $\mathcal{R} = \{\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_1}, \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_2}, \cdots, \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_{2^{n_1}}}\}$ 。

记系统的结构矩阵由 $\mathbf{K}$ 变为 $\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{\mathbf{K}}_1 \tilde{\mathbf{K}}_2 \cdots \tilde{\mathbf{K}}_{2^q}]$, 因此, 代数形式变为

$$\mathbf{z}(t+1) = \tilde{\mathbf{K}} \xi(t) \mathbf{z}(t). \quad (9)$$

对状态 $\mathbf{z} = \delta_{2^{n+n_1}}^k$, 在任意干扰 $\xi = \delta_{2^q}^v$ 下, 如果 $v \neq \gamma$, 可以得到

$$\mathbf{K} \xi \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{K}} \xi \mathbf{z}.$$

如果 $v = \gamma$ 并且 $k = t_i, i \in [1, 2^{n_1}]$, 就有

$$\mathbf{K} \xi \mathbf{z} = \delta_{2^{n+n_1}}^{p_i} \neq \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} = \tilde{\mathbf{K}} \xi \mathbf{z}.$$

3 主要研究内容

本文主要通过讨论摄动点集 $\mathcal{R}$ 与最大鲁棒不变集 $\mathcal{A}_\Omega$ 的关系, 来研究单比特函数摄动对系统的鲁棒输出调节问题的影响。

首先, 构造一系列状态集

$$\Upsilon_{t_i} = \{\delta_{2^{n+n_1}}^s : C_{t_i, s} > 0\} \cup \{\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}\}, i \in [1, 2^{n_1}], \quad (10)$$

式中 $\mathbf{C} = \sum_{j=1}^{2^{n+n_1}} \mathbf{B}^{(j)}, \mathbf{B} = \sum_{j=1}^{2^q} \mathbf{K}_j$ 。因此集合 Υ_{t_i} 包括了函数摄动之前可以在干扰序列下到达 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 的所有状态, 并且也包含状态 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 本身, $i \in [1, 2^{n_1}]$ 。

其次, 构造矩阵 $\tilde{\mathbf{C}} = \sum_{j=2^{n+n_1}}^{2^{n+n_1}+1} \tilde{\mathbf{B}}^{(j)}$, 其中 $\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{j=1}^{2^q} \tilde{\mathbf{K}}_j$ 。

下面根据集合 $\Upsilon_{t_i}, i \in [1, 2^{n_1}]$ 和矩阵 $\tilde{\mathbf{C}} = \sum_{j=2^{n+n_1}}^{2^{n+n_1}+1} \tilde{\mathbf{B}}^{(j)}$, 我们提出系统在函数摄动之后仍然可以追踪上参考系统的输出的几个判断准则。

定理 1 如果 $(\sum_{j \neq \gamma}^{2^q} \mathbf{K}_j)_{\hat{p}_i, t_i} \neq 0, \forall i \in [1, 2^{n_1}]$, 则函数摄动之后, 系统的输出在任意的干扰输入下可以追踪上参考系统的输出。

证 发生函数摄动之后, $\mathbf{K}_\gamma$ 的第 $t_1, t_2, \cdots, t_{2^{n_1}}$ 列分别摄动为 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_1}, \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_2}, \cdots, \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_{2^{n_1}}}$ 。如果 $(\sum_{j \neq \gamma}^{2^q} \mathbf{K}_j)_{\hat{p}_i, t_i} \neq 0, \forall i \in [1, 2^{n_1}]$, 说明函数摄动之前, $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 在一些干扰下 (除干扰 $\delta_{2^q}^\gamma$) 可以一步到达 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}, i \in [1, 2^{n_1}]$ 。因此函数摄动的发生并没有使系统产生新的路径, 函数摄动对系统没有产生影响。根据假设 1, 系统的输出函数摄动之后仍然可以追踪上参考系统的输出。

定理 1 给出了在函数摄动之后, 系统的输出在任意的干扰输入可以追踪上参考系统的输出的充分条件。然而充分条件比较严格, 接下来根据分析给出其它判断准则。

函数摄动之后, $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 在干扰 $\delta_{2^q}^\gamma$ 下一步可达状态由 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$ 改变为 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$, $\forall i \in [1, 2^{n_1}]$ 。根据定理 1, 可以将状态 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}, i \in [1, 2^{n_1}]$ 分为两类。

