

文章编号 1672-6634(2024)05-0029-12

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2024010005

具有未知输出函数的非线性时滞系统的输出反馈稳定

董伟, 蒋蒙蒙, 牛霄

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 针对一类非线性函数、积分器及输入中都包含时滞的非线性系统,在输出信息不确定的条件下,研究其全局输出反馈稳定问题。由于积分器中的时滞项会使得运算更加麻烦。为解决这个问题,首先引入不包含时滞的积分器,然后为变换后的系统的标称系统构造合适的 Lyapunov 函数和齐次状态观测器,基于增加幂次积分法和齐次占优法,设计一个输出反馈控制器,确保标称系统全局渐近稳定。最后,通过坐标变换引入增益 L ,构造依赖于 L 的齐次状态观测器, Lyapunov-Krasovskii 泛函,设计输出反馈控制器,使非线性系统全局渐近稳定。

关键词 状态和输入中的时滞; 输出函数; 输出反馈; 齐次占优法; 全局渐近稳定

中图分类号 O231.2

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Output Feedback Stabilization of Nonlinear Time-Delay Systems with Unknown Output Function

DONG Wei, JIANG Mengmeng, NIU Xiao

(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract The global output feedback problem is studied for a class of nonlinear systems whose nonlinear functions, integrators and input all contain time delays under the condition of uncertain output information. Since the time delays terms in the integrators can make the operation more troublesome. To solve this problem, we first introduce an integrator without time delays, then construct suitable Lyapunov function and homogeneous state observer for the nominal system of the transformed system, and design an output feedback controller based on adding a power integrator technique and homogeneous domination approach to ensure the global asymptotic stability of the nominal system. Finally, the gain L is introduced through coordinate transformation, a homogeneous state observer dependent on L , Lyapunov-Krasovskii functional, and an output feedback controller are designed to make the nonlinear system asymptotically stable.

Key words time delays in state and input; output function; output feedback; homogeneous domination approach; globally asymptotical stability

收稿日期: 2024-01-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(62103175)资助

通信作者: 蒋蒙蒙, 女, 汉族, 博士, 讲师, 研究方向: 复杂系统智能分析与控制, E-mail: jmm725@163.com。

0 引言

非线性系统的控制问题一直是控制领域的研究热点。自状态空间的概念引入控制领域以来,科研工作者们取得了许多关于非线性系统状态反馈控制的研究成果^[1-7]。然而,对于一个实际的系统,有时仅有部分状态可以通过测量输出获得,而大多数状态很难直接测量,甚至无法测量。因此,研究具有估计状态的非线性系统的输出反馈控制更具有实际意义,这也引起了研究者的极大兴趣,并取得了一定的研究成果^[8-14]。众所周知,具有时滞的系统会更符合实际系统的建模,但时滞往往会导致系统的不稳定,特别是输入中的时滞。鉴于此,非线性时滞系统的输出反馈控制问题已成为控制理论领域的研究热点,众多学者对此进行了深入探索^[15-20]。

当系统的输出函数确定时,Zhai 等人^[15]研究了系统中不包含时滞的全局渐近稳定输出反馈控制器设计,而包含时滞的全局渐近稳定输出反馈控制器设计由 Zhao 等人^[21]给出。在实际情况下,由于使用了传感器,传感器输出(如传感器的电压输出)与系统物理量(如位移、角度、温度)之间的关系通常是非线性、不确定和可变的。Yan 等人^[22]研究的单链路机器人系统和 Li 等人^[23]讨论的 DC-DC 降压功率转换器显示出与最简单的输出函数的偏差。因此,研究重点关注输出函数未知的非线性系统,从而取得了一些成果,这其中的困难在于处理未知的输出函数。Yan 等人^[24,25]通过限制输出函数的增长率来解决这个问题,从而构建了输出反馈控制器,以确定非线性系统的渐近稳定性。Ai 等人^[14]利用通用控制的概念和反步方法,设计了一种输出函数未知的非线性时滞系统的自适应输出反馈控制器。此外,Zhai 等人^[26]通过设计一个尺度齐次控制器,提出了一个全局有限时间稳定器。

当系统的输出函数不确定时,Zhai 等人^[27]研究了不具有时滞的非线性系统的输出反馈稳定问题,而 Jiang 等人^[28]考虑的也仅是非线性函数中具有时滞项,积分器和输入中不具有时滞项。

基于上述结果,可以提出一个有意义的问题:对于积分器中含有时滞项且输出未知的系统,能否设计一个输出反馈控制器?

本文通过构造合适的 Lyapunov 函数和观测器,巧妙地结合增加幂次积分法、符号函数和齐次占优法,设计了一个输出反馈控制器,以保证系统的全局渐近稳定性,从而基本上可以解决这个问题。主要的贡献有(1)与文献[15,21]中已有的结果相比,本文考虑了输出为更一般的未知函数的情形。在未知输出函数的导数有界的条件下,可以设计一个基于 y 的输出反馈控制器来保证非线性时滞系统的全局渐近稳定性。(2)与文献[27,28]中已有的结果相比,本文所考虑的时滞系统模型更具一般性。具体而言,本文不仅考虑了积分器和非线性函数中的时滞项,还涉及了输入中的时滞影响,这无疑增加了系统的不稳定性。因此,如何有效应对时滞带来的不利影响,并提升时滞系统的整体性能,成为本研究面临的关键挑战。

1 问题陈述

考虑以下不确定非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_i(t) &= \eta_{i+1}(t - d_{i+1}) + f_i(\boldsymbol{\eta}(t), \eta_1(t - d_1), \dots, \eta_i(t - d_i), v(t - d_0)), i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\eta}_n(t) &= v(t - d_0), \\ y &= h(\eta_1(t)),\end{aligned}\quad (1)$$

式中 $v \in \mathbf{R}$ 是控制输入, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, $y \in \mathbf{R}$ 是系统输出, 实常数 $d_0 > 0, d_i \geq 0$ 是已知时滞, 其中 $d_1 = 0$ 。系统的初始条件是对于任意 $\theta \in [-d, 0]$ ($d = \max\{d_1, \dots, d_n\}$), $\eta(\theta) = \omega_0(\theta)$ 并且 $\omega_0(\theta)$ 是一个特定的连续函数。输出函数 $h(\cdot)$ 满足 $h(0) = 0$, 是一个连续可微的未知输出函数。对于 $i = 1, \dots, n$, $f_i: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续可微函数, 其中 $f_i(0, 0, 0, \dots, 0) = 0$ 。

