

文章编号 1672-6634(2023)04-0014-14

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2022100012

关于局中人两个子集的部分对称博弈

朱建栋,王 蕾

(南京师范大学 数学科学学院,江苏 南京 210023)

摘 要 研究了关于局中人两个子集的部分对称博弈。通过基于相邻对换的矩阵半张量积方法,首先得到了关于局中人两个子集的部分对称博弈的等价条件。利用该等价条件,计算出了该部分对称博弈子空间的维数并且构造出了它的一组基,进而导出了关于该部分对称博弈的方程数目最少的判别方程。

关键词 部分对称博弈;相邻对换;矩阵半张量积

中图分类号 O225

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



On Partially Symmetric Games with Respect to Two Subsets of Players

ZHU Jiandong, WANG Lei

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

Abstract This paper investigates partially symmetric games with respect to two subsets of players. Using the semi-tensor product method based on adjacent transpositions, the equivalent conditions of partially symmetric games with respect to two subsets of players are obtained. According to the obtained equivalent conditions, the dimension of the partially symmetric game subspace with respect to two subsets of players is calculated, and a basis of the partially symmetric game subspace is constructed. Furthermore, the discriminant equations with the minimum number for the partially symmetric game with respect to two subsets of players are derived.

Key words partially symmetric game; adjacent transposition; semi-tensor product of matrices

1 引言

博弈论是研究理性个体(称为局中人)之间策略互动的数学模型。在约翰·冯·诺伊曼证明了博弈论的基本原理之后,现代博弈论被正式建立起来^[1,2]。目前,博弈论已经被广泛地应用于许多领域,比如:经济学、生物学、金融学、计算机科学等。对称博弈的概念最早是由约翰·冯·诺伊曼提出的^[2]。对称博弈是一种特殊的博弈类型,其局中人有相同的策略集合以及公平的收益函数。例如:“囚徒困境”、“石头-剪刀-布”都是典型的对称博弈。近年来,对称博弈的研究得到了广泛关注。例如,文[3]通过对称群的线性表示,给出了对称博弈的线性表示以及等价条件,并且研究了对称博弈的内部结构。文[4]和文[5]都是通过引入策略。

收稿日期:2022-10-22

基金项目:国家自然科学基金项目(61673012)资助

通讯作者:朱建栋,男,汉,博士,教授,博士研究生导师,研究方向:控制论和博弈论,E-mail:zhujiandong@njnu.edu.cn。

多重向量的概念构造出对称博弈子空间的基。文[6]定义了三种不同的对称博弈,并且给出了这三种博弈的等价条件或者必要条件。此外,文[7]中证明了每一个对称的二策略博弈都有一个纯策略均衡点,文[8]中证明了所有玩家的收益函数为凹出数的有限对称博弈都存在一个纯策略均衡。因此,一个博弈的对称性对于其纳什均衡的存在性是非常重要的。前面提到的对称博弈的对称性是关于所有的局中人而言的,也即完全对称博弈。如果一个博弈的对称性是关于一部分的局中人而言的,那么可称之为部分对称博弈[9]。在现实生活中,公平性往往是表现在部分群体内部,不同群体之间常常展现不同层次的公平性。所以,相对于完全对称博弈,部分对称博弈是更常见的一类博弈。目前,关于部分对称博弈的研究成果非常少。据我们所知,只有文[9]进行了部分对称博弈的相关研究并且证明了部分对称博弈可保证部分对称均衡点的存在。如何判断一个博弈是否是部分对称博弈是研究部分对称博弈的首要问题。因此,本文将主要研究关于局中人的两个子集的部分对称博弈的判别。

2001年,中国科学院程代展研究员针对控制理论中的经典Morgen问题提出了一种强大的数学工具——矩阵半张量积^[10]。目前,矩阵半张量积已被广泛应用于动力系统,布尔网络以及博弈论等多个领域。例如,通过矩阵半张量积的方法,有限博弈可被表示为线性代数的形式^[11],使得关于势博弈^[12],网络演化博弈^[13],对称博弈^[3,17]和博弈空间分解^[4]等许多问题得到解决。近期,矩阵半张量积又被应用到了一个新的领域——信息物理融合系统^[18]。利用矩阵半张量积,入侵估计器的可观测动态演化方程可被转化为代数形式,使得抽象的不透明性验证问题就转化成了结构矩阵计算的问题。此外,还可通过代数条件来验证带有不可观事件的信息物理融合系统的状态不透明性。因此,矩阵半张量积的引入为解决信息物理融合系统的相关问题提供了一个新思路,使得这些问题得到了理论上的解决。本文将采用基于相邻对换的矩阵半张量积方法来研究关于局中人两个子集的部分对称博弈。研究目标是得到关于局中人两个子集的部分对称博弈的判别方程,减小验证过程的计算复杂度。相邻对换的引入是本文研究方法的一个优势,使得这一问题得以顺利解决。

首先给出关于局中人两个子集的部分对称博弈的等价条件。根据所得等价条件,计算出关于局中人两个子集的部分对称博弈子空间的维数并且构造出它的一组基。进而,导出了关于局中人两个子集的部分对称博弈的方程数目最少的判别方程。

2 预备知识

本节将给出一些符号说明以及关于矩阵半张量积和博弈的一些基本概念和性质: $D = \{0, 1\}$: 逻辑变量的值的集合; δ_k^i : 单位矩阵 I_k 的第 i 列; $\Delta_k := \{\delta_k^i : i = 1, 2, \dots, k\}$; $\delta_k[i_1 i_2 \dots i_n] := [\delta_k^{i_1} \delta_k^{i_2} \dots \delta_k^{i_n}]$; $M_{m \times n}$: 所有 $m \times n$ 的矩阵的集合; $L_{m \times n} := \{L \in M_{m \times n} \mid \text{Col}(L) \subseteq \Delta_m\}$; $\ltimes$: 矩阵的左半张量积; $\mathbf{1}_n$: 元素全为1的 n 维列向量; $\mathbf{0}_{m \times n}$: 元素全为0的 $m \times n$ 的矩阵; S_n : n 阶对称群。

定义1^[10] 设 $A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{p \times q}$, $\alpha = \text{lcm}(n, p)$ 为 n 与 p 的最小公倍数。那么, A 与 B 的半张量积定义为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{\frac{\alpha}{n}})(B \otimes I_{\frac{\alpha}{p}}), \quad (1)$$

式中 $\otimes$ 是Kronecker积。

当 $n = p$ 时,矩阵半张量积与矩阵普通乘积一致。因此,矩阵半张量积是矩阵普通乘积的推广。我们可以直接将 $A \ltimes B$ 写作 AB 。

定义2^[10] 换位矩阵 $W_{[m,n]} = (w_{ij}^{IJ})$ 是一个 $mn \times mn$ 的矩阵,定义为:它的行和列采用双索引标注。其列用 $(I, J) = (11, 12, \dots, 1n, \dots, m1, m2, \dots, mn)$ 标注,其行用 $(i, j) = (11, 21, \dots, m1, \dots, 1n, 2n, \dots, mn)$ 标注,那么,它在位置 $[(ij), (IJ)]$ 处的值为

$$w_{ij}^{IJ} = \begin{cases} 1, & I = i \text{ 且 } J = j, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

当 $m=n$ 时, 将 $W_{[n,n]}$ 简记为 $W_{[n]}$ 。

例如, 设 $m=2, n=3$, 那么换位矩阵 $W_{[2,3]}$ 可表示为

$$W_{[2,3]} = \begin{bmatrix} (11) & (12) & (13) & (21) & (22) & (23) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (11) \\ (21) \\ (12) \\ (22) \\ (13) \\ (23) \end{matrix}.$$

