

本文引用格式:王金锁,夏建伟,邓磊,等.非均匀采样控制下布尔控制网络的镇定性[J].聊城大学学报(自然科学版),2025,38(2):170-176.

Citation format: WANG Jinsuo, XIA Jianwei, DENG Lei, et al. The stabilization of Boolean control network under nonuniform sampled-data control[J]. Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition), 2025, 38(2): 170-176.

文章编号 1672-6634(2025)02-0170-07

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2024100011

非均匀采样控制下布尔控制网络的镇定性

王金锁,夏建伟,邓磊,张凤霞

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 基因调控网络受到广泛的关注,布尔控制网络非常适合对基因调控网络进行建模,因此对布尔控制网络的研究也越来越多。本文研究非均匀采样控制下布尔控制网络的镇定性问题。首先,利用矩阵半张量积方法,将布尔控制网络转化成等价的代数形式。基于此代数形式,通过构造一系列非均匀采样可达集获得一个充要条件来判断系统是否可以实现全局镇定。当系统可以实现全局镇定的时候,本文给出设计非均匀采样控制器步骤。最后,给出一个说明性的例子来验证结论的有效性。

关键词 布尔控制网络;非均匀采样;镇定;矩阵半张量积

中图分类号 O231

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



The Stabilization of Boolean Control Network under Nonuniform Sampled-Data Control

WANG Jinsuo, XIA Jianwei, DENG Lei, ZHANG Fengxia

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract Gene regulatory networks have received a lot attention, and Boolean control networks are suitable to model gene regulatory networks. Therefore, the research on Boolean control networks is widely discussed. In this paper, the stabilization problem of Boolean control networks under nonuniform sampled-data control is investigated. Firstly, using semi-tensor product of matrices, the Boolean control network can be transformed into an equivalent algebraic form. Based on its algebraic form, a series of nonuniform sampling reachable sets are constructed, and a necessary and sufficient condition is given to determine whether the system can achieve global stabilization. When the system can achieve global stabilization, this paper proposes the steps for designing non-uniform sampling stabilizers. Finally, an illustrative example is provided to verify the effectiveness of the results in this paper.

Key words Boolean control networks; nonuniform sampled-data control; stabilization; semi-tensor product of matrices

收稿日期:2024-10-25

基金项目:国家自然科学基金项目(62103176);山东省自然科学基金项目(ZR2019BF023, ZR2022MA030)资助

通信作者:邓磊,男,汉族,博士,讲师,研究方向:布尔网络、博弈论等, E-mail: dengleiliaoda@163.com.

0 引言

布尔网络是具有二元变量的离散时间逻辑动态系统,自1969年被Kauffman提出之后,成为了分析和研究基因调控网络的有效数学工具^[1]。在布尔网络中,每个节点都有两个值:“1”(活跃)和“0”(不活跃),并且每个节点的更新规则是由布尔函数决定。在布尔网络中添加控制输入,布尔网络就扩展到了布尔控制网络。由于缺乏处理逻辑系统的数学工具,分析和控制布尔网络是一个比较困难的问题,直到矩阵半张量积被提出^[2]。运用矩阵半张量积,可以将布尔控制网络的逻辑形式转化成代数形式,从而可以使用经典的数学方法来处理逻辑动态系统。目前为止已经获得很多优秀的研究成果,包括但不限于布尔控制网络的稳定性和镇定性^[3-5],输出追踪^[6-8],能控性和能观性^[9-11]以及同步问题^[12-14]。矩阵半张量积在有限状态机^[15,16],博弈论^[17]等领域都有广泛的应用。

在布尔控制网络的研究中,镇定性是一个非常重要的问题。例如,在基因治疗应用的背景下,人们会考虑设计治疗干预措施,将不良基因引导到一个理想的状态,比如健康的状态,并在之后保持这种状态。目前已经设计了很多种类的控制来实现布尔控制网络的全局镇定,例如状态反馈控制^[18,19],牵制控制^[20,21],事件触发控制^[22,23]和状态翻转控制^[24,25]等。值得注意的是采样控制可以减少控制的更新次数,从而可以减少控制成本。在文献^[26]中,采样控制首次被提出,研究了采样状态反馈控制下布尔控制网络的镇定性问题。在此之后,非周期采样在文献^[27]中被提出,被用来解决布尔控制网络的镇定性问题。特别地,文献^[28]研究了非均匀采样控制,用非均匀采样的方法研究了布尔网络的能控性。与周期采样相比,非均匀采样的优点是其采样间隔不是固定的,这就使得非均匀采样更灵活,更加符合现实生活中的模型。但是文献^[27,28]研究布尔控制网络镇定性问题时设计非均匀采样控制器的方法过于复杂,本文采用矩阵的方法来设计非均匀采样控制器,计算更简单,结果更直观。

本文利用矩阵半张量积工具,研究布尔控制网络的镇定问题,设计非均匀采样控制器使得系统的所有状态都能收敛到一个不动点。主要贡献为:通过真值矩阵的方法构造一系列非均匀采样可达集,给出判断系统是否能够实现全局镇定的充要条件,并设计非均匀采样镇定器。