本文的目的是为系统(1)构造一个全局输出反馈控制器。为了达到这个目的,需要做出以下假设。

假设 1^[21] 对于 $i = 1, \dots, n-1$, 存在实常数 $\bar{c} \geq 0$ 使得

$$|f_i(\cdot)| \leq \bar{c} \left(\sum_{j=i+2}^{n+1} (|\eta_j(t)|^{\frac{r_i}{r_j}} + |\eta_j(t-d_j)|^{\frac{r_i}{r_j}} + |v(t-d_0)|^{\frac{r_i}{r_{n+1}}}) \right), \quad (2)$$

式中 $\eta_{n+1}(t)=0, \eta_{n+1}(t-d_{n+1})=0$ 且

$$r_1=1, r_{i+1}=r_i+\tau. \quad (3)$$

假设 2^[28] 存在两个已知常数 $\underline{\zeta}$ 和 $\bar{\zeta}$ 使得

$$0 < \underline{\zeta} \leq \frac{\partial h(s)}{\partial s} \leq \bar{\zeta}, \quad \forall s \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

注 1 假设 1 是一种常用的齐次增长条件。当 $\tau=0, r_{i+1}=\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_i}$ 时,此条件与 Zhao 等人^[21]研究内容的条件相同。假设 2 是关于未知输出函数的假设。易知条件(4)是对具有有界一阶可导的非线性输出函数的自然假设,如 $h(\eta_1)=3\eta_1+\sin\eta_1$ 等。

2 预备知识

下面给出本文用到的一些关键定义和引理。

符号函数 $\text{sgn}(x)$ 定义为:如果 $x > 0$, 则 $\text{sgn}(x)=1$; 如果 $x=0$, 则 $\text{sgn}(x)=0$; 如果 $x < 0$, 则 $\text{sgn}(x)=-1$ 。 K 表示定义在 $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, 连续、严格递增且在零处消失的所有函数的集合。 K_∞ 表示 K 类无界的所有函数的集合。

定义 1 对实数 $r_i > 0, i=1, \dots, n$, 固定坐标 $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

(1) 扩张 $\Delta_\varepsilon(\mathbf{x})$ 定义为 $\Delta_\varepsilon(\mathbf{x})=(\varepsilon^{r_1}x_1, \dots, \varepsilon^{r_n}x_n)$, $\forall \varepsilon > 0$, 其中 r_i 称为分量的权, 简记 $\Delta=(r_1, \dots, r_n)$ 。

(2) 若存在 $\tau \in \mathbf{R}$, 使得函数 $V \in (C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}))$, 对 $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $V(\Delta_\varepsilon(\mathbf{x}))=\varepsilon^\tau V(x_1, \dots, x_n)$, 则称 V 是齐次的且度为 τ 。

(3) 若存在 $\tau \in \mathbf{R}$, 使得向量场 $f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, 对 $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $f_i(\Delta_\varepsilon(\mathbf{x}))=\varepsilon^{\tau+r_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i=1, \dots, n$, 则称 f 是齐次的且度为 τ 。

(4) 齐次 p -范数: 对 $p \geq 1$, 定义 $\|\cdot\|_{\Delta, p}=(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{r_i}})^{\frac{1}{p}}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 。为了简便, 当 $p=2$ 时, 记 $\|\cdot\|_{\Delta, 2}$ 为 $\|\cdot\|_\Delta$ 。

引理 1(Young's 不等式) 如果实数 $p \geq 1$ 和 $q \geq 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对任意给定的正常数 $\gamma > 0$, 有

$$xy \leq \gamma |x|^p + \frac{1}{\gamma} (p\gamma)^{-\frac{q}{p}} |y|^q。$$

引理 2^[27] 对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 如果 $p \geq 1$, 则 $|x+y|^{\frac{1}{p}} \leq |x|^{\frac{1}{p}} + |y|^{\frac{1}{p}}, |x+y|^p \leq 2^{p-1} |x^p + y^p|$ 。

引理 3^[9] 如果 $p=\frac{b_1}{b_0} \in \mathbf{R}_{\text{odd}}^{\geq 1}, b_1 \geq b_0 \geq 1$, 且 $a \geq 1$ 是任意实数, 则对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有

$$\begin{aligned} |x^p - y^p| &\leq 2^{1-\frac{1}{b_0}} |\text{sgn}(x)|x|^{b_1} - \text{sgn}(y)|y|^{b_1}|^{\frac{1}{b_0}}, \\ |\text{sgn}(x)|x|^{\frac{1}{a}} - \text{sgn}(y)|y|^{\frac{1}{a}}| &\leq 2^{1-\frac{1}{a}} |x-y|^{\frac{1}{a}}。 \end{aligned}$$

引理 4^[13] 如果 $a \geq 1$ 是任意给定的有理数, 则存在依赖于 a 的常数 $c_0(a) > 0$ 和 $0 < d(a) \leq 1$ 使得对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 有 $|\text{sgn}(x)|x|^a - \text{sgn}(y)|y|^a| \leq c_0 |x-y|^d (|x-y|^{a-d} + |y|^{a-d})$ 。

引理 5^[13] $f(x)=\text{sgn}(x)|x|^a$ 是连续可微的, 且 $\dot{f}(x)=a|x|^{a-1}$, 其中 $a \geq 1, x \in \mathbf{R}$ 。如果 $x=x(t)$,

$t \geq 0$, 则 $\frac{df(x(t))}{dt} = a |x(t)|^{a-1} \dot{x}(t)$ 。

引理 6^[27] 考虑扩张 Δ_ϵ 齐次系统

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0. \quad (5)$$

设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续向量场, 原点为局部渐近稳定的平衡点。设 f 是齐次的且度为 k , 任意 $p \in \mathbf{N}^*$ 和 $m > p \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \{r_i\}$, 系统(5)存在正定的 p 次连续可微的度为 m 的 Lyapunov 函数 V , 则 $\dot{V}$ 是齐次的且度为 $m+k$ 。