第一类是满足定理 1 条件的状态, 设为 $\mathcal{M} = \{\delta_{2^{n+n_1}}^{t_{l_1}}, \dots, \delta_{2^{n+n_1}}^{t_{l_t}}\}$, 会使得下式成立

$$(\sum_{j \neq \gamma}^{2^q} \mathbf{K}_j)_{\hat{p}_{l_1}, t_{l_1}} \neq 0, \dots, (\sum_{j \neq \gamma}^{2^q} \mathbf{K}_j)_{\hat{p}_{l_t}, t_{l_t}} \neq 0, \quad (11)$$

式中 $l_t \leq 2^{n_1}$ 。

第二类是不满足定理 1 条件的状态, 设为 $\mathcal{N} = \{\delta_{2^{n+n_1}}^{t_{m_1}}, \dots, \delta_{2^{n+n_1}}^{t_{m_s}}\}$, 会使得下式成立

$$(\sum_{j \neq \gamma}^{2^q} \mathbf{K}_j)_{\hat{p}_{m_1}, t_{m_1}} = 0, \dots, (\sum_{j \neq \gamma}^{2^q} \mathbf{K}_j)_{\hat{p}_{m_s}, t_{m_s}} = 0, \quad (12)$$

式中 $m_s \leq 2^{n_1}$ 。

函数摄动之后, 只有集合 $\mathcal{N}$ 中的状态在下一时刻的路径发生了变化, 因此只分析状态集 $\mathcal{N}$ 中对应的摄动点, 记作

$$\mathcal{Q} = \{\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_{m_1}}, \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_{m_2}}, \dots, \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_{m_s}}\},$$

显然 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ 。通过分析 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{A}_\Omega$ 的关系, 来研究函数摄动对输出调节问题的影响。

定理 2 如果 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}_\Omega$, 则函数摄动之后, 系统的输出在任意的干扰下可以追踪上参考系统的输出。

证 函数摄动之前, 任意的初始状态都可以在有限时间内鲁棒到达集合 $\mathcal{A}_\Omega$ 。因此对任意初始状态 $\delta_{2^{n+n_1}}^j \in \Delta_{2^{n+n_1}}$, 考虑下面两种情况。

情况 1: $\delta_{2^{n+n_1}}^j \notin \mathcal{R}_{t_i}, i \in [m_1, m_s]$, 这意味着不存在从 $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 到 $\mathcal{A}_\Omega$ 且包含 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 的路径。

情况 2: $\delta_{2^{n+n_1}}^j \in \mathcal{R}_{t_i}, i \in [m_1, m_s]$, 这就意味着至少存在一条从 $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 到 $\mathcal{A}_\Omega$ 并且包含 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 的路径。

针对情况 1。情况 1 表示 $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 不能到达 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}, i \in [m_1, m_s]$ 。函数摄动之后, 因为不存在从 $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 到 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 的路径, 因此函数摄动对路径没有影响, 根据假设 1 可知, 系统在函数摄动之后仍然可以追踪到参考信号。

针对情况 2。从 $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 到 $\delta_{2^{n+n_1}}^v \in \mathcal{A}_\Omega$ 的一条路径假设为

$$\delta_{2^{n+n_1}}^j \rightarrow \dots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^{t_i} \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^s \rightarrow \dots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^v. \quad (13)$$

路径 (13) 中的状态 $\delta_{2^{n+n_1}}^s$ 有两种情况, 第一种情况是 $\delta_{2^{n+n_1}}^s \neq \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$, 第二种情况是 $\delta_{2^{n+n_1}}^s = \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$ 。

如果 $\delta_{2^{n+n_1}}^s \neq \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$, 与情况 1 类似, 函数摄动之后这条路径没有受到影响。如果 $\delta_{2^{n+n_1}}^s = \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$, 路径变成

$$\delta_{2^{n+n_1}}^j \rightarrow \dots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^{t_i} \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}.$$