1 预备知识

本节给出文中需要用到的符号和定义。我们首先给出一些符号解释。

$\mathbf{N}$ 是全体自然数的集合; $\mathbf{Z}_+$ 是全体正整数的集合; $\mathbf{R}_{m \times n}$ 表示全体 $m \times n$ 维实矩阵集合; $D = \{1, 0\}$, $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_n$; $[a, b]$ 代表集合 $\{a, a+1, \dots, b\}$ 。 $\text{Col}_i(L)$ 表示矩阵 L 的第 i 列, $\text{Col}(L)$ 是矩阵 L 所有列的集合。 $\Delta_n := \{\delta_n^i \mid i \in [1, n]\}$, 其中 δ_n^i 为单位矩阵的第 i 列。若 $\text{Col}(L) \subseteq \Delta_m$, 称矩阵 L 为逻辑矩阵, 所有 $m \times n$ 维逻辑矩阵的集合记为 $\mathbf{L}_{m \times n}$ 。 $L_{i,j}$ 表示矩阵 L 的第 (i, j) 元素, 若 $L_{i,j} \in \{0, 1\}$, $\forall i \in [1, m]$, $\forall j \in [1, n]$, 称矩阵 L 为布尔矩阵, $\mathbf{B}_{m \times n}$ 代表所有 $m \times n$ 维布尔矩阵的集合。 $L = [\delta_n^{i_1} \delta_n^{i_2} \cdots \delta_n^{i_m}]$ 可以简写为 $L = \delta_n[i_1 i_2 \cdots i_m]$ 。 $[S]_v$ 表示集合 $S = \{\delta_n^{j_1}, \delta_n^{j_2}, \dots, \delta_n^{j_n}\}$ 的列和, 即 $\sum_{i=1}^n \delta_n^{j_i}$ 。 $x \in (\Omega \setminus \Phi)$ 表示 $x \in \Omega$ 但是 $x \notin \Phi$ 。

接下来给出一些必要的定义。

定义1^[2] 对于两个矩阵 $A \in \mathbf{R}_{m \times n}$ 和 $B \in \mathbf{R}_{p \times q}$, 矩阵 A 和 B 的半张量积定义为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{\frac{s}{n}})(B \otimes I_{\frac{s}{p}}),$$

式中 s 是 n 和 p 的最小公倍数, “ $\otimes$ ” 是 Kronecker 积。

值得注意的是, 当 $n = p$ 时, 矩阵半张量积就退化成了普通的矩阵乘积, 因此在本文中我们将半张量积符号省略。

定义2^[2] 对于两个矩阵 $M \in \mathbf{R}_{m \times s}$ 和 $N \in \mathbf{R}_{n \times s}$, 矩阵 M 和 N 的 Khatri-Rao 积定义为

$$M * N = [\text{Col}_1(M) \ltimes \text{Col}_1(N), \dots, \text{Col}_s(M) \ltimes \text{Col}_s(N)] \in \mathbf{R}_{ms \times s}。$$

令 $\delta_2^{2-X} \in \Delta$ 为逻辑变量 $X \in D$ 的向量形式, 则有以下引理。

引理 1 ^[2] $f(X_1, X_2, \dots, X_n): D^n \mapsto D$ 是一个逻辑函数, 那么存在唯一的矩阵 $M_f \in L_{2 \times 2^n}$, 使得

$$\delta_2^{2-f(X_1, X_2, \dots, X_n)} = M_f \bowtie_{i=1}^n x_i, \quad (1)$$

式中 M_f 称为 f 的结构矩阵, $x_i \in \Delta$ 为 $X_i \in D$, $i \in [1, n]$ 的代数形式。

2 主要结果

2.1 问题描述

考虑如下一个具有 n 个节点和 m 个控制的布尔控制网络

$$\begin{cases} X_1(t+1) = f_1(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t), U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)), \\ X_2(t+1) = f_2(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t), U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)), \\ \dots \\ X_n(t+1) = f_n(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t), U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)), \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)) \in D^n$ 和 $\mathbf{U}(t) = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)) \in D^m$ 分别代表布尔控制网络的状态和控制输入, $f_i: D^{n+m} \rightarrow D$, $i \in [1, n]$ 是逻辑函数。

记 X_i 和 U_i 的代数形式分别记为 x_i 和 u_i 。令 $\mathbf{x}(t) = \bowtie_{i=1}^n x_i(t) \in \Delta_{2^n}$, $\mathbf{u}(t) = \bowtie_{i=1}^m u_i(t) \in \Delta_{2^m}$ 。在 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)) \in D^n$ 与 $\mathbf{x}(t) = \bowtie_{i=1}^n x_i(t) \in \Delta_{2^n}$ 之间存在一一对应的关系, 我们将 $\mathbf{x}(t)$ 称为 $\mathbf{X}(t)$ 的代数形式。相应地, $\mathbf{u}(t)$ 为 $\mathbf{U}(t)$ 的代数形式。利用引理 1, 可以将系统写成代数形式