引理 1^[10] 换位矩阵有如下性质: $W_{[m,n]}^T = W_{[m,n]}^{-1} = W_{[n,m]}$; $W_{[pq,r]} = (W_{[p,r]} \otimes I_q)(I_p \otimes W_{[q,r]})$; $W_{[m,p]}(A \otimes B)W_{[q,n]} = B \otimes A$, 其中 $A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{p \times q}$; 设 x 和 $\tilde{x}$ 是 mn 维的列向量, 并且它们的每个元素 x_{ij} 分别采用双索引 $\text{Id}(i_1, i_2; m, n)$ 和 $\text{Id}(i_2, i_1; n, m)$ 标注。因此, $\tilde{x} = W_{[m,n]}x$ 。此外, 对任意 m 维向量 x 和 n 维向量 y , 有 $yx = W_{[m,n]}xy$ 。

根据引理 1, 我们很容易得到

$$(I_k \otimes W_{[k]})(W_{[k]} \otimes I_k)(I_k \otimes W_{[k]}) = (W_{[k]} \otimes I_k)(I_k \otimes W_{[k]})(W_{[k]} \otimes I_k). \quad (2)$$

定义 3^[14] 一个有限博弈 $G = (N, S, C)$ 由三个部分组成, 其中 (1) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 是 n 个局中人的集合; (2) $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ 是局势的集合, 其中 $S_i = \{s_1^i, s_2^i, \dots, s_{k_i}^i\}$ 是第 i 个局中人的策略集, 它表示第 i 个局中人有 k_i 个策略可供选择; (3) $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, 其中 $c_i: S \rightarrow R$ 是第 i 个局中人的收益函数。

将上述所有博弈构成的集合记为 $G_{[n, k_1, \dots, k_n]}$ 。如果对任意的 $i = 1, 2, \dots, n$, $|S_i| = k$, 可将博弈集合简记为 $G_{[n, k]}$ 。矩阵半张量积是研究博弈的一种有效工具。给定一个博弈 $G \in G_{[n, k]}$, 通过矩阵半张量积的方法, 每个策略 x_i 都可以表示成一个向量 $x_i \in \Delta_k$, 并且每个局中人的收益函数 c_i 可以表示为

$$c_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = V_i^c \times_{j=1}^n x_j, i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

式中 $\times_{j=1}^n x_j \in \Delta_{k^n}$ 被称为局势的矩阵半张量积形式, V_i^c 被称为收益函数 c_i 的结构向量。

定义 4^[9] 给定博弈 $G \in G_{[n, k]}$ 以及置换 $\sigma \in S_n$ 。如果

$$c_i(x_1, \dots, x_n) = c_{\sigma(i)}(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}), i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

那么称 G 是关于 σ 对称的。

定义 5^[9] 给定博弈 $G \in G_{[n, k]}$ 。如果对任意的置换 $\sigma \in S_n$, G 都是关于 σ 对称的, 那么我们称 G 是对称博弈。

3 于局中人两个子集的部分对称博弈

定义 6 考虑有限博弈 $G \in G_{[n, k]}$ 。设 N_1, N_2 是 N 的两个不相交的局中人子集。如果对任意满足

$$\sigma(i) \in N_1, \forall i \in N_1; \sigma(j) \in N_2, \forall j \in N_2; \sigma(l) = l, \forall l \in N \setminus (N_1 \cup N_2) \quad (5)$$

的置换 $\sigma \in S_n$, G 都关于 σ 对称, 则称 G 是关于 (N_1, N_2) 的部分对称博弈。

引理 2^[15,16] n 阶对称群 S_n 可由相邻对换生成, 即

$$S_n = \langle (i, i+1) \mid 1 \leq i \leq n-1 \rangle, \quad (6)$$

下面我们将相邻对换 $(i, i+1)$ 记为 μ_i 。

引理 3 设 $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $N_1 = \{1, 2, \dots, p\}$, $N_2 = \{p+1, p+2, \dots, q\}$,

$$S_n^{p,q} = \{\sigma \in S_n \mid \forall i \in N_1, \sigma(i) \in N_1; \forall j \in N_2, \sigma(j) \in N_2; \forall l \in N \setminus (N_1 \cup N_2), \sigma(l) = l\}, \quad (7)$$

则

$$S_n^{p,q} = \langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}, \mu_{p+1}, \mu_{p+2}, \dots, \mu_{q-1} \rangle. \quad (8)$$

证明 因为 N_1 和 N_2 是互不相交的,由引理 2 得, $S_n^{p,q} \subseteq \langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}, \mu_{p+1}, \mu_{p+2}, \dots, \mu_{q-1} \rangle$. 对任意的 $1 \leq t \leq p-1$, 相邻对换 μ_t 满足 $\mu_t(i) \in N_1, \forall i \in N_1; \mu_t(j) = j, \forall j \in N \setminus N_1$. 同样,对任意的 $p+1 \leq t \leq q-1$, 相邻对换 μ_t 满足 $\mu_t(i) \in N_2, \forall i \in N_2; \mu_t(j) = j, \forall j \in N \setminus N_2$. 因此,对任意的 $\sigma \in \langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}, \mu_{p+1}, \mu_{p+2}, \dots, \mu_{q-1} \rangle$, 有 $\sigma(i) \in N_1, \forall i \in N_1; \sigma(j) \in N_2, \forall j \in N_2; \sigma(l) = l, \forall l \in N \setminus (N_1 \cup N_2)$, 故 $\sigma \in S_n^{p,q}$. 从而, $S_n^{p,q} \supseteq \langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}, \mu_{p+1}, \mu_{p+2}, \dots, \mu_{q-1} \rangle$. 因此,

$$S_n^{p,q} = \langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}, \mu_{p+1}, \mu_{p+2}, \dots, \mu_{q-1} \rangle.$$

注 1 引理 3 的另一个证明思路是分别计算如下各个集合,然后再求交集即得(8).

$$\{\sigma \in S_n \mid \forall i \in N_1, \sigma(i) \in N_1\} = \langle \mu_1, \dots, \mu_{p-1}, \mu_{p+1}, \dots, \mu_{n-1} \rangle,$$

$$\{\sigma \in S_n \mid \forall j \in N_2, \sigma(j) \in N_2\} = \langle \mu_1, \dots, \mu_{p-1}, \mu_{p+1}, \dots, \mu_{q-1}, \mu_{q+1}, \dots, \mu_{n-1}, (p, q+1) \rangle,$$

$$\{\sigma \in S_n \mid \forall l \in N \setminus (N_1 \cup N_2), \sigma(l) = l\} = \langle \mu_1, \dots, \mu_{q-1} \rangle.$$

引理 4^[17] 考虑有限博弈 $G \in G_{[n,k]}$. 对任意的 $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, 如果 G 关于 σ_1 和 σ_2 都是对称的,那么 G 关于 $\sigma_2 \sigma_1$ 也是对称的.

定理 1 考虑有限博弈 $G \in G_{[n,k]}$. 设 $N_1 = \{1, 2, \dots, p\}$, $N_2 = \{p+1, p+2, \dots, q\}$, 则 G 是关于 (N_1, N_2) 的部分对称博弈当且仅当

$$V_i^c = V_{\mu_r(i)}^c T_{\mu_r}, \forall i \in N, r \in \{1, 2, \dots, p-1, p+1, p+2, \dots, q-1\}, \quad (9)$$

式中 $T_{\mu_r} = I_{k^{r-1}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{n-r-1}}$.