引理 7 设 $V(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是关于 Δ 齐次的且度为 τ 函数, 则

(1)^[3] $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ 的度为 $\tau - r_i$, 其中 r_i 为 x_i 的权;

(2)^[3] 给定一个正定函数 $H: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 其相对于扩张 Δ 齐次且度为 τ , 则存在一个常数 $c > 0$, 使 $V(x) \leq cH(x)$ 。

(3)^[27] 存在一个常数 σ 使得 $V(x) \leq \sigma \| \cdot \|_\Delta^\tau$; 此外, 如果 $V(x)$ 是正定的, 则对于一个常数 $\underline{\sigma} > 0$, $\underline{\sigma} \| \cdot \|_\Delta^\tau \leq V(x)$ 。

3 控制器设计和稳定性分析

首先定义

$$\begin{aligned} \varphi_i(\eta_{i+1}(t), \eta_{i+1}(t-d_{i+1})) &= \eta_{i+1}(t-d_{i+1}) - \eta_{i+1}(t), i=1, \dots, n-1, \\ \varphi_n(v(t), v(t-d_0)) &= v(t-d_0) - v(t), \end{aligned} \quad (6)$$

则系统(1)可以改写为

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i(t) &= \eta_{i+1}(t) + \varphi_i(\eta_{i+1}(t), \eta_{i+1}(t-d_{i+1})) + f_i(\eta(t), \eta_1(t-d_1), \dots, \eta_i(t-d_i), v(t-d_0)), \\ i &= 1, \dots, n-1, \\ \dot{\eta}_n(t) &= v(t) + \varphi_n(v(t), v(t-d_0)), \\ y &= h(\eta_1(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

3.1 系统(7)的标称系统的控制器设计

3.1.1 观测器设计。考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, i=1, \dots, n-1, \\ \dot{z}_n &= u, \\ y &= h(z_1), \end{aligned} \quad (8)$$

式中输出函数 $h(z_1)$ 是未知的。因此, 即使输出 y 可用, 状态 z_1 也不是完全已知的。在构造观测器之前, 首先引入一个引理。

引理 8^[28] 存在增益 γ_i 使得以下系统是全局渐近稳定的

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1} - \gamma_i \lceil e_1 \rceil^{r_{i+1}}, i=1, \dots, n-1, \\ \dot{e}_n &= -\gamma_n \lceil e_1 \rceil^{r_{n+1}}, \end{aligned} \quad (9)$$

式中 r_i 如(3)中所定义。

根据齐次性的定义, 我们可知系统(9)是关于 $(r_1, \dots, r_n)$ 、度为 τ 齐次。此外, 由引理 6、引理 8 可知, 存在一个与系统(9)有相同的权 $(r_1, \dots, r_n)$, 度为 $\rho = 2\max_{1 \leq i \leq n} \{r_i\}$ 的正定的齐次 Lyapunov 函数 $W(e)$ 使得

$$\dot{W}(e) = \dot{W}(e_1, \dots, e_n) \leq - \sum_{i=1}^n |e_i|^{\frac{\rho+\tau}{r_i}}. \quad (10)$$

根据引理 7, 存在常数 $\gamma_i > 0, i=1, \dots, n$, 使得

$$\left| \frac{\partial W}{\partial e_i} \right| \leq (\gamma_i |e_1|^{\frac{\rho-r_i}{r_1}} + |e_2|^{\frac{\rho-r_i}{r_2}} + \cdots + |e_n|^{\frac{\rho-r_i}{r_n}}). \quad (11)$$

现在为标称系统(9)设计如下观测器

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_i &= \hat{z}_{i+1} - \gamma_i [\hat{z}_1]^{r_{i+1}}, i=1, \cdots, n-1, \\ \dot{\hat{z}}_n &= u - \gamma_n [\hat{z}_1]^{r_{n+1}}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中 r_i 如(3)中所定义, $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 为依据引理 8 选取的常数。定义误差 $e_i = z_i - \hat{z}_i, i=1, \cdots, n$, 将(8)与(12)结合, 得到了误差方程

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1} - \gamma_i [e_1]^{r_{i+1}} + \gamma_i ([\hat{z}_1]^{r_{i+1}} + [\hat{z}_1 - \hat{z}_1]^{r_{i+1}}), i=1, \cdots, n-1, \\ \dot{e}_n &= -\gamma_n [e_1]^{r_{n+1}} + \gamma_n ([\hat{z}_1]^{r_{n+1}} + [\hat{z}_1 - \hat{z}_1]^{r_{n+1}}). \end{aligned} \quad (13)$$

接下来通过以下命题来说明 $W(e)$ 沿着(13)的时间导数所满足的不等式。

命题 1^[28] 存在一个正常数 χ 使得

$$\dot{W}(e) |_{(12)} \leq -\frac{3}{4} \sum_{i=1}^n |e_i|^{\frac{\rho+\tau}{r_i}} + \chi |z_1|^{\rho+\tau}, \quad (14)$$

式中函数 $W(e)$ 如(10)中所定义。

3.1.2 控制器设计。

第 1 步: 利用上述准备工作, 构造以下 Lyapunov 函数

$$V_1(e, y) = W(e) + \int_0^y [s]^{\rho-1} ds, \quad (15)$$

式中 $\rho = 2\max_{1 \leq i \leq n} \{r_i\}$, 显然, 它对于 (e, y) 正定且径向无界。通过式(8)、式(14)和 $z_2 = \hat{z}_2 + e_2$, 有

$$\dot{V}_1 |_{(13)} = \dot{W}(e) |_{(13)} + [y]^{\rho-1} \dot{y} \leq -\frac{3}{4} \sum_{i=1}^n |e_i|^{\frac{\rho+\tau}{r_i}} + \chi |z_1|^{\rho+\tau} + [y]^{\rho-1} \frac{\partial h}{\partial z_1} (\hat{z}_2 + e_2). \quad (16)$$