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{L}\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t). \quad (3)$$

$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ 代表系统在控制序列 $\mathbf{u}$ 下, 当初始状态为 $\mathbf{x}_0 \in \Delta_{2^n}$ 时的状态演化轨迹。下面, 我们给出布尔控制网络实现全局镇定的定义。

定义 3 ^[29] 给出状态 $\mathbf{x}_e \in \Delta_{2^n}$ 。如果对于任意的初始状态 $\mathbf{x}_0 \in \Delta_{2^n}$, 都存在一个整数 $T \in \mathbf{Z}_+$ 和一个控制序列 $\mathbf{u}$, 使得 $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{x}_e$ 对任意 $t \geq T$ 都成立, 那么称布尔控制网络可以全局镇定到 $\mathbf{x}_e$ 。

2.2 主要结论

在本节中, 我们设计非均匀采样控制器使得系统实现全局镇定。首先, 给出非均匀采样的定义。

定义 4 给定一个集合 $\Lambda \subseteq \mathbf{Z}_+$, 对于控制 $\mathbf{u}(t) \in \Delta_{2^m}^\infty$, $t \in \mathbf{N}$, 如果存在整数序列 t_k , 满足 $t_0 = 0$, $t_{k+1} - t_k \in \Lambda$ 和 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbf{N}$, 称为 Λ 非均匀采样控制。

我们设计如下的 Λ 非均匀采样控制器:

$$\begin{cases} U_1(t) = h_1(X_1(t_k), X_2(t_k), \dots, X_n(t_k)), \\ U_2(t) = h_2(X_1(t_k), X_2(t_k), \dots, X_n(t_k)), \\ \dots \\ U_m(t) = h_m(X_1(t_k), X_2(t_k), \dots, X_n(t_k)), \end{cases} \quad t_k \leq t < t_{k+1}, i \in [1, m], \quad (4)$$

式中 $h_i: D^n \rightarrow D$, $i \in [1, m]$ 是逻辑函数, t_k 和 t_{k+1} 是相邻的采样时刻, 并且 $t_{k+1} - t_k \in \Lambda$ 。利用矩阵半张量积, 上述方程可以等价的写为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (5)$$

式中 $\mathbf{H} \in L_{2^m \times 2^n}$ 称为状态反馈增益矩阵。

将结构矩阵 $\mathbf{L} \in L_{2^n \times 2^{m+n}}$ 分成 2^m 个相等的块

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \cdots \mathbf{L}_{2^m}], \quad (6)$$

式中的 $\mathbf{L}_p \in L_{2^n \times 2^n}$, $p \in [1, 2^m]$ 。

令 $\Lambda = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s\}$, 不失一般性, 假设 $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_s$ 。我们首先确定状态 $\mathbf{x}_e$ 是不是一个 Λ 非均匀采样控制不动点。构造一个真值矩阵 $\mathbf{T}_{\mathbf{x}_e | \mathbf{x}_e} \in B_{2^m \times 2^n}$

$$(\mathbf{T}_{\mathbf{x}_e | \mathbf{x}_e})_{p,i} = \begin{cases} 1, \text{Col}_i((\mathbf{L}_p)^r) = \mathbf{x}_e, \forall r \in [1, \tau_1], \delta_{2^n}^i = \mathbf{x}_e, \\ 0, \text{否则。} \end{cases}$$

若 $\text{Col}_i(\mathbf{T}_{x_e|x_e}) \neq \mathbf{0}_{2^m}$, 那么 x_e 称为 Δ 非均匀采样控制不动点。

如果 x_e 是一个控制不动点, 我们通过计算可达集的方法来确定系统是否可以全局镇定到 $x_e \in \Delta_{2^n}$ 。接下来计算 x_e 的可达集。

令 $R_0(x_e) = \{x_e\}$, 构造真值矩阵 $\mathbf{T}_{R_0(x_e)|(\Delta_{2^n} \setminus R_0(x_e))} \in \mathbf{B}_{2^m \times 2^n}$:

$$(\mathbf{T}_{R_0(x_e)|(\Delta_{2^n} \setminus R_0(x_e))})_{p,i} = \begin{cases} 1, \text{Col}_i((\mathbf{L}_p)^{\tau_s}) = x_e, \forall \delta_{2^n}^i \in (\Delta_{2^n} \setminus R_0(x_e)), \\ 0, \text{否则}。 \end{cases}$$

计算 $R_1^{\tau_s}(x_e) = \{\text{Col}_j(\mathbf{T}_{R_0(x_e)|(\Delta_{2^n} \setminus R_0(x_e))}) \neq \mathbf{0}_{2^m}\}$, 可知每一个状态 $\delta_{2^n}^j \in R_1^{\tau_s}(x_e)$, 都存在一个控制 $\delta_{2^m}^p$, 使得 $(\mathbf{L}_p)^{\tau_s} \delta_{2^n}^j = x_e$, 也就是说, 状态 $\delta_{2^n}^j$ 可以在一步采样到达 x_e 。