因为 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \in \mathcal{Q}$, 并且 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}_\Omega$, $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$ 下一步到达的状态仍然在最大鲁棒不变集中。所以函数摄动的发生对可以摄动到集合 $\mathcal{Q}$ 的状态并没有影响, 因此, 如果 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}_\Omega$, 系统的输出在任意的干扰下可以追踪上参考系统的输出。

定理 3 如果 $\mathcal{Q} \not\subseteq \mathcal{A}_\Omega$, 函数摄动之后, 系统的输出在任意干扰下仍能追踪上参考系统的输出, 当且仅当对任意的 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{A}_\Omega, i \in [m_1, m_s]$, 下面两个条件之一成立:

$$(1) \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \notin \mathcal{R}_{t_i};$$

$$(2) \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \in \Upsilon_{t_i}, J_{\Delta_{2^{n+n_1}} \setminus \Omega}^T \text{Col}_{t_i}(\tilde{C}) = 0.$$

证 (必要性) 通过反证法来证明必要性。假设存在状态 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{A}_\Omega$ 使得 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \in \Upsilon_{t_i}$ 并且 $J_{\Delta_{2^{n+n_1}} \setminus \Omega}^T \text{Col}_{t_i}(\tilde{C}) \neq 0$ 。因为 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \in \Upsilon_{t_i}$, 根据假设 1 可知, 函数摄动之前, 至少存在一条从 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$ 到 $\mathcal{A}_\Omega$ 且包括 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 的路径, 这条路径可以描述为

$$\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \rightarrow \cdots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^{t_i} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{A}_\Omega.$$

发生函数摄动之后, $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 在干扰 $\delta_{2^q}^y$ 下一步到达 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$, 从而可以得到下面的路径

$$\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \rightarrow \cdots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^{t_i} \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}.$$

可以发现形成了一个环。

因为 $J_{\Delta_{2^{n+n_1}} \setminus \Omega}^T \text{Col}_{t_i}(\tilde{C}) \neq 0$, 所以存在一个正整数 $\tau \geq 2^{n+n_1}$ 使得 $z(\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}, \tau, \xi) = \delta_{2^{n+n_1}}^u \notin \Omega$ 。从初始状态 $z(0) = \delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 到 $\delta_{2^{n+n_1}}^u$ 的路径中共有 $\tau + 1$ 个状态, 由于 $\tau \geq 2^{n+n_1}$ 且系统共有 2^{n+n_1} 个状态, 所以存在一个重复的状态 $\delta_{2^{n+n_1}}^l$ 使得从 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 到 $\delta_{2^{n+n_1}}^u$ 的路径变为

$$\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i} \rightarrow \cdots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^l \rightarrow \cdots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^l \rightarrow \cdots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^u. \quad (14)$$

从路径(14)可以发现, $\delta_{2^{n+n_1}}^u$ 在环上。因为 $\delta_{2^{n+n_1}}^u \notin \Omega$, 所以 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 不能在有限时间内到达集合 $\mathcal{A}_\Omega$ 。因此系统函数摄动之后不能追踪上参考系统的输出, 与系统可以追踪到参考信号的事实是矛盾的。

(充分性) 需要证明对任意的 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{A}_\Omega, i \in [m_1, m_s]$, 在条件(1)或条件(2)成立的条件下, 系统函数摄动之后在任意干扰下能追踪上参考系统的输出。

函数摄动之前, 任意的初始状态 $z(0) \in \Delta_{2^{n+n_1}}$ 在有限时间内都可以鲁棒到达集合 $\mathcal{A}_\Omega$ 。因此对任意初始状态 $z(0) = \delta_{2^{n+n_1}}^j \in \Delta_{2^{n+n_1}}$, 考虑下面的两种情况。

情况 1: $\delta_{2^{n+n_1}}^j \notin \Upsilon_{t_i}, i \in [m_1, m_s]$, 这样意味着不存在从 $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 到 $\mathcal{A}_\Omega$ 且包含 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 的路径。

情况 2: $\delta_{2^{n+n_1}}^j \in \Upsilon_{t_i}, i \in [m_1, m_s]$, 意味着至少存在一条从 $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 到 $\mathcal{A}_\Omega$ 且包含 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 的路径。

针对情况 1。函数摄动之后, 不存在从 $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 到 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 的路径, 状态 $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 在函数摄动之后能追踪到参考信号。