根据假设 2 和引理 1 可得

$$[y]^{\rho-1} \frac{\partial h}{\partial z_1} e_2 \leq \bar{\zeta} |y|^{\rho-1} (|e_2|^{\frac{1}{r_2}})^{1+\tau} \leq \frac{1}{4} |e_2|^{\frac{\rho+\tau}{r_2}} + \kappa_0 |y|^{\rho+\tau}, \quad (17)$$

式中 κ_0 是一个正常数。依据假设 2 可得

$$(\bar{\zeta})^{-(\rho+\tau)} |y|^{\rho+\tau} \leq |z_1|^{\rho+\tau} \leq (\underline{\zeta})^{-(\rho+\tau)} |y|^{\rho+\tau}. \quad (18)$$

将式(17)和式(18)代入式(16)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -\frac{3}{4} |e_1|^{\rho+\tau} - \frac{1}{2} |e_2|^{\frac{\rho+\tau}{r_2}} - \frac{3}{4} \sum_{i=3}^n |e_i|^{\frac{\rho+\tau}{r_i}} + (\chi \underline{\zeta}^{-(\rho+\tau)} + \kappa_0) |y|^{\rho+\tau} \\ &\quad + [y]^{\rho-1} \frac{\partial h}{\partial z_1} \cdot (\hat{z}_2 - \hat{z}_2^*) + [y]^{\rho-1} \frac{\partial h}{\partial z_1} \hat{z}_2^*. \end{aligned} \quad (19)$$

令 $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} \{1, i\tau + 1\} = n\tau + 1 = r_{n+1}$, $\omega_1 = [y]^{\frac{\delta}{r_1}}$ 。构造虚拟控制器

$$\hat{z}_2^* = -e_1 [y]^{r_2} = -e_1 [\omega_1]^{\frac{r_2}{a}}, e_1 = \frac{(n + \chi \underline{\zeta}^{-(\rho+\tau)} + \kappa_0)}{\underline{\zeta}}, \quad (20)$$

由此可得

$$\dot{V}_1 \leq -\frac{3}{4} |e_1|^{\rho+\tau} - \frac{1}{2} |e_2|^{\frac{\rho+\tau}{r_2}} - \frac{3}{4} \sum_{i=3}^n |e_i|^{\frac{\rho+\tau}{r_i}} - n |\zeta_1|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}} + [y]^{\rho-1} \frac{\partial h}{\partial z_1} (\hat{z}_2 - \hat{z}_2^*). \quad (21)$$

第 2 步: 选择如下 Lyapunov 函数:

$$V_2(e, y, \hat{z}_2) = V_1 + \int_{\hat{z}_2^*}^{\hat{z}_2} [s]^{\frac{\delta}{r_2}} - [\hat{z}_2^*]^{\frac{\delta}{r_2}}]^{\frac{\rho-r_2}{\delta}} ds. \quad (22)$$

令 $\omega_2 = [\hat{z}_2]^{\frac{\delta}{r_2}} - [\hat{z}_2^*]^{\frac{\delta}{r_2}}$ 。根据式(12)、式(20)~(22)和引理 5 可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \left[\left| \hat{z}_2 \right|^{\frac{\delta}{r_2}} - \left| \hat{z}_2^* \right|^{\frac{\delta}{r_2}} \right]^{\frac{\rho-r_2}{\delta}} - \frac{\rho-r_2}{\delta} \int_{\hat{z}_2^*}^{\hat{z}_2} \left| \left| s \right|^{\frac{\delta}{r_2}} - \left| \hat{z}_2^* \right|^{\frac{\delta}{r_2}} \right|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}-1} ds \frac{\partial \left| \hat{z}_2 \right|^{\frac{\delta}{r_2}}}{\partial y} \dot{y} \\
&\leq -\frac{3}{4} |e_1|^{\rho+\tau} - \frac{1}{2} |e_2|^{\frac{\rho+\tau}{r_2}} - \frac{3}{4} \sum_{i=3}^n |e_i|^{\frac{\rho+\tau}{r_i}} - n |\omega_1|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}} + \frac{\rho-r_2}{\delta} (\hat{z}_3 - \hat{z}_3^*) \\
&\quad + \left| \omega_2 \right|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}} \hat{z}_3^* + \left| y \right|^{\rho-1} \frac{\partial h}{\partial z_1} (\hat{z}_2 - \hat{z}_2^*) - \gamma_2 \left| \omega_2 \right|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}} \left| \hat{z}_1 \right|^{r_3} - \frac{\rho-r_2}{\delta} \int_{\hat{z}_2^*}^{\hat{z}_2} \left| \left| s \right|^{\frac{\delta}{r_2}} - \left| \hat{z}_2^* \right|^{\frac{\delta}{r_2}} \right|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}-1} ds \frac{\partial \left| \hat{z}_2 \right|^{\frac{\delta}{r_2}}}{\partial y} \dot{y} \\
&\quad - \left| \hat{z}_2^* \right|^{\frac{\delta}{r_2}} \left| \left| s \right|^{\frac{\delta}{r_2}} - \left| \hat{z}_2^* \right|^{\frac{\delta}{r_2}} \right|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}-1} ds \frac{\partial \left| \hat{z}_2 \right|^{\frac{\delta}{r_2}}}{\partial y} \dot{y}.
\end{aligned} \tag{23}$$

接下来估计(23)的最后三项。根据假设 2 和引理 1、2, 存在一个正数 κ_1 使得

$$\left| y \right|^{\rho-1} \frac{\partial h}{\partial z_1} (\hat{z}_2 - \hat{z}_2^*) \leq 2^{1-\frac{r_2}{\delta}} \bar{e} |y|^{\rho-1} \left| \left| \hat{z}_2 \right|^{\frac{\delta}{r_2}} - \left| \hat{z}_2^* \right|^{\frac{\delta}{r_2}} \right|^{\frac{r_2}{\delta}} \leq \frac{1}{3} |\omega_1|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}} + \kappa_1 |\omega_2|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}}. \tag{24}$$