记 $W_1^{\tau_s} = W_0 \cup R_1^{\tau_s}(x_e)$, 其中 $W_0 = R_0(x_e)$, 构造真值矩阵 $\mathbf{T}_{R_0(x_e)|(\Delta_{2^n} \setminus W_1^{\tau_s})} \in \mathbf{B}_{2^m \times 2^n}$:

$$(\mathbf{T}_{R_0(x_e)|(\Delta_{2^n} \setminus W_1^{\tau_s})})_{p,i} = \begin{cases} 1, \text{Col}_i((\mathbf{L}_p)^{\tau_s-1}) = x_e, \forall \delta_{2^n}^i \in (\Delta_{2^n} \setminus W_1^{\tau_s}), \\ 0, \text{否则}。 \end{cases}$$

计算 $R_1^{\tau_s-1}(x_e) = \{\text{Col}_j(\mathbf{T}_{R_0(x_e)|(\Delta_{2^n} \setminus W_1^{\tau_s})}) \neq \mathbf{0}_{2^m}\}$, 记 $W_1^{\tau_s-1} = W_0 \cup R_1^{\tau_s}(x_e) \cup R_1^{\tau_s-1}(x_e)$ 。重复上述的

过程一直计算到 $R_1^{\tau_1}(x_e)$, 令 $R_1(x_e) = R_1^{\tau_s}(x_e) \cup \dots \cup R_1^{\tau_1}(x_e)$ 。对任意的状态 $\delta_{2^n}^j \in R_1(x_e)$, 一定存在一个整数 $\tau_k \in \Delta$ 和一个控制 $\delta_{2^m}^p$, 使得状态 $\delta_{2^n}^j$ 可以在一步采样演化到不动点 x_e 。

令 $W_1 = R_0(x_e) \cup R_1(x_e)$, 构造一个真值矩阵 $\mathbf{T}_{R_1(x_e)|(\Delta_{2^n} \setminus W_1)} \in \mathbf{B}_{2^m \times 2^n}$:

$$(\mathbf{T}_{R_1(x_e)|(\Delta_{2^n} \setminus W_1)})_{p,i} = \begin{cases} 1, \text{Col}_i((\mathbf{L}_p)^{\tau_s}) \leq [R_1(x_e)]_v, \forall \delta_{2^n}^i \in (\Delta_{2^n} \setminus W_1), \\ 0, \text{否则}。 \end{cases}$$

我们可以计算 $R_2^{\tau_s}(x_e) = \{\text{Col}_j(\mathbf{T}_{R_1(x_e)|(\Delta_{2^n} \setminus W_1)}) \neq \mathbf{0}_{2^m}\}$, 并且记 $W_2^{\tau_s} = W_0 \cup W_1 \cup R_2^{\tau_s}(x_e)$ 。一直计算到 $R_2^{\tau_1}(x_e)$ 。令 $R_{t-1}(x_e) = \bigcup_{k=1}^s R_{t-1}^{\tau_k}(x_e)$ 和 $W_{t-1} = \bigcup_{\lambda=0}^{t-1} R_\lambda(x_e)$, $t > 2$ 。用同样的方法, 我们可以计算 $R_t(x_e) = \bigcup_{k=1}^s R_t^{\tau_k}(x_e)$ 。

由于 Δ_{2^n} 是一个有限集, 并且 $R_i(x_e) \cap R_j(x_e) = \emptyset$, $\forall i, j \in \mathbf{Z}_+$, $i \neq j$, 那么一定存在一个正整数 $t \in \mathbf{Z}_+$ 使得 $R_{t+1}(x_e) = \emptyset$ 。我们将使得 $R_{t+1}(x_e) = \emptyset$ 成立的最小的正整数记为 $\hat{t}$ 。

由上述过程可以得到下面的定理。

定理 1 系统在 Δ 非均匀采样控制器下能够实现全局镇定到 x_e 当且仅当存在一个正整数 $\hat{t} \in [1, 2^n - 1]$ 使得

$$\bigcup_{\lambda=0}^{\hat{t}} R_\lambda(x_e) = \Delta_{2^n}。 \quad (7)$$

证 (必要性) 我们用反证法来证明必要性。假设系统可以在 Δ 非均匀采样控制下全局镇定到 x_e , 但是 $\bigcup_{\lambda=0}^{\hat{t}} R_\lambda(x_e) \neq \Delta_{2^n}$ 。也就是说存在一个状态 $\hat{x} \in \Delta_{2^n} \setminus [\bigcup_{\lambda=0}^{\hat{t}} R_\lambda(x_e)]$, 找不到一个控制能使其在 $\hat{t}$ 步采样内到达状态 x_e 。因此, 状态 $\hat{x}$ 不能收敛到状态 x_e , 即不是所有的状态都能在 Δ 非均匀采样控制器下收敛到状态 x_e , 这与系统可以在 Δ 非均匀采样控制下全局镇定到 x_e 矛盾的。因此, 方程是成立的。