针对情况 2。从 $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 到 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i} \in \mathcal{A}_\Omega$ 的一条路径假设为

$$\delta_{2^{n+n_1}}^j \rightarrow \cdots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^{t_i} \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^w \rightarrow \cdots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^i. \quad (15)$$

路径(15)中状态 $\delta_{2^{n+n_1}}^w$ 有两种情况, 第一种情况是 $\delta_{2^{n+n_1}}^w \neq \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$, 第二种情况是 $\delta_{2^{n+n_1}}^w = \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$ 。

如果 $\delta_{2^{n+n_1}}^w \neq \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$, 函数摄动对这条路径没有影响。如果 $\delta_{2^{n+n_1}}^w = \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$, 路径变(15)成

$$\delta_{2^{n+n_1}}^j \rightarrow \cdots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^{t_i} \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}. \quad (16)$$

首先考虑条件(1)。因为 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \notin \Upsilon_{t_i}$, 所以从 $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 到 $\mathcal{A}_\Omega$ 没有形成新环, $\delta_{2^{n+n_1}}^j$ 在有限时间内可以到达集合 $\mathcal{A}_\Omega$ 。因此, 系统可以鲁棒稳定到集合 $\mathcal{A}_\Omega$ 。接下来考虑情况(2)。因为 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \in \Upsilon_{t_i}$, 结合(16), 从 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}$ 到 $\mathcal{A}_\Omega$ 的一条路径可以取为

$$\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \rightarrow \cdots \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^{t_i} \rightarrow \delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i}. \quad (17)$$

从(17)可以发现形成一个新环。因为 $\mathbf{J}_{\Delta_{2^{n+n_1}}}^T \setminus \Omega \text{Col}_{t_i}(\tilde{\mathbf{C}}) = 0$, 所以 $\delta_{2^{n+n_1}}^{t_i}$ 在 2^{n+n_1} 步之内无法到达 $\mathcal{A}_\Omega$, 即形成新环中所有状态都在集合 Ω 中。因此, 系统的输出在任意的干扰下可以追踪上参考系统的输出。

综上所述, 如果 $Q \not\subseteq \mathcal{A}_\Omega$, 对任意的 $\delta_{2^{n+n_1}}^{\hat{p}_i} \in Q \setminus \mathcal{A}_\Omega, i \in [m_1, m_s]$, 只要条件(1)或条件(2)成立, 系统的输出在任意的干扰下可以追踪上参考系统的输出。于是, 充分性得证。

注 2 当参考信号是常值时, 文献[22]研究了函数摄动对于干扰布尔网络鲁棒输出追踪问题的影响。当参考信号是由外部系统产生的时变参考信号时, 本文研究了函数摄动下干扰布尔网络输出调节的可解性问题。文献[22]在函数摄动之后, 结构矩阵是一列发生改变, 本文中增广系统的结构矩阵是多列发生改变, 得到的结论是文献[22]的一种推广, 从而本文研究的输出调节问题更具有一般性。

4 例子

本节给出一个例子来验证得到结果的有效性。考虑下面一个带干扰的布尔网络

$$\begin{cases} X_1(t+1) = X_1(t) \wedge X_2(t) \wedge \Xi(t), \\ X_2(t+1) = X_1(t), \\ Y(t) = X_1(t) \vee (\neg X_1(t) \wedge \neg X_2(t)), \end{cases} \quad (18)$$

式中 X_1, X_2 是状态变量, Ξ 是干扰输入, Y 是输出。

令 $1 \sim \delta_2^1, 0 \sim \delta_2^2$ 。 $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 是 X_i, Y 和 Ξ 的向量形式, 其中 $i \in [1, 2]$ 。记 $\mathbf{x}(t) = \otimes_{i=1}^2 \mathbf{x}_i(t) \in \Delta_4$, $\mathbf{y}(t) \in \Delta, \boldsymbol{\xi}(t) \in \Delta$ 。系统的代数形式可以表达为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{L}\boldsymbol{\xi}(t)\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (19)$$

式中 $\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2], \mathbf{L}_1 = \delta_4[3 \ 1 \ 4 \ 4], \mathbf{L}_2 = \delta_4[3 \ 3 \ 4 \ 4]$ 并且 $\mathbf{H} = \delta_2[1 \ 1 \ 2 \ 1]$ 。