通过引理 1、2 和式(18)可以得到

$$\begin{aligned}
-\gamma_2 \left| \omega_2 \right|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}} \left| \hat{z}_1 \right|^{r_3} &\leq \gamma_2 g_1 |\omega_2|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}} (|\hat{z}_1|^{r_3} + |e_1|^{r_3}) \\
&\leq \gamma_2 g_1 \zeta^{-r_3} |\omega_2|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}} |\omega_1|^{\frac{r_3}{\delta}} + \gamma_2 g_1 |\omega_2|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}} |e_1|^{r_3} \\
&\leq \frac{1}{3} |\omega_1|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}} + \frac{1}{2n} |e_1|^{\rho+\tau} + \kappa_2 |\omega_2|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}},
\end{aligned} \tag{25}$$

式中 $g_1 > 0$ 和 $\kappa_2 > 0$ 是常数。根据 $\left| \hat{z}_2^* \right|^{\frac{\delta}{r_2}} = -e_1'^2 \left| y \right|^{\delta}$, 引理 1、2、假设 2 和式(24)可得

$$\begin{aligned}
&-\frac{\rho-r_2}{\delta} \int_{\hat{z}_2^*}^{\hat{z}_2} \left| \left| s \right|^{\frac{\delta}{r_2}} - \left| \hat{z}_2^* \right|^{\frac{\delta}{r_2}} \right|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}-1} ds \frac{\partial \left| \hat{z}_2 \right|^{\frac{\delta}{r_2}}}{\partial y} \dot{y} \\
&\leq \frac{\rho-r_2}{\delta} \left| \left| \hat{z}_2 \right|^{\frac{\delta}{r_2}} - \left| \hat{z}_2^* \right|^{\frac{\delta}{r_2}} \right|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}-1} |\hat{z}_2 - \hat{z}_2^*| \left| \frac{\partial \left| \hat{z}_2 \right|^{\frac{\delta}{r_2}}}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial h}{\partial z_1} \right| |\hat{z}_2 + e_2| \\
&\leq \frac{1}{3} |\omega_1|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}} + \frac{1}{2n} |e_2|^{\frac{\rho+\tau}{r_2}} + \kappa_3 |\omega_2|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}},
\end{aligned} \tag{26}$$

式中 g_2 和 κ_3 是正常数。

将式(24)~(26)代入式(23)可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq -\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4n}\right) |e_1|^{\rho+\tau} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4n}\right) |e_2|^{\frac{\rho+\tau}{r_2}} - \frac{3}{4} \sum_{i=3}^n |e_i|^{\frac{\rho+\tau}{r_i}} - (n-1) |\omega_1|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}} \\
&\quad + \left| \omega_2 \right|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}} (\hat{z}_3 - \hat{z}_3^*) + \left| \omega_2 \right|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}} \hat{z}_3^* + (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) |\omega_2|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}}.
\end{aligned} \tag{27}$$

通过构造虚拟控制器 $\hat{z}_3^* = -e_2 \left| \omega_2 \right|^{\frac{r_3}{\delta}}$, $e_2 = n-1 + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$, 式(27)变为

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq -\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4n}\right) |e_1|^{\rho+\tau} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4n}\right) |e_2|^{\frac{\rho+\tau}{r_2}} - \frac{3}{4} \sum_{i=3}^n |e_i|^{\frac{\rho+\tau}{r_i}} \\
&\quad - (n-1) (|\omega_1|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}} + |\omega_2|^{\frac{\rho+\tau}{\delta}}) + \left| \omega_2 \right|^{\frac{\rho-r_2}{\delta}} (\hat{z}_3 - \hat{z}_3^*).
\end{aligned} \tag{28}$$

重复相同的步骤, 在第 n 步, 我们可知存在正定的 Lyapunov 函数

$$V_n(e, y, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n) = W(e) + \int_0^y \left| s \right|^{m-1} ds + \sum_{k=2}^n \int_{\hat{z}_k^*}^{\hat{z}_k} \left| \left| s \right|^{\frac{\delta}{r_k}} - \left| \hat{z}_k^* \right|^{\frac{\delta}{r_k}} \right|^{\frac{\rho-r_k}{\delta}} ds, \tag{29}$$

和虚拟控制器

$$\hat{z}_1^* = 0, \omega_1 = \left| y \right|^{\frac{\delta}{r_1}} - \left| \hat{z}_1^* \right|^{\frac{\delta}{r_1}}, \hat{z}_j^* = -e_{j-1} \left| \omega_{j-1} \right|^{\frac{r_j}{\delta}}, \omega_j = \left| \hat{z}_j \right|^{\frac{\delta}{r_j}} - \left| \hat{z}_j^* \right|^{\frac{\delta}{r_j}}, j=2, \dots, n+1, \tag{30}$$

式中 $\zeta_{n+1}=0$, $u=\hat{x}_{n+1}$, 有

$$\dot{V}_n \leq -\frac{1}{2} \|e_1\|^{\rho+\tau} - \frac{1}{4} \|e_2\|^{\frac{\rho+\tau}{r_2}} - \frac{3}{4} \sum_{i=3}^n \|e_i\|^{\frac{\rho+\tau}{r_i}} - \sum_{i=1}^n \|\omega_i\|^{\frac{\rho+\tau}{\alpha}}. \quad (31)$$

由式(31),得到最终的控制器

$$u(t) = -\varrho_n \left[\hat{z}_n^{\frac{\delta}{r_n}} + \varrho_{n-1}^{\frac{\delta}{r_{n-1}}} \left[\hat{z}_{n-1}^{\frac{\delta}{r_{n-1}}} + \cdots + \varrho_2^{\frac{\delta}{r_2}} \left[\hat{z}_2^{\frac{\delta}{r_2}} + \varrho_1^{\frac{\delta}{r_1}} y^{\frac{\delta}{r_1}} \right] \cdots \right] \right], \quad (32)$$

式中 $\varrho_1 > 0, \dots, \varrho_n > 0$.