(充分性) 假设存在一个正整数 $\hat{t} \in [1, 2^n - 1]$ 使得 $\bigcup_{\lambda=0}^{\hat{t}} R_\lambda(x_e) = \Delta_{2^n}$ 成立。首先对任意的初始状态 $\delta_{2^n}^{i_1} \in R_1(x_e)$, 一定存在一个控制 $u = \delta_{2^m}^{p_1}$ 和一个正整数 τ_{k_1} , 使得 $(\mathbf{L}_{p_1})^{\tau_{k_1}} \delta_{2^n}^{i_1} = x_e$ 成立。也就是说, 状态 $\delta_{2^n}^{i_1}$ 在一步采样能到达状态 x_e 。接下来, 对于任意的状态 $\delta_{2^n}^{i_2} \in R_2(x_e)$, 一定存在一个控制 $u = \delta_{2^m}^{p_2}$ 和一个正整数 τ_{k_2} , 使得 $(\mathbf{L}_{p_2})^{\tau_{k_2}} \delta_{2^n}^{i_2} \in R_1(x_e)$ 成立, 即状态 $\delta_{2^n}^{i_2}$ 一步采样都能到达集合 $R_1(x_e)$ 。由于 $R_1(x_e)$ 中的状态都能一步采样到达状态 x_e 且 $R_1(x_e) \cap R_2(x_e) = \emptyset$, 所以状态 $\delta_{2^n}^{i_2}$ 能够在两步采样到达不动点 x_e 。

同样地, 对于任意的状态 $\delta_{2^n}^{i_t} \in R_t(x_e)$, $t \in [3, \hat{t}]$, 一定存在一个控制 $u = \delta_{2^m}^{p_t}$ 和一个正整数 τ_{k_t} , 使得

$(L_{p_t})^{\tau_{k_t}} \delta_{2^n}^{i_t} \in R_{t-1}(x_e)$ 成立, 可得状态 $\delta_{2^n}^{i_t}$ 能够在 t 步采样时刻到达状态 x_e 。如果存在一个正整数 $\hat{t} \in [1, 2^n - 1]$ 使得 $\bigcup_{\lambda=0}^{\hat{t}} R_{\lambda}(x_e) = \Delta_{2^n}$ 成立, 那么所有状态 $\hat{t}$ 步采样内都能到达不动点 x_e 。因此系统可以全局镇定到 x_e 。

下面讨论如何设计非均匀采样控制器使得系统的所有状态可以收敛到不动点 x_e 。

从上述可达集的构造过程中, 可以给出设计 Δ 非均匀采样控制器的步骤。

算法 1 设计 Δ 非均匀采样控制器。

步骤 1: 令 $R_0(x_e) = \{x_e\}$, 构造真值矩阵 $T_{R_0(x_e) | (\Delta_{2^n} \setminus R_0(x_e))} \in \mathbf{B}_{2^m \times 2^n}$, 计算 $R_1^{\tau_1}(x_e) = \{\text{Col}_j(T_{R_0(x_e) | (\Delta_{2^n} \setminus R_0(x_e))}) \neq \mathbf{0}_{2^m}\}$ 。

当 $2 \leq k \leq s$ 时, 记 $W_1^{\tau_k} = W_0 \cup R_1^{\tau_1}(x_e) \cup \cdots \cup R_1^{\tau_k}(x_e)$, 其中 $W_0 = R_0(x_e)$, 构造真值矩阵 $T_{R_0(x_e) | (\Delta_{2^n} \setminus W_1^{\tau_k})} \in \mathbf{B}_{2^m \times 2^n}$, 接着计算 $R_1^{\tau_{k-1}}(x_e) = \{\text{Col}_j(T_{R_0(x_e) | (\Delta_{2^n} \setminus W_1^{\tau_k})}) \neq \mathbf{0}_{2^m}\}$ 。

令 $R_1(x_e) = R_1^{\tau_s}(x_e) \cup \cdots \cup R_1^{\tau_1}(x_e)$ 。如果 $R_1(x_e) = \emptyset$, 停止算法, 检验 $R_0(x_e) \cup R_1(x_e) = \Delta_{2^n}$ 是否成立。若成立, 令 $\hat{t} = 1$, 否则进行步骤 2。

步骤 2: 当 $t \geq 2$ 时, 令 $W_{t-1} = \bigcup_{\lambda=0}^{t-1} R_{\lambda}(x_e)$ 。构造真值矩阵 $T_{R_{t-1}(x_e) | (\Delta_{2^n} \setminus W_{t-1})} \in \mathbf{B}_{2^m \times 2^n}$, 计算 $R_t^{\tau_s}(x_e) = \{\text{Col}_j(T_{R_{t-1}(x_e) | (\Delta_{2^n} \setminus W_{t-1})}) \neq \mathbf{0}_{2^m}\}$ 。当 $2 \leq k \leq s$ 时, 记 $W_t^{\tau_k} = W_{t-1} \cup R_t^{\tau_s}(x_e) \cup \cdots \cup R_t^{\tau_k}(x_e)$, 并构造真值矩阵 $T_{R_{t-1}(x_e) | (\Delta_{2^n} \setminus W_t^{\tau_k})} \in \mathbf{B}_{2^m \times 2^n}$ 。然后, 计算 $R_t^{\tau_{k-1}}(x_e) = \{\text{Col}_j(T_{R_{t-1}(x_e) | (\Delta_{2^n} \setminus W_t^{\tau_k})}) \neq \mathbf{0}_{2^m}\}$ 。令 $R_t(x_e) = \bigcup_{k=1}^s R_t^{\tau_k}(x_e)$, 如果 $R_t(x_e) = \emptyset$, 停止算法, 检验 $\bigcup_{\lambda=1}^t R_{\lambda}(x_e) = \Delta_{2^n}$ 是否成立。若成立, 则令 $\hat{t} = t$, 进行步骤 3; 否则, 令 $t = t + 1$, 继续进行步骤 2。