参考布尔网络的动态表达式为

$$\begin{cases} \hat{X}_1(t+1) = (\hat{X}_1(t) \wedge \hat{X}_2(t)) \vee \neg \hat{X}_1(t), \\ \hat{X}_2(t+1) = \hat{X}_1(t) \vee (\hat{X}_1(t) \wedge \neg \hat{X}_2(t)), \\ \hat{Y}(t) = (\hat{X}_1(t) \vee \hat{X}_2(t)), \end{cases} \quad (20)$$

式中 $\hat{X}_1, \hat{X}_2$ 是状态变量, $\hat{Y}$ 是输出。类似地, 可以得到系统的代数形式

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t+1) = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{x}}(t), \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}}(t), \end{cases} \quad (21)$$

式中 $\hat{\mathbf{L}} = \delta_4[1 \ 3 \ 2 \ 1]$ 和 $\hat{\mathbf{H}} = \delta_2[1 \ 1 \ 2 \ 1]$ 。

令 $\mathbf{z}(t) := \mathbf{x}(t)\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\omega}(t) := \mathbf{y}(t)\hat{\mathbf{y}}(t)$, 结合系统和参考系统构造增广系统

$$\begin{cases} \mathbf{z}(t+1) = \mathbf{K}\boldsymbol{\xi}(t)\mathbf{z}(t), \\ \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t), \end{cases} \quad (22)$$

式中 $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2], \mathbf{K}_1 = \delta_{16}[9 \ 11 \ 10 \ 9 \ 1 \ 3 \ 2 \ 1 \ 13 \ 15 \ 14 \ 13 \ 13 \ 15 \ 14 \ 13], \mathbf{K}_2 = \delta_{16}[9 \ 11 \ 10 \ 9 \ 9 \ 11 \ 10 \ 9 \ 13 \ 15 \ 14 \ 13 \ 13 \ 15 \ 14 \ 13]$, 并且 $\mathbf{F} = \delta_4[1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2]$ 。

根据可得 $\Omega = \{\delta_{16}^1, \delta_{16}^2, \delta_{16}^3, \delta_{16}^5, \delta_{16}^6, \delta_{16}^7, \delta_{16}^{12}, \delta_{16}^{13}, \delta_{16}^{14}, \delta_{16}^{15}\}, \mathcal{A}_\Omega = \{\delta_{16}^{12}, \delta_{16}^{13}, \delta_{16}^{14}, \delta_{16}^{15}\}$ 。

显然地, 在函数摄动之前, 可以发现系统的输出在任意的干扰下可以追踪到系统的输出, 表明系统可以鲁棒稳定到集合 $\mathcal{A}_\Omega$ 。系统的状态转移图如图 1 所示。

我们需要判断在函数摄动之后, 系统的输出在任意的干扰下是否仍然可以追踪到系统的输出。接下来, 分析两种情况的函数摄动。

(1) 函数摄动之后, L_1 的第二列由 δ_4^1 变为 δ_4^3 , 也就是 $\gamma=1, \beta=2$ 。可以计算得到 K_1 的第 5、6、7、8 列分别由 δ_{16}^1 、 δ_{16}^3 、 δ_{16}^2 、 δ_{16}^1 变为 δ_{16}^9 、 δ_{16}^{11} 、 δ_{16}^{10} 、 δ_{16}^9 。计算

$$B \sum_{j \neq 1}^2 K_j = K_2 = \delta_{16} [9 \ 11 \ 10 \ 9 \ 9 \ 11 \ 10 \ 9 \ 13 \ 15 \ 14 \ 13 \ 13 \ 15 \ 14 \ 13],$$

可以发现 $[K_2]_{9,5} \neq 0$, $[K_2]_{11,6} \neq 0$, $[K_2]_{10,7} \neq 0$ 并且 $[K_2]_{9,8} \neq 0$ 。因此根据定理 1, 系统的输出在函数摄动之后仍然可以追踪到系统的输出。相应的状态转移如图 2 所示。