显然,式(31)的右边是负定的。因此,闭环系统(8),(12)和(32)是全局渐近稳定的。

定义 $\mathbf{Z} = [e_1, \dots, e_n, y, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n]^T$ 。对于 $\mathbf{Z}$ 很容易验证 V_n 正定且径向无界。现在选择扩张权系数

$$\begin{aligned} \Delta &= (r_1, r_2, \dots, r_{2n}) = (\Delta_e, \Delta_{\hat{z}}), \\ \Delta_e &= (1, \tau + 1, \dots, (n-1)\tau + 1), \\ \Delta_{\hat{z}} &= (1, \tau + 1, \dots, (n-1)\tau + 1). \end{aligned} \quad (33)$$

根据齐次性的定义,可知 $V_n(\mathbf{Z})$ 是关于 Δ 、度为 ρ 的齐次函数。利用引理7和齐次 p 范数的定义,可得一个常数 $M_2 > 0$ 使得

$$\left| \frac{\partial V_n(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}_i} \right| \leq M_2 \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho-r_i}, \quad i=1, \dots, 2n. \quad (34)$$

根据 $\mathbf{Z}$ 的定义,可以将闭环系统(12)、(13)、(32)改写为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}} &= \mathbf{G}(\mathbf{Z}), \\ G_i &= e_{i+1} + \gamma_i [z_1 - e]^{\tau_{i+1}} = e_{i+1} + \gamma_i [h^{-1}(y) - e_1]^{\tau_{i+1}}, \quad i=1, \dots, n-1, \\ G_n &= \gamma_n [z_1 - e_1]^{\tau_{n+1}} = \gamma_n [h^{-1}(y) - e_1]^{\tau_{n+1}}, \\ G_{n+1} &= \frac{\partial h}{\partial z_1}(\hat{z}_2 + e_2), \\ G_{n+i} &= \hat{z}_{i+1} - \gamma_i [z_1 - e_1]^{\tau_{i+1}} = \hat{z}_{i+1} - \gamma_i [h^{-1}(y) - e_1]^{\tau_{i+1}}, \quad i=2, \dots, n-1, \\ G_{2n} &= u(y, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n) - \gamma_n [z_1 - e_1]^{\tau_{n+1}} = u(y, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n) - \gamma_n [h^{-1}(y) - e_1]^{\tau_{n+1}}. \end{aligned} \quad (35)$$

由于式(31)的右侧是负定且度为 $\rho + \tau$ 的齐次函数。根据引理7可知,存在一个常数 $M_1 > 0$ 使得

$$\dot{V}_n(\mathbf{Z})|_{(35)} = \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{Z}} \mathbf{G}(\mathbf{Z}) \leq -M_1 \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho+\tau}. \quad (36)$$

3.2 系统(1)的控制器设计和稳定性分析

下面陈述本文的主要结果。

定理1 在假设1,2下,通过坐标变换引入增益 L ,构造依赖于 L 的齐次状态观测器, Lyapunov-Krasovskii 泛函,基于增加幂次积分法和齐次占优法,就可以设计一个输出反馈控制器,确保系统(1)全局渐近稳定。

证 下面将应用齐次控制的方法来设计控制器和观测器。首先引入一个坐标变换

$$z_i = \frac{\eta_i}{L^{i-1}}, \quad i=1, \dots, n, \quad u = \frac{v}{L^n}, \quad (37)$$

式中 $L \geq 1$ 是待确定的常数,系统(1)可以改写为

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= L z_{i+1} + \frac{\varphi_i(\cdot)}{L^{i-1}} + \frac{f_i(\cdot)}{L^{i-1}}, \quad i=1, \dots, n-1, \\ \dot{z}_n &= L u + \frac{\varphi_n(\cdot)}{L^{n-1}}. \end{aligned} \quad (38)$$

将观测器(12)中引入相同的增益 L ,即得到系统(38)的观测器

$$\begin{aligned}\hat{z}_i^{\lambda} &= L(\hat{z}_{i+1} - \gamma_i \lceil \hat{z}_1 \rceil^{r_{i+1}}), \quad i=1, \dots, n-1, \\ \hat{z}_n^{\lambda} &= L(u - \gamma_n \lceil \hat{z}_1 \rceil^{r_{n+1}}).\end{aligned}\quad (39)$$

进而得到系统(1)的控制器

$$v(t) = L^n u(t), u(t) = -e_n \lceil \hat{z}_n \rceil^{\frac{\delta}{r_n}} + e_{n-1}^{\frac{\delta}{r_{n-1}}} \lceil \hat{z}_{n-1} \rceil^{\frac{\delta}{r_{n-1}}} + \dots + e_2^{\frac{\delta}{r_2}} \lceil \hat{z}_2 \rceil^{\frac{\delta}{r_2}} + e_1^{\frac{\delta}{r_1}} \lceil y \rceil^{\delta} \lceil \dots \rceil. \quad (40)$$

利用 $\mathbf{Z}$ 和 $G(\mathbf{Z})$ 的相同定义, 式(38)~(40)可以改为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Z}} &= LG(\mathbf{Z}) + [\varphi_1(\cdot), \frac{\varphi_2(\cdot)}{L}, \dots, \frac{\varphi_{n-1}(\cdot)}{L^{n-2}}, \frac{\varphi_n(\cdot)}{L^{n-1}}, \frac{\partial h}{\partial z_1} \varphi_1(\cdot), 0, \dots, 0]^T \\ &\quad + [f_1(\cdot), \frac{f_2(\cdot)}{L}, \dots, \frac{f_{n-1}(\cdot)}{L^{n-2}}, 0, \frac{\partial h}{\partial z_1} f_1(\cdot), 0, \dots, 0]^T.\end{aligned}\quad (41)$$

对系统(1)中选取相同的 Lyapunov 函数 V_n , 由式(36)和式(41)得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_n|_{(41)} &= \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{Z}} LG(\mathbf{Z}) + \frac{\partial V_n(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} [\varphi_1(\cdot), \frac{\varphi_2(\cdot)}{L}, \dots, \frac{\varphi_{n-1}(\cdot)}{L}, \frac{\varphi_n(\cdot)}{L^{n-1}}, \frac{\partial h}{\partial z_1} \varphi_1(\cdot), 0, \dots, 0]^T \\ &\quad + \frac{\partial V_n(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} [f_1(\cdot), \frac{f_2(\cdot)}{L}, \dots, \frac{f_{n-1}(\cdot)}{L^{n-2}}, 0, \frac{\partial h}{\partial z_1} f_1(\cdot), 0, \dots, 0]^T \\ &\leq -LM_1 \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{Z}_i} \frac{\varphi_i(\cdot)}{L^{i-1}} + \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{Z}_{n+1}} \frac{\partial h}{\partial z_1} \cdot \varphi_1(\cdot) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{Z}_i} \frac{f_i(\cdot)}{L^{i-1}} + \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{Z}_{n+1}} \frac{\partial h}{\partial z_1} f_1(\cdot).\end{aligned}\quad (42)$$