证明 必要性. 对任意的 $r \in \{1, 2, \dots, p-1, p+1, p+2, \dots, q-1\}$, 相邻对换 μ_r 都满足(5)式,故

$$c_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{\mu_r(i)}(x_{\mu_r(1)}, x_{\mu_r(2)}, \dots, x_{\mu_r(n)}), i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

由(3)式可得,

$$\begin{aligned} c_{\mu_r(i)}(x_{\mu_r(1)}, x_{\mu_r(2)}, \dots, x_{\mu_r(n)}) &= V_{\mu_r(i)}^c x_{\mu_r(1)} x_{\mu_r(2)} \cdots x_{\mu_r(n)} \\ &= V_{\mu_r(i)}^c (x_1 \cdots x_{r-1}) (x_{r+1} x_r) (x_{r+2} \cdots x_n) \\ &= V_{\mu_r(i)}^c (x_1 \cdots x_{r-1}) (W_{[k]} x_r x_{r+1}) (x_{r+2} \cdots x_n) \\ &= V_{\mu_r(i)}^c T_{\mu_r} x_1 \cdots x_n. \end{aligned} \quad (11)$$

因此, $V_i^c = V_{\mu_r(i)}^c T_{\mu_r}, \forall i \in N, r \in \{1, 2, \dots, p-1, p+1, p+2, \dots, q-1\}$.

充分性. 由(3)式和(11)式可得,对任意的 $i \in N, r \in \{1, 2, \dots, p-1, p+1, p+2, \dots, q-1\}$, $c_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{\mu_r(i)}(x_{\mu_r(1)}, x_{\mu_r(2)}, \dots, x_{\mu_r(n)})$. 根据引理 3 和引理 4 得,对任意的 $\sigma \in S_n^{p,q}$, 有 $c_i(x_1, \dots, x_n) = c_{\sigma(i)}(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}), \forall i \in N$. 因此, G 是关于 (N_1, N_2) 的部分对称博弈.

定理 2 考虑有限博弈 $G \in G_{[n,k]}$. 设 $N_1 = \{1, 2, \dots, p\}$, $N_2 = \{p+1, p+2, \dots, q\}$, 则 G 是关于 (N_1, N_2) 的部分对称博弈当且仅当

$$\begin{bmatrix} U_1 & & \\ & U_2 & \\ & & I_{n-q} \otimes B_{q+1} \end{bmatrix} V_G^T = 0, \quad (12)$$

式中

$$U_1 = \begin{bmatrix} I_{k^n} & -T_{\mu_1} & & \\ & I_{k^n} & -T_{\mu_2} & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & I_{k^n} & -T_{\mu_{p-1}} \\ & & & & B_p \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} I_{k^n} & -T_{\mu_{p+1}} & & \\ & I_{k^n} & -T_{\mu_{p+2}} & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & I_{k^n} & -T_{\mu_{q-1}} \\ & & & & B_q \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_1} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_2} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-2}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_1} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_2} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-2}} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{q+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_1} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_2} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{V}_G = [\mathbf{V}_1^c \mathbf{V}_2^c \cdots \mathbf{V}_n^c], \mathbf{T}_{\mu_r} = \mathbf{I}_{k^{r-1}} \otimes \mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{n-r-1}}. \quad (15)$$

证明 因为 $\mu_r(r) = r+1$, $\mu_r(r+1) = r$ 以及对任意的 $i \neq r, r+1$, 有 $\mu_r(i) = i$. 故条件(9)可以表述为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_r^c &= \mathbf{V}_{r+1}^c \mathbf{T}_{\mu_r}, \forall r \in \{1, 2, \dots, p-1, p+1, p+2, \dots, q-1\}; \\ \mathbf{V}_i^c &= \mathbf{V}_i^c \mathbf{T}_{\mu_r}, \forall i \in N, r \in \{1, 2, \dots, p-1, p+1, p+2, \dots, q-1\} \text{ 且 } r \neq i-1, i. \end{aligned} \quad (16)$$

上述方程可表示成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & & \\ & \mathbf{R}_2 & \\ & & \mathbf{I}_{n-q} \otimes \mathbf{B}_{q+1} \end{bmatrix} (\mathbf{V}_G)^T = 0, \quad (17)$$

式中

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_1} & & & & \\ & \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} & \\ \mathbf{B}_1 & & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & & \\ & & \mathbf{B}_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{B}_p \end{bmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} & & & & \\ & \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} & \\ \mathbf{B}_{p+1} & & & & \\ & \mathbf{B}_{p+2} & & & \\ & & \mathbf{B}_{p+3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{B}_q \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_2} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_3} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_3} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_4} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_1} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{r-2}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{r+1}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix} \quad (3 \leq r \leq p-2),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{p-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_1} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_2} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-3}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{p+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_1} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_2} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+3}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{p+2} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_1} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_2} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+3}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+4}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}_s &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_1} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_2} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{s-2}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{s+1}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix} \quad (p+3 \leq s \leq q-2), \mathbf{B}_{q-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_1} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_2} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k^n} - \mathbf{T}_{\mu_{q-3}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

对方程(17)的系数矩阵进行初等行变换,可得到方程(17)的等价方程

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{R}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{R}}_2 \\ \mathbf{I}_{n-q} \otimes \mathbf{B}_{q+1} \end{bmatrix} (\mathbf{V}_G)^T = 0, \quad (19)$$

式中

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{R}}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} & -\mathbf{T}_{\mu_1} & & & \\ & \mathbf{I}_{k^n} & -\mathbf{T}_{\mu_2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{I}_{k^n} & -\mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ & & & & \widetilde{\mathbf{B}}_p \\ & & & & \mathbf{B}_p \end{bmatrix}, \widetilde{\mathbf{R}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} & -\mathbf{T}_{\mu_{p+1}} & & & \\ & \mathbf{I}_{k^n} & -\mathbf{T}_{\mu_{p+2}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{I}_{k^n} & -\mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \\ & & & & \widetilde{\mathbf{B}}_q \\ & & & & \mathbf{B}_q \end{bmatrix}, \quad (20) \\
\widetilde{\mathbf{B}}_p &= - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{B}_{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} & -\mathbf{T}_{\mu_1} & & \\ & \mathbf{I}_{k^n} & \ddots & \\ & & \ddots & -\mathbf{T}_{\mu_{p-2}} \\ & & & \mathbf{I}_{k^n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{T}_{\mu_1} \mathbf{T}_{\mu_2} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{T}_{\mu_2} \mathbf{T}_{\mu_3} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{p-2} \mathbf{T}_{\mu_{p-2}} \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{B}_{p-1} \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_q = - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{p+1} & & & \\ & \mathbf{B}_{p+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{B}_{q-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k^n} & -\mathbf{T}_{\mu_{p+1}} & & \\ & \mathbf{I}_{k^{p+2}} & \ddots & \\ & & \ddots & -\mathbf{T}_{\mu_{q-2}} \\ & & & \mathbf{I}_{k^n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{p+1} \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \\ \mathbf{B}_{p+2} \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \mathbf{T}_{\mu_{p+3}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{q-1} \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix}.$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{I}_{q-3} \otimes (\mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_2} \mathbf{T}_{\mu_1}), \mathbf{F}_r = \mathbf{I}_{q-4} \otimes (\mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{r+1}} \mathbf{T}_{\mu_r}), \forall 2 \leq r \leq p-1, \\ \mathbf{F}_{p+1} &= \mathbf{I}_{q-3} \otimes (\mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \mathbf{T}_{\mu_{p+1}}), \mathbf{F}_s = \mathbf{I}_{q-4} \otimes (\mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{s+1}} \mathbf{T}_{\mu_s}), \forall p+2 \leq s \leq q-1. \end{aligned} \quad (21)$$