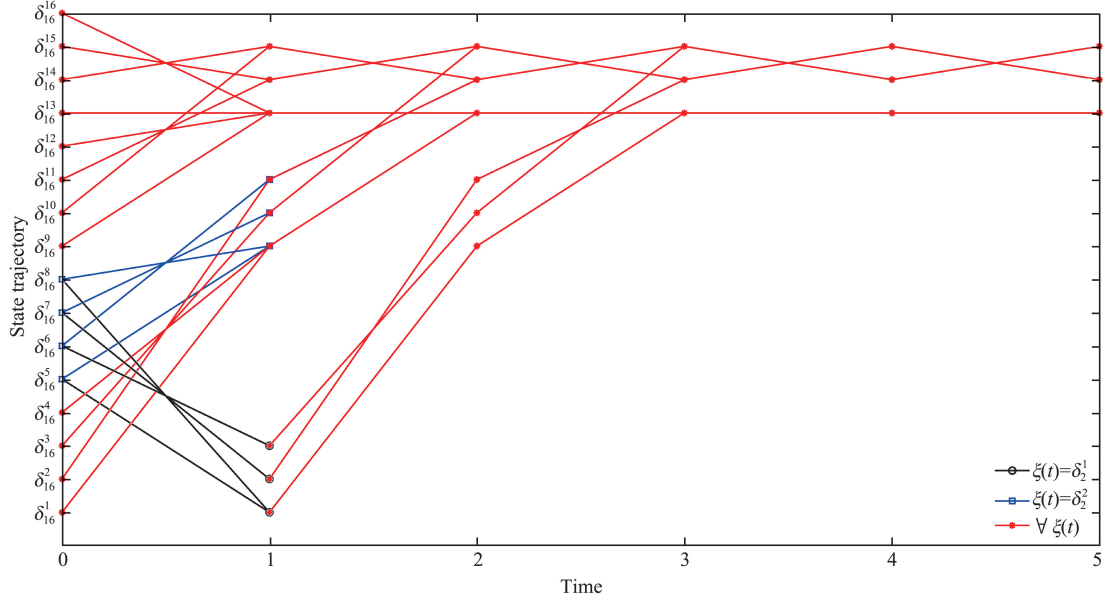


图 1 系统函数摄动前的状态轨迹

Fig. 1 The state trajectory of system before function perturbation

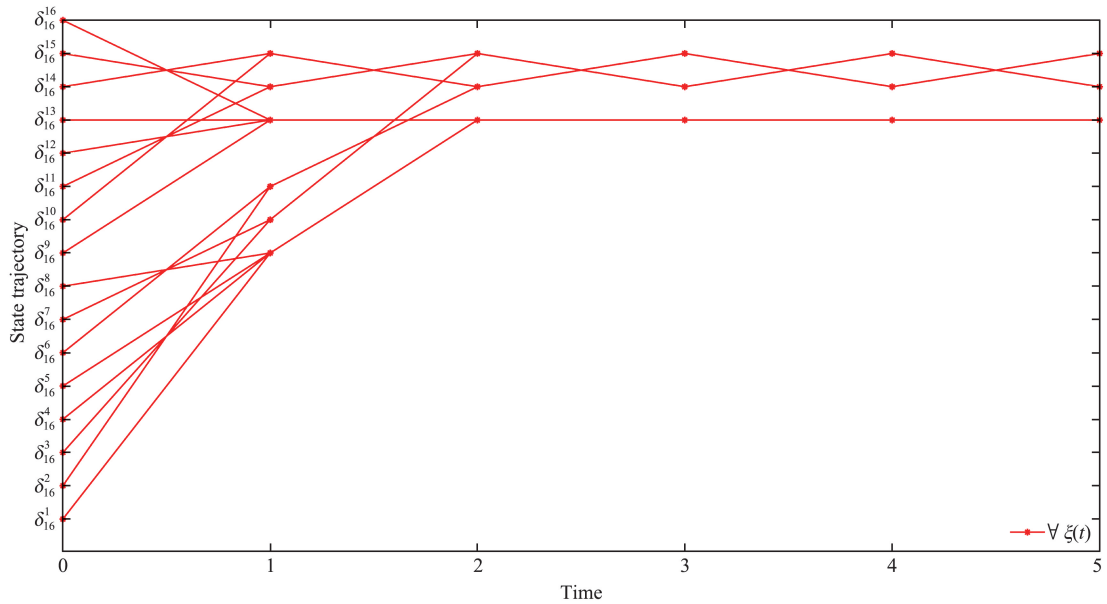


图 2 系统函数摄动后的状态轨迹

Fig. 2 The state trajectory of system after function perturbation

(2) 函数摄动之后, L_1 的第三列由 δ_4^4 变为 δ_4^2 , 也就是 $\gamma=1, \beta=3$, 可以计算得到 K_1 的第 9、10、11、12 列分别由 δ_{16}^{13} 、 δ_{16}^{15} 、 δ_{16}^{14} 、 δ_{16}^{13} 变为 δ_{16}^5 、 δ_{16}^7 、 δ_{16}^6 、 δ_{16}^5 。计算可知 $[K_2]_{5,9}=0$, $[K_2]_{7,10}=0$, $[K_2]_{6,11}=0$ 并且 $[K_2]_{5,12}=0$ 。因此状态 δ_{16}^9 、 δ_{16}^{10} 、 δ_{16}^{11} 和 δ_{16}^{12} 都不满足定理 1, 从而在函数摄动之后, 系统产生四条新路径。

记摄动点集 $\mathcal{R} = \{\delta_{16}^5, \delta_{16}^7, \delta_{16}^6\}$, 从而 $\mathcal{Q} = \{\delta_{16}^5, \delta_{16}^7, \delta_{16}^6\}$, 并且 $\mathcal{Q} \not\subseteq \mathcal{A}_\Omega$ 。根据式 (1), 可以得到状态集合 $\mathcal{T}_9$