步骤 3: Δ 非均匀采样的状态反馈增益矩阵 $H \in \mathbf{L}_{2^m \times 2^n}$ 可以设计为

$$\begin{cases} H|_{x_e} \leq T_{x_e|x_e}, \\ H|_{R_k^{\tau_t}(x_e)} \leq T_{R_{t-1}(x_e)}, k \in [1, s], t \in [1, \hat{t}], \end{cases}$$

式中

$$\text{Col}_j(T_{R_{t-1}(x_e) | R_t^{\tau_k}(x_e)}) = \begin{cases} \text{Col}_j(T_{R_{t-1}(x_e) | (\Delta_{2^n} \setminus W_{t-1})}), & \text{如果 } \delta_{2^n}^j \in W_{t-1}, k = s, t \in [1, \hat{t}], \\ \text{Col}_j(T_{R_{t-1}(x_e) | (\Delta_{2^n} \setminus W_{t-1})}), & \text{如果 } \delta_{2^n}^j \in W_t^{\tau_k}, k \in [1, s-1], t \in [1, \hat{t}], \\ \mathbf{0}_{2^m}, & \text{否则。} \end{cases}$$

接下来分析算法 1 的计算复杂度。首先, 假设做一次矩阵乘法的计算复杂度为 $O(1)$ 。对于步骤 1, 时间复杂度为 $2^m \times \tau_s + 2^m \times \tau_{s-1} + \cdots + 2^m \times \tau_1 = 2^m \cdot \sum_{k=1}^s \tau_k$, 步骤 2 是与步骤 1 的时间复杂度相同, 由于算法最多循环 $2^n - 1$ 次, 所以, 算法 1 的计算复杂度为 $O(2^{n+m} \cdot \sum_{k=1}^s \tau_k)$ 。算法 1 不仅可以用来设计非均匀采样控制器, 当集合 Δ 为单点集时, 该算法也可以用来设计普通的采样控制器。

注释: 与文献[26, 27]相比较, 本文运用了真值矩阵的方法来设计非均匀采样控制器, 这样使得计算更加简单, 而且结果更加直观。我们可以直接通过观察真值矩阵的非零列来确定非均匀采样可达集, 通过非零列中“1”的位置, 来确定选取哪一个控制, 进而确定非均匀采样控制器。

3 例子

本节用一个例子来说明获得结论的有效性。

我们考虑含有三个节点三个控制的布尔控制网络^[30], 这是大肠杆菌中 lac 操纵子的简化模型

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t+1) = \neg \mathbf{u}_1(t) \wedge (\mathbf{x}_2(t) \vee \mathbf{x}_3(t)), \\ \mathbf{x}_2(t+1) = \neg \mathbf{u}_1(t) \wedge \mathbf{u}_2(t) \vee \mathbf{x}_1(t), \\ \mathbf{x}_3(t+1) = \neg \mathbf{u}_1(t) \wedge (\mathbf{u}_2(t) \vee (\mathbf{u}_3(t) \wedge \mathbf{x}_1(t))), \end{cases} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 和 $\mathbf{x}_3$ 是状态变量,它们分别表示 lac 的 mRNA,高浓度乳糖和中等浓度乳糖浓度; $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 和 $\mathbf{u}_3$ 是控制输入,分别表示细胞外葡萄糖、细胞外高浓度乳糖和细胞外中浓度乳糖。

利用矩阵半张量积,将系统转化成代数形式

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{L}\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t), \quad (9)$$

式中 $\mathbf{L} = \delta_8[8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 5 \ 3 \ 3 \ 3 \ 7 \ 1 \ 1 \ 1 \ 5 \ 3 \ 3 \ 3 \ 7 \ 3 \ 3 \ 3 \ 7 \ 4 \ 4 \ 4 \ 8 \ 4 \ 4 \ 4 \ 8 \ 4 \ 4 \ 4 \ 8]$ 。

将矩阵 $\mathbf{L}$ 分成 8 个相等的块,其中

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_4 = \delta_8[8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8], \mathbf{L}_5 = \mathbf{L}_6 = \delta_8[1 \ 1 \ 1 \ 5 \ 3 \ 3 \ 3 \ 7], \\ \mathbf{L}_7 = \delta_8[3 \ 3 \ 3 \ 7 \ 4 \ 4 \ 4 \ 8], \mathbf{L}_8 = \delta_8[4 \ 4 \ 4 \ 8 \ 4 \ 4 \ 4 \ 8]。$$