对 $\tilde{\mathbf{B}}_p, \tilde{\mathbf{B}}_q$ 进行初等行变换,得

$$\hat{\mathbf{B}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{T}_{\mu_1} \mathbf{T}_{\mu_2} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{F}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{T}_{\mu_2} \mathbf{T}_{\mu_3} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{p-2} \mathbf{B}_{p-2} \mathbf{T}_{\mu_{p-2}} \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \\ \mathbf{F}_{p-1} \mathbf{B}_{p-1} \mathbf{T}_{\mu_{p-1}} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{B}}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{p+1} \mathbf{B}_{p+1} \mathbf{T}_{\mu_{p+1}} \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \\ \mathbf{F}_{p+2} \mathbf{B}_{p+2} \mathbf{T}_{\mu_{p+2}} \mathbf{T}_{\mu_{p+3}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{q-2} \mathbf{B}_{q-2} \mathbf{T}_{\mu_{q-2}} \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \\ \mathbf{F}_{q-1} \mathbf{B}_{q-1} \mathbf{T}_{\mu_{q-1}} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

由交换矩阵 $\mathbf{W}_{[k]}$ 的性质得,对任意的 $1 \leq i, j \leq n-1$, 且 $i+2 \leq j$,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\mu_i} \mathbf{T}_{\mu_j} &= (\mathbf{I}_{k^{i-1}} \otimes \mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{n-i-1}}) (\mathbf{I}_{k^{j-1}} \otimes \mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{n-j-1}}) \\ &= \mathbf{I}_{k^{i-1}} \otimes (\mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{j-i-2}} \otimes \mathbf{W}_{[k]}) \otimes \mathbf{I}_{k^{n-j-1}} \\ &= (\mathbf{I}_{k^{j-1}} \otimes \mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{n-j-1}}) (\mathbf{I}_{k^{i-1}} \otimes \mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{n-i-1}}) \\ &= \mathbf{T}_{\mu_j} \mathbf{T}_{\mu_i}, \end{aligned}$$

对任意的 $1 \leq i \leq n-2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\mu_i} \mathbf{T}_{\mu_{i+1}} \mathbf{T}_{\mu_i} &= (\mathbf{I}_{k^{i-1}} \otimes \mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{n-i-1}}) (\mathbf{I}_{k^i} \otimes \mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{n-i-2}}) (\mathbf{I}_{k^{i-1}} \otimes \mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{n-i-1}}) \\ &= \mathbf{I}_{k^{i-1}} \otimes [(\mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_k) (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{W}_{[k]}) (\mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_k)] \otimes \mathbf{I}_{k^{n-j-1}} \\ &= \mathbf{I}_{k^{i-1}} \otimes [(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{W}_{[k]}) (\mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_k) (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{W}_{[k]})] \otimes \mathbf{I}_{k^{n-j-1}} \\ &= (\mathbf{I}_{k^i} \otimes \mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{n-i-2}}) (\mathbf{I}_{k^{i-1}} \otimes \mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{n-i-1}}) (\mathbf{I}_{k^i} \otimes \mathbf{W}_{[k]} \otimes \mathbf{I}_{k^{n-i-2}}) \\ &= \mathbf{T}_{\mu_{i+1}} \mathbf{T}_{\mu_i} \mathbf{T}_{\mu_{i+1}}. \end{aligned}$$

因此,对任意的 $1 \leq i \leq r-2$ 或 $s+1 \leq i \leq n$, $\mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{r+1}} \mathbf{T}_{\mu_r} \mathbf{T}_{\mu_i} \mathbf{T}_{\mu_r} \mathbf{T}_{\mu_{r+1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{s-1}}$
 $= \mathbf{T}_{\mu_i} \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{r+1}} \mathbf{T}_{\mu_r} \mathbf{T}_{\mu_r} \mathbf{T}_{\mu_{r+1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} = \mathbf{T}_{\mu_i}$, 对任意的 $r+1 \leq i \leq s-1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{r+1}} \mathbf{T}_{\mu_r} \mathbf{T}_{\mu_i} \mathbf{T}_{\mu_r} \mathbf{T}_{\mu_{r+1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} &= \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{i-1}} (\mathbf{T}_{\mu_{i-2}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_r} \mathbf{T}_{\mu_i} \mathbf{T}_{\mu_r} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{i-2}}) \mathbf{T}_{\mu_{i-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \\ &= \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{i-1}} \mathbf{T}_{\mu_i} \mathbf{T}_{\mu_{i-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \\ &= \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_i} (\mathbf{T}_{\mu_i} \mathbf{T}_{\mu_{i-1}} \mathbf{T}_{\mu_i}) \mathbf{T}_{\mu_i} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \\ &= \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{i+1}} \mathbf{T}_{\mu_{i-1}} \mathbf{T}_{\mu_{i+1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \\ &= \mathbf{T}_{\mu_{i-1}}. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{r+1}} \mathbf{T}_{\mu_r} \mathbf{T}_{\mu_i} \mathbf{T}_{\mu_r} \mathbf{T}_{\mu_{r+1}} \cdots \mathbf{T}_{\mu_{s-1}} = \begin{cases} \mathbf{T}_{\mu_i} & \forall 1 \leq i \leq r-2 \text{ 或 } s+1 \leq i \leq n, \\ \mathbf{T}_{\mu_{i-1}} & \forall r+1 \leq i \leq s-1. \end{cases} \quad (23)$$

因此,方程(19)等价于方程(12)。

给定两个不相交的局中人子集 N_1, N_2 , 将关于 (N_1, N_2) 的部分对称博弈子空间记为 $S_{[n;k]}^{(N_1, N_2)}$ 。如何确定 $S_{[n;k]}^{(N_1, N_2)}$ 的维数和基是我们将要解决的问题。由方程(12)可知,解决这个问题的关键是求解如下三个齐次线性方程组 $\mathbf{B}_p \mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{B}_q \mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{B}_{q+1} \mathbf{x} = \mathbf{0}$, 其中

$$B_p = \begin{bmatrix} I_{k^n} - T^{\mu_1} \\ I_{k^n} - T^{\mu_2} \\ \vdots \\ I_{k^n} - T^{\mu_{p-2}} \\ I_{k^n} - T^{\mu_{p+1}} \\ I_{k^n} - T^{\mu_{p+2}} \\ \vdots \\ I_{k^n} - T^{\mu_{q-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{k^q} - W_{[k]} \otimes I_{k^{q-2}} \\ I_{k^q} - I_k \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{p-3}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p+1}} \\ I_{k^q} - I_{k^p} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-2}} \\ I_{k^q} - I_{k^{p+1}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{q-2}} \otimes W_{[k]} \end{bmatrix} \otimes I_{k^{n-q}}, \quad (24)$$