$= \{\delta_{16}^1, \delta_{16}^4, \delta_{16}^5, \delta_{16}^8, \delta_{16}^9\}, \mathcal{R}_{10} = \{\delta_{16}^3, \delta_{16}^6, \delta_{16}^7, \delta_{16}^{10}\}, \mathcal{R}_{11} = \{\delta_{16}^2, \delta_{16}^6, \delta_{16}^7, \delta_{16}^{11}\}, \mathcal{R}_{12} = \{\delta_{16}^{12}\}$ 。考虑 $\mathcal{R}_9 = \{\delta_{16}^1, \delta_{16}^4, \delta_{16}^5, \delta_{16}^8, \delta_{16}^9\}$, 存在摄动点 $\delta_{16}^5 \in \mathcal{R}_9$ 但 $J_{\Delta_{16} \setminus \Omega}^T \text{Col}_9(\tilde{C}) \neq 0$ 。根据定理 3, 函数摄动之后, 系统的输出不可以追踪到系统的输出。

5 结语

本文研究了函数摄动对干扰布尔网络输出调节问题的影响。首先, 基于矩阵半张量积方法, 通过建立并联系统, 将输出调节问题转化为增广系统的鲁棒集合稳定性问题。其次, 通过构造一系列状态集合, 给出了系统在函数摄动之后仍然可以实现输出调节的一些判断准则。最后, 给出了一个数值例子验证得到结果的有效性。

函数摄动主要分为单比特函数摄动和多比特函数摄动, 本文主要考虑单比特函数摄动对干扰布尔网络输出调节问题的影响, 然而并没有考虑多比特函数摄动, 未来的工作可以考虑多比特函数摄动对输出调节问题的影响。