令非均匀采样集 $\Lambda = \{1, 2\}$, 下面研究布尔控制网络是否可以在 Λ 非均匀采样下镇定到状态 $\mathbf{x}_e = \delta_8^3$ 。首先要确定是否存在控制使得 $\mathbf{x}_e$ 为一个不动点。构造真值矩阵 $\mathbf{T}_{\mathbf{x}_e|\mathbf{x}_e} \in \mathbf{B}_{8 \times 8}$,

$$\mathbf{T}_{\mathbf{x}_e|\mathbf{x}_e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}。$$

由于 $\text{Col}_3(\mathbf{T}_{\mathbf{x}_e|\mathbf{x}_e}) \neq \mathbf{0}_{2^m}$, 所以 $\mathbf{x}_e$ 是一个控制不动点。下面我们来确定布尔控制网络是否可以全局镇定到 $\mathbf{x}_e$ 。令 $R_0(\mathbf{x}_e) = \{\mathbf{x}_e\}$, 构造真值矩阵 $\mathbf{T}_{R_0(\mathbf{x}_e)|(\Delta_{2^n} \setminus R_0(\mathbf{x}_e))} \in \mathbf{B}_{8 \times 8}$,

$$\mathbf{T}_{R_0(\mathbf{x}_e)|(\Delta_{2^n} \setminus R_0(\mathbf{x}_e))} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}。 \quad (10)$$

从(10)式中,可以计算得到 $R_1^2(\mathbf{x}_e) = \delta_8\{1, 2, 4, 8\}$ 。记 $W_1^2 = W_0 \cup R_1^2(\mathbf{x}_e)$, 其中 $W_0 = R_0(\mathbf{x}_e)$, 构造真值矩阵 $\mathbf{T}_{R_0(\mathbf{x}_e)|(\Delta_{2^n} \setminus W_1^2)} \in \mathbf{B}_{8 \times 8}$,

$$\mathbf{T}_{R_0(\mathbf{x}_e)|(\Delta_{2^n} \setminus W_1^2)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。 \quad (11)$$

从(11)式我们得到 $R_1^1(\mathbf{x}_e) = \delta_8\{5, 6, 7\}$ 。 $R_1(\mathbf{x}_e) = R_1^2(\mathbf{x}_e) \cup R_1^1(\mathbf{x}_e)$, 由于 $R_0(\mathbf{x}_e) \cup R_1(\mathbf{x}_e) = \Delta_8$, 由定理 1 可知,系统可以全局镇定到不动点 $\mathbf{x}_e$ 。接下来,由算法 1,状态反馈增益矩阵 $\mathbf{H}$ 可以设计如

$$\mathbf{H} = \delta_8[7 \ 7 \ 7 \ 5 \ 5 \ 5 \ 6 \ 6]。$$

4 结语

本文用半张量积方法研究了布尔控制网络在 Λ 非均匀采样控制下的镇定问题。通过构造真值矩阵计算非均匀采样可达集,基于这些可达集来判断系统是否能够实现全局镇定。接着给出了一个设计 Λ 非均匀采样控制器的算法,最后用一个实际的例子来验证新结论是有效的。布尔控制网络的集合镇定问题是一个