$$B_q = \begin{bmatrix} I_{k^n} - T^{\mu_1} \\ I_{k^n} - T^{\mu_2} \\ \vdots \\ I_{k^n} - T^{\mu_{p-1}} \\ I_{k^n} - T^{\mu_{p+1}} \\ I_{k^n} - T^{\mu_{p+2}} \\ \vdots \\ I_{k^n} - T^{\mu_{q-2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{k^q} - W_{[k]} \otimes I_{k^{q-2}} \\ I_{k^q} - I_k \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{p-2}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p}} \\ I_{k^q} - I_{k^p} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-2}} \\ I_{k^q} - I_{k^{p+1}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{q-3}} \otimes W_{[k]} \otimes I_k \end{bmatrix} \otimes I_{k^{n-q}}, \quad (25)$$

$$B_{q+1} = \begin{bmatrix} I_{k^n} - T^{\mu_1} \\ I_{k^n} - T^{\mu_2} \\ \vdots \\ I_{k^n} - T^{\mu_{p-1}} \\ I_{k^n} - T^{\mu_{p+1}} \\ I_{k^n} - T^{\mu_{p+2}} \\ \vdots \\ I_{k^n} - T^{\mu_{q-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{k^q} - W_{[k]} \otimes I_{k^{q-2}} \\ I_{k^q} - I_k \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{p-2}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p}} \\ I_{k^q} - I_{k^p} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-2}} \\ I_{k^q} - I_{k^{p+1}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{q-2}} \otimes W_{[k]} \end{bmatrix} \otimes I_{k^{n-q}}. \quad (26)$$

令

$$A = \begin{bmatrix} I_{k^q} - W_{[k]} \otimes I_{k^{q-2}} \\ I_{k^q} - I_k \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{p-3}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p+1}} \\ I_{k^q} - I_{k^p} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-2}} \\ I_{k^q} - I_{k^{p+1}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{q-2}} \otimes W_{[k]} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} I_{k^q} - W_{[k]} \otimes I_{k^{q-2}} \\ I_{k^q} - I_k \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{p-2}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p}} \\ I_{k^q} - I_{k^p} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-2}} \\ I_{k^q} - I_{k^{p+1}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{q-3}} \otimes W_{[k]} \otimes I_k \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} I_{k^q} - W_{[k]} \otimes I_{k^{q-2}} \\ I_{k^q} - I_k \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{p-2}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p}} \\ I_{k^q} - I_{k^p} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-2}} \\ I_{k^q} - I_{k^{p+1}} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{q-p-3}} \\ \vdots \\ I_{k^q} - I_{k^{q-2}} \otimes W_{[k]} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

那么

$$B_p = A \otimes I_{k^{n-q}}, B_q = B \otimes I_{k^{n-q}}, B_{q+1} = C \otimes I_{k^{n-q}}. \quad (28)$$

引理 5 线性方程组 $Cx = 0$ 的解空间的维数为 $C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-1}^{q-p}$ 。对每个可重复的组合 $c_1 c_2 \cdots c_s (1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_s \leq k)$, 令 $P_{c_1 c_2 \cdots c_s}$ 为 $c_1 c_2 \cdots c_s$ 的所有可重复的排列的集合。定义 k^q 维的向量

$$\eta^{c_1 c_2 \cdots c_s} = x = (x_{1 \cdots 11}, \cdots, x_{1 \cdots 1k}, x_{1 \cdots 21}, \cdots, x_{1 \cdots 2k}, \cdots, x_{k \cdots k1}, \cdots, x_{k \cdots kk})^T, \quad (29)$$

其中 $x_{l_1 l_2 \dots l_q} = \begin{cases} 1, l_1 l_2 \dots l_p \in P_{c_1 c_2 \dots c_p} \text{ 且 } l_{p+1} l_{p+2} \dots l_q \in P_{c_{p+1} c_{p+2} \dots c_q}, \\ 0, \text{其它}, \end{cases}$ 则 $\{\eta^{c_1 c_2 \dots c_q} \mid 1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p$

$\leq k, 1 \leq c_{p+1} \leq c_{p+2} \leq \dots \leq c_q \leq k\}$ 是线性方程组 $Cx = 0$ 的解空间 $X_{p,q}$ 的一组基。

证明 根据换位矩阵的性质, 向量 x 是 $Cx = 0$ 的解当且仅当

$$x_{l_1 l_2 \dots l_q} = x_{\mu_r(l_1 l_2 \dots l_q)}, \forall r = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, q-1, \forall 1 \leq l_1, l_2, \dots, l_q \leq k. \quad (30)$$

显然, (30) 等价于

$$x_{l_1 l_2 \dots l_q} = x_{\tau(l_1 l_2 \dots l_q)}, \forall \tau \in S_q^{p,q}, \forall 1 \leq l_1, l_2, \dots, l_q \leq k. \quad (31)$$

因此, $Cx = 0$ 的所有的自由变量为

$$x_{l_1 l_2 \dots l_q}, 1 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_p \leq k, 1 \leq l_{p+1} \leq l_{p+2} \leq \dots \leq l_q \leq k. \quad (32)$$

自由变量的总个数为 $C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-1}^{q-p}$ 。因此, 线性方程组 $Cx = 0$ 的解空间的维数为 $C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-1}^{q-p}$, 并且 $\{\eta^{c_1 c_2 \dots c_q} \mid 1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq k, 1 \leq c_{p+1} \leq c_{p+2} \leq \dots \leq c_q \leq k\}$ 是齐次线性方程组 $Cx = 0$ 的解空间的一组基。

由引理 5, 可以直接得到如下两个引理。

引理 6 线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间的维数为 $kC_{k+p-2}^{p-1} C_{k+q-p-1}^{q-p}$ 。定义 k^q 维的向量

$$\xi^{c_1 c_2 \dots c_q} = y = (y_{1 \dots 11}, \dots, y_{1 \dots 1k}, y_{1 \dots 21}, \dots, y_{1 \dots 2k}, \dots, y_{k \dots k1}, \dots, y_{k \dots kk})^T, \quad (33)$$

式中 $y_{l_1 l_2 \dots l_q} = \begin{cases} 1, l_1 l_2 \dots l_{p-1} \in P_{c_1 c_2 \dots c_{p-1}}, l_p = c_p, l_{p+1} l_{p+2} \dots l_q \in P_{c_{p+1} c_{p+2} \dots c_q}, \\ 0, \text{其它}, \end{cases}$ 则 $\{\xi^{c_1 c_2 \dots c_q} \mid 1 \leq c_1 \leq c_2 \leq$

$\dots \leq c_{p-1} \leq k, 1 \leq c_p \leq k, 1 \leq c_{p+1} \leq c_{p+2} \leq \dots \leq c_q \leq k\}$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间 $Y_{p,q}$ 的一组基。

引理 7 线性方程组 $Bx = 0$ 的解空间的维数为 $kC_{k+p-1}^p C_{k+q-p-2}^{q-1}$ 。定义 k^q 维的向量

$$\zeta^{c_1 c_2 \dots c_q} = z = (z_{1 \dots 11}, \dots, z_{1 \dots 1k}, z_{1 \dots 21}, \dots, z_{1 \dots 2k}, \dots, z_{k \dots k1}, \dots, z_{k \dots kk})^T, \quad (34)$$

式中 $z_{l_1 l_2 \dots l_q} = \begin{cases} 1, l_1 l_2 \dots l_p \in P_{c_1 c_2 \dots c_p}, l_{p+1} l_{p+2} \dots l_{q-1} \in P_{c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{q-1}}, l_q = c_q, \\ 0, \text{其它}, \end{cases}$ 则 $\{\zeta^{c_1 c_2 \dots c_q} \mid 1 \leq c_1 \leq c_2 \leq$