参 考 文 献

- [1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. Journal of Theoretical Biology, 1969, 22(3): 437-467.
- [2] ARNOUT G, DE MANAN H J. The use of threshold functions and Boolean-controlled network elements for macromodeling of LSI circuits[J]. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 1978, 13(3): 326-332.
- [3] SAADATPOUR A, ALBERT I, ALBERT R. Attractor analysis of asynchronous Boolean models of signal transduction networks[J]. Journal of Theoretical Biology, 2010, 266(4): 641-656.
- [4] ZHAO G D, LI H T, DUAN P Y, et al. Survey on applications of semi-tensor product method in networked evolutionary games[J]. Journal of Applied Analysis & Computation, 2020, 10(1): 32-54.
- [5] FU S H, PAN Y N, FENG J E, et al. Strategy optimisation for coupled evolutionary public good games with threshold[J]. International Journal of Control, 2022, 95(2): 562-571.
- [6] FAGIOLINI A, BICCHI A. On the robust synthesis of logical consensus algorithms for distributed intrusion detection[J]. Automatica, 2013, 49(8): 2339-2350.
- [7] LIU Y R, HO D W C, WANG Z D. A new framework for consensus for discrete-time directed networks of multi-agents with distributed delays[J]. International Journal of Control, 2012, 85(11): 1755-1765.
- [8] Qi, H S, Cheng D Z. Analysis and control of Boolean networks: A semi-tensor product approach[C]. //2009 7th Asian Control Conference. IEEE, 2009: 1352-1356.
- [9] HUANG C, LU J Q, ZHAI G S, et al. Stability and stabilization in probability of probabilistic Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 32(1): 241-251.
- [10] YANG X R, WANG S L. Robustness for stability and stabilization of Boolean networks with stochastic function perturbations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 66(3): 1231-1237.
- [11] CHENG D Z, QI H S. Controllability and observability of Boolean control networks[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1659-1667.
- [12] ZHU S Y, LU J Q, LIN L, et al. Minimum-time and minimum-triggering observability of stochastic Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 67(3): 1558-1565.
- [13] CHEN H W, LIANG J L, LU J Q. Partial synchronization of interconnected Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 47(1): 258-266.
- [14] MU T T, FENG J E, WANG B, et al. Delay synchronization of drive-response Boolean networks and Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2022, 10(2): 865-874.
- [15] XIAO Y F, DOUGHERTY E R. The impact of function perturbations in Boolean networks[J]. Bioinformatics, 2007, 23(10): 1265-1273.
- [16] WU J H, LIU Y, RUAN Q H, et al. Robust stability of switched Boolean networks with function perturbation[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2022, 46: 101216.

- [17] DENG L, FU S H, WANG J J, et al. Function perturbation impact on robust stability and stabilization of Boolean networks with disturbances[J]. IEEE Access, 2023, 11: 84514-84521.
- [18] LI L L, ZHANG A G, LU J Q. Robust set stability of probabilistic Boolean networks under general stochastic function perturbation[J]. Information Sciences, 2022, 582: 833-849.
- [19] YANG X R, LI H T. Robust controllability and stabilization of switched Boolean control networks subject to multi-bit function perturbations[J]. Information Sciences, 2023, 625: 656-672.
- [20] JULIUS A A, HALÁSZ Á, SAKAR M S, et al. Stochastic modeling and control of biological systems; the lactose regulation system of *Escherichia coli*[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(Special Issue): 51-65.
- [21] LI H T, WANG Y Z, XIE L H. Output tracking control of Boolean control networks via state feedback; constant reference signal case[J]. Automatica, 2015, 59: 54-59.
- [22] CAO X J, FU S H, LI X L, et al. Robust output tracking of Boolean networks with disturbance inputs under one-bit perturbation[C]. // 2024 14th Asian Control Conference (ASCC). IEEE, 2024: 775-780.
- [23] ZHANG Z H, LEIFELD T, ZHANG P. Finite horizon tracking control of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 63(6): 1798-1805.
- [24] LI H T, XIE L H, WANG Y Z. Output regulation of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(6): 2993-2998.
- [25] SUN Y H, FENG G, CAO J D. Robust stochastic stability analysis of genetic regulatory networks with disturbance attenuation[J]. Neurocomputing, 2012, 79: 39-49.
- [26] ZHANG X, WANG Y H, CHENG D Z. Output tracking of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 65(6): 2730-2735.
- [27] LI H T, WANG Y Z. Robust stability and stabilisation of Boolean networks with disturbance inputs[J]. International Journal of Systems Science, 2017, 48(4): 750-756.
- [28] GUO Y Q, DING Y, XIE D. Invariant subset and set stability of Boolean networks under arbitrary switching signals[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 4209-4214.
- [29] LIU Y X, FENG A N, WU H, et al. Robust set stabilization of Boolean control networks with edge removal perturbations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2025, 140: 108355.
- [30] WANG J J, FU S H, DE LEONE R, et al. On robust control invariance and robust set stabilization of mix-valued logical control networks[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(18): 10347-10357.

(责任编辑:刘庆松)