根据 $\tau \geq 0, L \geq 1$, 引理 1、2、式(6), (34)可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{Z}_i} \frac{\varphi_i}{L^{i-1}} &\leq LM_2 \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho-r_i} |z_{i+1}(t) - z_{i+1}(t-d_{i+1})|^{\frac{r_i+\tau}{r_{i+1}}} \\ &\leq LM_2 c_i \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho-r_i} (|z_{i+1}(t)|^{\frac{r_i+\tau}{r_{i+1}}} + |z_{i+1}(t-d_{i+1})|^{\frac{r_i+\tau}{r_{i+1}}}) \\ &\leq LM_2 c_i \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho-r_i} (|e_{i+1}(t) + \hat{z}_{i+1}(t)|^{\frac{r_i+\tau}{r_{i+1}}} + |e_{i+1}(t-d_{i+1}) + \hat{z}_{i+1}(t-d_{i+1})|^{\frac{r_i+\tau}{r_{i+1}}}) \\ &\leq LM_2 c_i \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho-r_i} (|e_{i+1}|^{\frac{r_i+\tau}{r_{i+1}}} + |\hat{z}_{i+1}|^{\frac{r_i+\tau}{r_{i+1}}} + |e_{i+1}(t-d_{i+1})|^{\frac{r_i+\tau}{r_{i+1}}} + |\hat{z}_{i+1}(t-d_{i+1})|^{\frac{r_i+\tau}{r_{i+1}}}) \\ &\leq LM_2 c_i \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho-r_i} (\|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\frac{r_i+\tau}{r_{i+1}}} + \|\mathbf{Z}(t-d_{i+1})\|_{\Delta}^{\frac{r_i+\tau}{r_{i+1}}}) \\ &\leq L^{\frac{1}{1-r_{i+1}}} M_2 c_i \sum_{i=1}^{n-1} (\|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + \|\mathbf{Z}(t-d_{i+1})\|_{\Delta}^{\rho+\tau}),\end{aligned}\quad (43)$$

式中 c_i 是正常数。从式(6), 式(34)和引理 1、2 中可知, 对于 $i=n$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{Z}_n} \frac{\varphi_n}{L^{n-1}} &\leq LM_2 \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho-r_n} |u - u(t-d_{n+1})|^{\frac{r_n+\tau}{r_{n+1}}} \\ &\leq LM_2 c_n \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho-r_n} (\|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\frac{r_n+\tau}{r_{n+1}}} + \|\mathbf{Z}(t-d_{n+1})\|_{\Delta}^{\frac{r_n+\tau}{r_{n+1}}}) \\ &\leq L^{\frac{1}{1-r_{n+1}}} M_2 c_n (\|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + \|\mathbf{Z}(t-d_{n+1})\|_{\Delta}^{\rho+\tau}),\end{aligned}\quad (44)$$

式中 c_n 是正常数。根据式(4), (6)以及(34)和引理 1、2, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{Z}_{n+1}} \frac{\partial h}{\partial z_1} \varphi_1(\cdot) &\leq LM_2 \bar{\xi} \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho-r_1} |z_2 - z_2(t-d_2)|^{\frac{r_1+\tau}{r_2}} \\ &\leq LM_2 c_1 \bar{\xi} \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho-r_1} (\|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\frac{r_1+\tau}{r_2}} + \|\mathbf{Z}(t-d_2)\|_{\Delta}^{\frac{r_1+\tau}{r_2}}) \\ &\leq LM_2 c_1 \bar{\xi} (\|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + \|\mathbf{Z}(t-d_2)\|_{\Delta}^{\rho+\tau}).\end{aligned}\quad (45)$$

由 $\tau \geq 0, L \geq 1$ 、引理 1、2 可以得出

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_i(\cdot)}{L^{i-1}} \right| &\leq \bar{c} L^{1-\frac{1}{r_i}} \sum_{j=i+2}^{n+1} (|z_j(t)|^{\frac{r_i}{r_j}} + |z_j(t-d_j)|^{\frac{r_i}{r_j}} + |u(t-d_0)|^{\frac{r_i}{r_{n+1}}}) \\ &\leq c_i L^{1-\frac{1}{r_i}} (\|Z\|_{\Delta}^{r_i+\tau} + \|Z(t-d_i)\|_{\Delta}^{r_i+\tau} + \|Z(t-d_0)\|_{\Delta}^{r_{i-1}+\tau}). \end{aligned} \quad (46)$$

根据假设 1, 由(46)可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V_n}{\partial Z_i} \frac{f_i(\cdot)}{L^{i-1}} &\leq \left| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V_n}{\partial Z_i} \frac{f_{i+1}(\cdot)}{L^i} \right| \\ &\leq c_i L^{1-\frac{1}{r_{i+1}}} M_2 \sum_{i=1}^{n-1} \|Z\|_{\Delta}^{\rho-r_i} (\|Z\|_{\Delta}^{r_i+\tau} + \|Z(t-d_i)\|_{\Delta}^{r_i+\tau} + \|Z(t-d_0)\|_{\Delta}^{r_{i-1}+\tau}) \quad (47) \\ &\leq c_i L^{1-\frac{1}{r_{i+1}}} M_2 \sum_{i=1}^{n-1} (\|Z\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + \|Z(t-d_i)\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + \|Z(t-d_0)\|_{\Delta}^{\rho+\tau}), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n}{\partial Z_{n+1}} \frac{\partial h}{\partial z_1} f_1(\cdot) &\leq c_1 L^{1-\frac{1}{r_2}} M_2 \bar{\zeta} \|Z\|_{\Delta}^{\rho-r_1} (\|Z\|_{\Delta}^{r_1+\tau} + \|Z(t-d_2)\|_{\Delta}^{r_1+\tau} + \|Z(t-d_0)\|_{\Delta}^{r_1+\tau}) \\ &\leq c_1 L^{1-\frac{1}{r_2}} M_2 \bar{\zeta} (\|Z\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + \|Z(t-d_2)\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + \|Z(t-d_0)\|_{\Delta}^{\rho+\tau}). \end{aligned} \quad (48)$$