$\dots \leq c_p \leq k, 1 \leq c_{p+1} \leq c_{p+2} \leq \dots \leq c_{q-1} \leq k, 1 \leq c_q \leq k\}$ 是线性方程组 $Bx = 0$ 的解空间 $Z_{p,q}$ 的一组基,

记 M_W 为以子空间 W 的一组基作为列所构成的矩阵。

引理 8 对任意满足 $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq k, 1 \leq c_{p+1} \leq c_{p+2} \leq \dots \leq c_q \leq k$ 并且 $c_1 = c_2 = \dots = c_p$ 和 $c_{p+1} = c_{p+2} = \dots = c_q$ 不同时成立的排列 $c_1 c_2 \dots c_q$, 我们定义 $|P_{c_1 c_2 \dots c_p}||P_{c_{p+1} c_{p+2} \dots c_q}| - 1$ 个向量

$\alpha_{c_1 c_2 \dots c_q}^{l_1 l_2 \dots l_q} = x (l_1 l_2 \dots l_p \in P_{c_1 c_2 \dots c_p}, l_{p+1} l_{p+2} \dots l_q \in P_{c_{p+1} c_{p+2} \dots c_q}, l_1 l_2 \dots l_q \neq c_1 c_2 \dots c_q)$, 其中

$$x_{l_1 l_2 \dots l_q} = \begin{cases} 1, t_1 t_2 \dots t_q = c_1 c_2 \dots c_q, \\ -1, t_1 t_2 \dots t_q = l_1 l_2 \dots l_q, \\ 0, \text{其它}. \end{cases}$$

那么所有 $\alpha_{c_1 c_2 \dots c_q}^{l_1 l_2 \dots l_q}$ 构成了 $X_{p,q}$ 的正交补空间 $X_{p,q}^\perp$ 的一组基。此外, 线性系统 $Cx = 0$ 等价于 $M_{X_{p,q}}^\top x = 0$ 。

证明 根据等价条件(31)以及自由变量(32), $\{\eta^{c_1 c_2 \dots c_q} \mid 1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq k, 1 \leq c_{p+1} \leq c_{p+2} \leq \dots \leq c_q \leq k\}$ 是 $X_{p,q}$ 的一组基。根据 $\alpha_{c_1 c_2 \dots c_q}^{l_1 l_2 \dots l_q}$ 的构造方法, 可直接得到每个 $\alpha_{c_1 c_2 \dots c_q}^{l_1 l_2 \dots l_q}$ 都正交于 $X_{p,q}$ 。此外, $\alpha_{c_1 c_2 \dots c_q}^{l_1 l_2 \dots l_q}$ 的总数为

$$\sum_{1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq k, 1 \leq c_{p+1} \leq c_{p+2} \leq \dots \leq c_q \leq k} (|P_{c_1 c_2 \dots c_p}| \cdot |P_{c_{p+1} c_{p+2} \dots c_q}| - 1) = k^q - C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-1}^{q-p} = k^q - \dim(X_{p,q}).$$

因此, 所有的 $\alpha_{c_1 c_2 \dots c_q}^{l_1 l_2 \dots l_q}$ 构成了 $X_{p,q}^\perp$ 的一组基。

由引理 8, 可以直接得到如下两个引理。

引理 9 对任意满足 $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{p-1} \leq k, 1 \leq c_p \leq k, 1 \leq c_{p+1} \leq c_{p+2} \leq \dots \leq c_q \leq k$ 并且

$c_1 = c_2 = \cdots = c_{p-1}$ 和 $c_{p+1} = c_{p+2} = \cdots = c_q$ 不同时成立的排列 $c_1 c_2 \cdots c_q$, 定义 $|P_{c_1 c_2 \cdots c_{p-1}}| |P_{c_{p+1} c_{p+2} \cdots c_q}| - 1$ 个向量 $\beta_{c_1 c_2 \cdots c_q}^{l_1 l_2 \cdots l_q} = y$ ($l_1 l_2 \cdots l_{p-1} \in P_{c_1 c_2 \cdots c_{p-1}}, l_p = c_p, l_{p+1} l_{p+2} \cdots l_q \in P_{c_{p+1} c_{p+2} \cdots c_q}, l_1 l_2 \cdots l_q \neq c_1 c_2 \cdots c_q$), 其中

$$y_{l_1 l_2 \cdots l_q} = \begin{cases} 1, t_1 t_2 \cdots t_q = c_1 c_2 \cdots c_q, \\ -1, t_1 t_2 \cdots t_q = l_1 l_2 \cdots l_q, \\ 0, \text{其它}, \end{cases}$$

那么所有的 $\beta_{c_1 c_2 \cdots c_q}^{l_1 l_2 \cdots l_q}$ 构成了 $Y_{p,q}$ 的正交补空间 $Y_{p,q}^\perp$ 的一组基。此外, 线性系统 $Ax = 0$ 等价于 $M_{Y_{p,q}}^\top x = 0$ 。

引理 10 对任意满足 $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_p \leq k, 1 \leq c_{p+1} \leq c_{p+2} \leq \cdots \leq c_{q-1} \leq k, 1 \leq c_q \leq k$ 并且 $c_1 = c_2 = \cdots = c_p$ 和 $c_{p+1} = c_{p+2} = \cdots = c_{q-1}$ 不同时成立的排列 $c_1 c_2 \cdots c_q$, 定义 $|P_{c_1 c_2 \cdots c_p}| |P_{c_{p+1} c_{p+2} \cdots c_{q-1}}| - 1$ 个向量 $\gamma_{c_1 c_2 \cdots c_q}^{l_1 l_2 \cdots l_q} = z$ ($l_1 l_2 \cdots l_p \in P_{c_1 c_2 \cdots c_p}, l_{p+1} l_{p+2} \cdots l_{q-1} \in P_{c_{p+1} c_{p+2} \cdots c_{q-1}}, l_q = c_q, l_1 l_2 \cdots l_q \neq c_1 c_2 \cdots c_q$), 其中

$$z_{l_1 l_2 \cdots l_q} = \begin{cases} 1, t_1 t_2 \cdots t_q = c_1 c_2 \cdots c_q, \\ -1, t_1 t_2 \cdots t_q = l_1 l_2 \cdots l_q, \\ 0, \text{其它}, \end{cases}$$

那么所有的 $\gamma_{c_1 c_2 \cdots c_q}^{l_1 l_2 \cdots l_q}$ 构成了 $Z_{p,q}$ 的正交补空间 $Z_{p,q}^\perp$ 的一组基。此外, 线性系统 $Bx = 0$ 等价于 $M_{Z_{p,q}}^\top x = 0$ 。

定理 3 考虑有限博弈 $G \in G_{[n,k]}$ 。设 $N_1 = \{1, 2, \cdots, p\}$, $N_2 = \{p+1, p+2, \cdots, q\}$ 。则 $S_{[n,k]}^{(N_1, N_2)}$ 的维数为 $k^{n-q+1} C_{k+p-2}^{p-1} C_{k+q-p-1}^{q-p} + k^{n-q+1} C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-2}^{q-p-1} + (n-q) k^{n-q} C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-1}^{q-p}$ 。