比较重要的问题,布尔网络的同步、输出追踪等问题都可以转化成布尔控制网络的集合镇定问题,后续我们将用本文的方法去研究布尔控制网络集合镇定问题。

参 考 文 献

- [1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1969, 22(3): 437-467.
- [2] CHENG D, Qi H. A linear representation of dynamics of Boolean networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2251-2258.
- [3] GUO Y, WANG P, GUI W, et al. Set stability and set stabilization of Boolean control networks based on invariant subsets[J]. *Automatica*, 2015, 61: 106-112.
- [4] SUN Q, Li H, GAO H. Lebesgue sampling approach to robust stabilization of Boolean control networks with external disturbances[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2023, 360(4): 2794-2810.
- [5] WANG J, LIU W, FU S, et al. On robust set stability and set stabilization of probabilistic Boolean control networks[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2022, 422: 126992.
- [6] PAN Y, FU S, WANG J, et al. Optimal output tracking of Boolean control networks[J]. *Information Sciences*, 2023, 626: 524-536.
- [7] ZHANG X, WANG Y, CHENG D. Output tracking of Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 65(6): 2730-2735.
- [8] FU S, FENG J, ZHAO Y, et al. Dimensionality reduction method for the output regulation of boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2024, doi: 10.1109/TNNLS. 2024. 3380247.
- [9] ZHONG J, LIU Y, KOU K I, et al. On the ensemble controllability of Boolean control networks using STP method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 358: 51-62.
- [10] LIU Y, ZHONG J, HO D W C, et al. Minimal observability of Boolean networks[J]. *Science China Information Sciences*, 2022, 65(5): 152203.
- [11] ZHANG L, FENG J, YAO J. Controllability and observability of switched Boolean control networks[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2012, 6(16): 2477-2484.
- [12] HUANG C, HO D W C, LU J, et al. Synchronization of an array of coupled probabilistic Boolean networks[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 52(6): 3834-3846.
- [13] MU T, FENG J, WANG B, et al. Delay synchronization of drive-response Boolean networks and Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2022, 10(2): 865-874.
- [14] LIU L, ZHONG J, ZHU S, et al. Sampled-data general partial synchronization of Boolean control networks[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2022, 359(1): 1-11.
- [15] YAN Y, CHEN Z, YUE J. STP approach to controllability of finite state machines[J]. *Ifac-PapersonLine*, 2015, 48(28): 138-143.
- [16] YAN Y, HAO P, YUE J, et al. An STP look at logical blocking of finite state machines: formulation, detection, and search[J]. *Science China Information Sciences*, 2024, 67(10): 202208.
- [17] CHENG D, QI H, HE F, et al. Semi-tensor product approach to networked evolutionary games[J]. *Control Theory and Technology*, 2014, 12(2): 198-214.
- [18] LIU R, QIAN C, LIU S, et al. State feedback control design for Boolean networks[J]. *BMC Systems Biology*, 2016, 10: 357-367.
- [19] LI H, WANG Y, GUO P. State feedback based output tracking control of probabilistic Boolean networks[J]. *Information Sciences*, 2016, 349: 1-11.
- [20] LIU Y, LI B, LU J, et al. Pinning control for the disturbance decoupling problem of Boolean networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(12): 6595-6601.
- [21] ZHONG J, PAN Q, LI B, et al. Minimal pinning control for oscillatory of Boolean networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, 34(9): 6237-6249.
- [22] KONG X, LI H. Event-triggered control for sampled-data set stabilization of switched delayed boolean control networks[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2023, 46(2): 2305-2318.
- [23] ZHAO R, FENG J, ZHANG D. Self-triggered set stabilization of Boolean control networks and its applications[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2024, 11(7): 1631-1642.
- [24] DU L, ZHANG Z, XIA C. A state-flipped approach to complete synchronization of Boolean networks[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2023, 443: 127788.

(下转第 189 页)

- [26] 马金林,曹浩杰,马自萍,等.改进 YOLOv8 的带钢缺陷检测[J/OL]. 计算机工程与应用,1-13[2024-07-20]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2127.TP.20240710.2154.015.html>.
- [27] JOCHER G. Ultralytics[EB/OL]. [2024-7-25]. <https://github.com/ultralytics/ultralytics>.
- [28] LIU S, QI L, QIN H F, et al. Path aggregation network for instance segmentation[C]. // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018: 8759-8768.
- [29] LIN T Y, DOLLÁR P, GIRSHICK R, et al. Feature pyramid networks for object detection[C]. // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2017: 2117-2125.
- [30] LI H L, LI J, WEI H B, et al. Slim-neck by GSConv: a better design paradigm of detector architectures for autonomous vehicles[EB/OL]. arXiv preprint arXiv:2206.02424, 2022.
- [31] LI C, ZHOU A J, YAO A B. Omni-dimensional dynamic convolution[EB/OL]. arXiv preprint arXiv:2209.07947, 2022.
- [32] NARAYANAN M. SENetV2: aggregated dense layer for channelwise and global representations[EB/OL]. arXiv preprint arXiv:2311.10807, 2023.
- [33] HU J, SHEN L, SUN G. Squeeze-and-excitation networks[C]. // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018: 7132-7141.
- [34] HE Y, SONG K C, MENG Q G, et al. An end-to-end steel surface defect detection approach via fusing multiple hierarchical features[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2019, 69(4):1493-1504.
- [35] EVERINGHAM M, ESLAMI S A, VAN GOOL L, et al. The pascal visual object classes challenge: a retrospective[J]. International Journal of Computer Vision, 2015, 111:98-136.

(责任编辑:刘庆松)

(上接第 176 页)

- [25] LIU Y, LIU Z, YERUDKAR A, et al. Stabilization of probabilistic boolean networks via state-flipped control and reinforcement learning [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2024,69(3):1858-1865.
- [26] LIU Y, CAO J, SUN L, et al. Sampled-data state feedback stabilization of Boolean control networks[J]. Neural Computation, 2016, 28(4): 778-799.
- [27] LU J, SUN L, LIU Y, et al. Stabilization of Boolean control networks under aperiodic sampled-data control[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2018, 56(6): 4385-4404.
- [28] YU Y, FENG J, WANG B, et al. Sampled-data controllability and stabilizability of Boolean control networks: nonuniform sampling[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(12): 5324-5335.
- [29] LI R, YANG M, CHU T. State feedback stabilization for Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(7): 1853-1857.
- [30] VELIZ-CUBA A, STIGLER B. Boolean models can explain bistability in the lac operon[J]. Journal of Computational Biology, 2011, 18(6): 783-794.

(责任编辑:刘庆松)