如下 $nk^n \times (k^{n-q+1} C_{k+p-2}^{p-1} C_{k+q-p-1}^{q-p} + k^{n-q+1} C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-2}^{q-p-1} + (n-q) k^{n-q} C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-1}^{q-p})$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} (W_{[k^{p-1}, k]} \otimes I_{k^{n-p}}) (M_{Y_{p,q}} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ (I_k \otimes W_{[k^{p-2}, k]} \otimes I_{k^{n-p}}) (M_{Y_{p,q}} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ (I_k^2 \otimes W_{[k^{p-3}, k]} \otimes I_{k^{n-p}}) (M_{Y_{p,q}} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ \vdots \\ (I_k^{p-2} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{n-p}}) (M_{Y_{p,q}} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ M_{Y_{p,q}} \otimes I_{k^{n-q}} \\ (I_k^p \otimes W_{[k^{q-p-1}, k]} \otimes I_{k^{n-q}}) (M_{Z_{p,q}} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ (I_k^{p+1} \otimes W_{[k^{q-p-2}, k]} \otimes I_{k^{n-q}}) (M_{Z_{p,q}} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ (I_k^{p+2} \otimes W_{[k^{q-p-3}, k]} \otimes I_{k^{n-q}}) (M_{Z_{p,q}} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ \vdots \\ (I_k^{q-2} \otimes W_{[k]} \otimes I_{k^{n-q}}) (M_{Z_{p,q}} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ M_{Z_{p,q}} \otimes I_{k^{n-q}} \\ I_{n-q} \otimes M_{X_{p,q}} \otimes I_{k^{n-q}} \end{bmatrix} \quad (35)$$

的列构成了 $S_{[n,k]}^{(N_1, N_2)}$ 的一组基。此外, 关于 (N_1, N_2) 的部分对称博弈的方程数目最少的判别方程为

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ I_{n-q} \otimes M_{X_{p,q}}^\top \otimes I_{k^{n-q}} \end{bmatrix} V_G^\top = 0, \quad (36)$$

式中

$$W_1 = \begin{bmatrix} I_k^n & -T_{\mu_1} & & & \\ & I_k^n & -T_{\mu_2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I_k^n & -T_{\mu_{p-1}} \\ & & & & M_{Y_{p,q}}^\top \otimes I_{k^{n-q}} \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} I_k^n & -T_{\mu_{p+1}} & & & \\ & I_k^n & -T_{\mu_{p+2}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I_k^n & -T_{\mu_{q-1}} \\ & & & & M_{Z_{p,q}}^\top \otimes I_{k^{n-q}} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

证明 根据定理 2 的(12)式, $S_{[n,k]}^{(N_1, N_2)}$ 的一组基可以通过解如下三个方程

$$B_p x = 0, \quad (38)$$

$$B_q x = 0, \quad (39)$$

$$B_{q+1} x = 0, \quad (40)$$

得到。由引理 5 以及(24)式可得, 方程(40)的解空间的维数为 $k^{n-q} C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-1}^{q-p}$ 。同理可得, 方程(38)和(39)的解空间的维数分别为 $k^{n-q+1} C_{k+p-2}^{p-1} C_{k+q-p-1}^{q-p}$, $k^{n-q+1} C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-2}^{q-p-1}$ 。因此, 由(12)式可得, $S_{[n,k]}^{(N_1, N_2)}$ 的维数为 $k^{n-q+1} C_{k+p-2}^{p-1} C_{k+q-p-1}^{q-p} + k^{n-q+1} C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-2}^{q-p-1} + (n-q) k^{n-q} C_{k+p-1}^p C_{k+q-p-1}^{q-p}$ 。此外, 矩阵

$$\begin{bmatrix} T_{\mu_1} T_{\mu_2} \cdots T_{\mu_{p-1}} (M_{Y,p,q} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ T_{\mu_2} T_{\mu_3} \cdots T_{\mu_{p-1}} (M_{Y,p,q} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ T_{\mu_3} T_{\mu_4} \cdots T_{\mu_{p-1}} (M_{Y,p,q} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ \vdots \\ T_{\mu_{p-1}} (M_{Y,p,q} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ M_{Y,p,q} \otimes I_{k^{n-q}} \\ \\ T_{\mu_{p+1}} T_{\mu_{p+2}} \cdots T_{\mu_{q-1}} (M_{Z,p,q} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ T_{\mu_{p+2}} T_{\mu_{p+3}} \cdots T_{\mu_{q-1}} (M_{Z,p,q} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ T_{\mu_{p+3}} T_{\mu_{p+4}} \cdots T_{\mu_{q-1}} (M_{Z,p,q} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ \vdots \\ T_{\mu_{q-1}} (M_{Z,p,q} \otimes I_{k^{n-q}}) \\ M_{Z,p,q} \otimes I_{k^{n-q}} \\ \\ I_{n-q} \otimes M_{X,p,q} \otimes I_{k^{n-q}} \end{bmatrix} \quad (41)$$

的列是 $S_{[n,k]}^{(N_1, N_2)}$ 的一组基。根据引理 1, 知道(41)即是(35)。再由引理 8-10, 得(36)等价于(12)。由于(36)的系数矩阵是行满秩的, 故(36)式是关于 (N_1, N_2) 的部分对称博弈的方程数目最少的判别方程。

注 1 在定义 6 中, N_1, N_2 是 N 的任意两个互不相交的子集。然而, 在定理 2 和定理 3 中, 我们不失一般性地假设 $N_1 = \{1, 2, \dots, p\}$, $N_2 = \{p+1, p+2, \dots, q\}$ 。事实上, 设 $\widetilde{N}_1 = \{l_1, l_2, \dots, l_p\}$, $\widetilde{N}_2 = \{l_{p+1}, l_{p+2}, \dots, l_q\}$, $N \setminus (\widetilde{N}_1 \cup \widetilde{N}_2) = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-q}\}$, 我们可以构造一个置换矩阵 $H = \delta_n[l_1 l_2 \cdots l_q t_1 t_2 \cdots t_{n-q}]$ 。那么,

$$[V_{i_1}^c V_{i_2}^c \cdots V_{i_q}^c V_{t_1}^c V_{t_2}^c \cdots V_{t_{n-q}}^c] = [V_1^c V_2^c \cdots V_n^c] H = V_G H. \quad (42)$$

令 $c_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = V_i^c x_1 x_2 \cdots x_n = \widetilde{V}_i^c x_{l_1} \cdots x_{l_q} x_{t_1} \cdots x_{t_{n-q}}$ 。根据矩阵半张量积的性质, 存在置换矩阵 Q 使得 $x_1 x_2 \cdots x_n = Q x_{l_1} \cdots x_{l_q} x_{t_1} \cdots x_{t_{n-q}}$ 。因此, $\widetilde{V}_i^c = V_i^c Q$ 。

$$\begin{bmatrix} (\widetilde{V}_{i_1}^c)^T \\ \vdots \\ (\widetilde{V}_{i_q}^c)^T \\ (\widetilde{V}_{t_1}^c)^T \\ \vdots \\ (\widetilde{V}_{t_{n-q}}^c)^T \end{bmatrix} = H^T \begin{bmatrix} (\widetilde{V}_1^c)^T \\ (\widetilde{V}_2^c)^T \\ \vdots \\ (\widetilde{V}_n^c)^T \end{bmatrix} = H^T \begin{bmatrix} Q^T (V_1^c)^T \\ Q^T (V_2^c)^T \\ \vdots \\ Q^T (V_n^c)^T \end{bmatrix} = H^T (I_n \otimes Q^T) (V_G)^T. \quad (43)$$

因此,用 $H^T(I_n \otimes Q^T)(V_G)^T$ 替换定理2和定理3中的 $(V_G)^T$ 即可得到关于 $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$ 的部分对称博弈的结论。将(35)式的矩阵记为矩阵 D , 那么 $(I_n \otimes Q)HD$ 的列构成 $S_{[n,k]}^{(N_1, N_2)}$ 的一组基。

4 例子

考虑关于 (N_1, N_2) 的部分对称博弈子空间 $S_{[5,b]}^{(N_1, N_2)}$, 其中 $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3, 4\}$ 。根据定理3, 矩阵

$$\begin{bmatrix} (W_{[2]} \otimes I_8)(M_{Y_{2,4}} \otimes I_2) \\ M_{Y_{2,4}} \otimes I_2 \\ (I_4 \otimes W_{[2]} \otimes I_2)(M_{Z_{2,4}} \otimes I_2) \\ M_{Z_{2,4}} \otimes I_2 \\ M_{X_{2,4}} \otimes I_2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

的列为 $S_{[5,b]}^{(N_1, N_2)}$ 的一组基。此外, 方程组

$$\begin{bmatrix} I_{32} & -W_{[2]} \otimes I_8 \\ M_{Y_{2,4}}^T \otimes I_2 \\ I_{32} & -I_4 \otimes W_{[2]} \otimes I_2 \\ M_{Z_{2,4}}^T \otimes I_2 \\ M_{X_{2,4}}^T \otimes I_2 \end{bmatrix} (V_G)^T = 0 \quad (45)$$

是关于 (N_1, N_2) 的部分对称博弈的方程数目最少的判别方程, 其中

$$W_{[2]} = \delta_4[1324], \quad (46)$$

$$M_{X_{2,4}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{X_{2,4}}^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1111) \\ (1112) \\ (1121) \\ (1122) \\ (1211) \\ (1212) \\ (1221) \\ (1222) \\ (2111) \\ (2112) \\ (2121) \\ (2122) \\ (2211) \\ (2212) \\ (2221) \\ (2222) \end{matrix}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{Y_{2,4}} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{Y_{2,4}}^{\perp} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1111) \\ (1112) \\ (1121) \\ (1122) \\ (1211) \\ (1212) \\ (1221) \\ (1222) \\ (2111) \\ (2112) \\ (2121) \\ (2122) \\ (2211) \\ (2212) \\ (2221) \\ (2222) \end{matrix}, \quad (48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{Z_{2,4}} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{Z_{2,4}}^{\perp} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1111) \\ (1112) \\ (1121) \\ (1122) \\ (1211) \\ (1212) \\ (1221) \\ (1222) \\ (2111) \\ (2112) \\ (2121) \\ (2122) \\ (2211) \\ (2212) \\ (2221) \\ (2222) \end{matrix}. \quad (49)
\end{aligned}$$

假设 $\widetilde{N}_1 = \{2, 3\}$, $\widetilde{N}_2 = \{1, 5\}$ 。令 $\mathbf{H} = \delta_5[23154]$, $\mathbf{Q} = \mathbf{W}_{[4,2]}(\mathbf{I}_8 \otimes \mathbf{W}_{[2]})$ 。矩阵

$$(\mathbf{I}_5 \otimes \mathbf{Q}) \mathbf{H} \begin{bmatrix} (\mathbf{W}_{[2]} \otimes \mathbf{I}_8) (\mathbf{M}_{Y_{2,4}} \otimes \mathbf{I}_2) \\ \mathbf{M}_{Y_{2,4}} \otimes \mathbf{I}_2 \\ (\mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{W}_{[2]} \otimes \mathbf{I}_2) (\mathbf{M}_{Z_{2,4}} \otimes \mathbf{I}_2) \\ (\mathbf{M}_{Z_{2,4}} \otimes \mathbf{I}_2) \\ (\mathbf{M}_{X_{2,4}} \otimes \mathbf{I}_2) \end{bmatrix} \quad (50)$$

的列为 $S_{[n,k]}^{(N_1, N_2)}$ 的一组基。

$$\begin{bmatrix} I_{32} & -W_{[2]} \otimes I_8 & & & \\ & M_{Y_{2,4}}^T \otimes I_2 & & & \\ & & I_{32} & -I_4 \otimes W_{[2]} \otimes I_2 & \\ & & & M_{Z_{2,4}}^T \otimes I_2 & \\ & & & & M_{X_{2,4}}^T \otimes I_2 \end{bmatrix} H^T(I_5 \otimes Q)(V_G)^T = 0 \quad (51)$$

是关于 $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$ 的部分对称博弈的方程数目最少的判别方程。

5 结语

针对关于局中人两个子集的部分对称博弈,利用基于相邻对换的矩阵半张量积的方法,得到了该部分对称博弈的等价条件以及方程数目最小的判别方程,求出了关于局中人两个子集的部分对称博弈子空间的维数和基。今后将对一般性的部分对称博弈及相关有限博弈空间分解问题展开研究。

参 考 文 献

- [1] KUHN H W, TUCKER A W. John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1958, 64(3): 100-122.
- [2] NEUMANN J V. Zur theorie der gesellschaftsspiele [J]. Mathematische Annalen, 1928, 100(1): 295-320.
- [3] CHENG D Z, LIU T. Linear representation of symmetric games [J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11 (18): 3278-3287.
- [4] LI C X, HE F H, LIU T, et al. Symmetry-based decomposition of finite games [J]. Science China Information Sciences, 2019, 62 (1): 1-13.
- [5] HAO Y Q, CHENG D Z. On skew-symmetric games [J]. Journal of The Franklin Institute-engineering and Applied Mathematics, 2018, 355(6): 3196-3220.
- [6] Cao Z G, Yang X G. Symmetric games revisited [J]. Mathematical Social Sciences, 2018, 95: 9-18.
- [7] CHENG S F, REEVES D M, VOROBEYCHIK Y, et al. Notes on equilibria in symmetric games [J]. 2004, 71-78.
- [8] IIMURA T, WATANABE T. Existence of a pure strategy equilibrium in finite symmetric games where payoff functions are integrally concave [J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 166(31): 26-33.
- [9] PALM G. Evolutionary stable strategies and game dynamics for n-person games [J]. Journal of Mathematical Biology, 1984, 19(3): 329-334.
- [10] 程代展, 齐洪胜. 矩阵的半张量积理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [11] CHENG D Z. On finite potential games [J]. Automatica, 2014, 50 (7): 1793-1801.
- [12] CHENG D Z, LIU T. From Boolean game to potential game [J]. Automatica, 2018, 96: 51-60.
- [13] CHENG D Z, XU T T, QI H S. Evolutionarily stable strategy of networked evolutionary games [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2013, 25 (7): 1335-1345.
- [14] MONDERER D, SHAPLEY L S. Potential games [J]. Games and Economic Behavior, 1996, 14 (1): 124-143.
- [15] JERRUM M R. The complexity of finding minimum-length generator sequences [J]. Theoretical Computer Science, 1985, 36: 265-289.
- [16] JOHNSON S M. Generation of permutations by adjacent transposition [J]. Mathematics of Computation, 1963, 17(83): 282-285.
- [17] WANG L, LIU X Y, LI T, et al. The minimum number of discriminant equations for a symmetric game [J]. IET Control Theory & Applications, 2022, 1-10.
- [18] 张志鹏, 许倩, 夏承遗. 基于矩阵半张量积的信息物理融合系统状态不透明性分析与控制[J]. 电子与信息学报, 2021, 43: 1-8.

(责任编辑:刘庆松)