将式(43)~(48)代入式(42)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -M_1 \|Z\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + L^{1-\frac{1}{r_{i+1}}} M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n \|Z\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + L^{1-\frac{1}{r_2}} M_2 \tilde{c}_1 \bar{\zeta} \|Z\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + L^{1-\frac{1}{r_{i+1}}} M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n \|Z(t-d_{i+1})\|_{\Delta}^{\rho+\tau} \\ &\quad + L^{1-\frac{1}{r_2}} M_2 \tilde{c}_1 \bar{\zeta} \|Z(t-d_2)\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + L^{1-\frac{1}{r_{i+1}}} M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n \|Z(t-d_0)\|_{\Delta}^{\rho+\tau}, \end{aligned} \quad (49)$$

其中最后一个不等式由引理 1 得到, 且 $\tilde{c}_i$ 是正常数。选择一个 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\begin{aligned} \Omega(Z) &= V_n(Z) + M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n \frac{L^{1-\frac{1}{r_{i+1}}}}{1-m_i} \int_{t-d_{i+1}}^t \|Z(s)\|_{\Delta}^{\rho+\tau} ds \\ &\quad + M_2 \tilde{c}_1 \frac{L^{1-\frac{1}{r_2}}}{1-m_1} \int_{t-d_2}^t \|Z(s)\|_{\Delta}^{\rho+\tau} ds + M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n \frac{L^{1-\frac{1}{r_{i+1}}}}{1-m_i} \int_{t-d_0}^t \|Z(s)\|_{\Delta}^{\rho+\tau} ds, \end{aligned} \quad (50)$$

式中 $0 < m_i < 1$ 是已知正数, 接下来证明 $\Omega(Z)$ 是正定且径向无界的。

首先, 因为 Lyapunov 函数 $V_n(Z)$ 连续可微, 正定且径向无界, 则存在 K_{∞} 函数 $\alpha_1(|Z|)$ 和 $\beta_{21}(|Z|)$ 使得

$$\alpha_1(|Z|) \leq V(Z) \leq \beta_{21}(|Z|). \quad (51)$$

其次, 存在正数 $\bar{b}$ 和 $\underline{b}$ 、 K_{∞} 函数 $\underline{\beta}_{22}(\cdot)$ 和 $\bar{\beta}_{22}(\cdot)$ 、正定且度为 $\rho + \tau$ 的函数 $U(Z)$ 使得

$$\underline{b} \|Z\|_{\Delta}^{\rho+\tau} \leq U(Z) \leq \bar{b} \|Z\|_{\Delta}^{\rho+\tau}, \underline{\beta}_{22}(|Z|) \leq U(Z) \leq \bar{\beta}_{22}(|Z|). \quad (52)$$

最后, 根据 $d = \max\{d_i\}, i=0, \dots, n$ 和式(52),

$$\begin{aligned} &M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n \frac{L^{1-\frac{1}{r_{i+1}}}}{1-m_i} \int_{t-d_{i+1}}^t \|Z(s)\|_{\Delta}^{\rho+\tau} ds + M_2 \tilde{c}_1 \frac{L^{1-\frac{1}{r_2}}}{1-m_1} \int_{t-d_2}^t \|Z(s)\|_{\Delta}^{\rho+\tau} ds + M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n \frac{L^{1-\frac{1}{r_{i+1}}}}{1-m_i} \int_{t-d_0}^t \|Z(s)\|_{\Delta}^{\rho+\tau} ds \\ &\leq \tilde{b}_1 \left(\sum_{i=1}^n \int_{t-d_{i+1}}^t \bar{\beta}_{22}(|Z|) ds + \int_{t-d_2}^t \bar{\beta}_{22}(|Z|) ds + \sum_{i=1}^n \int_{t-d_0}^t \bar{\beta}_{22}(|Z|) ds \right) \\ &\leq \tilde{b}_2 \sum_{i=1}^n \int_{-d_{i+1}}^0 \bar{\beta}_{22}(|Z(\zeta+t)|) d(\zeta+t) + \tilde{b}_3 \sum_{i=1}^n \int_{-d_0}^0 \bar{\beta}_{22}(|Z(\zeta+t)|) d(\zeta+t) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sup_{-d \leq t \leq 0} \bar{\beta}_{22}(|\mathbf{Z}(t)|) \leq \beta_{22}(\sup_{-d \leq t \leq 0}(|\mathbf{Z}(t)|)),$$

式中 $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ 是正数, β_{22} 是一类 K_∞ 函数。显然, $|\mathbf{Z}| \leq \sup_{-d \leq t \leq 0} |\mathbf{Z}(t)|$ 。定义 $\alpha_2(\cdot) = \beta_{21}(\cdot) + \beta_{22}(\cdot)$, 结合式(50)~(53)可知

$$\alpha_1(|\mathbf{Z}|) \leq \Omega(|\mathbf{Z}|) \leq \alpha_2(\sup_{-d \leq t \leq 0} |\mathbf{Z}(t)|). \quad (54)$$

因此, 根据式(54), 函数 $\Omega(\mathbf{Z})$ 正定且径向无界。

接下来通过式(50), (51)说明 $\Omega(\mathbf{Z})$ 的导数

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \dot{V}_n + M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n \frac{L^{\frac{1-\frac{1}{r_{i+1}}}}}{1-m_i} (\|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho+\tau} - \|\mathbf{Z}(t-d_{i+1})\|_{\Delta}^{\rho+\tau}) + M_2 \tilde{c}_1 \frac{L^{\frac{1-\frac{1}{r_2}}}}{1-m_1} (\|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho+\tau} - \|\mathbf{Z}-d_2\|_{\Delta}^{\rho+\tau}) \\ &\quad + M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n \frac{L^{\frac{1-\frac{1}{r_{i+1}}}}}{1-m_i} (\|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho+\tau} - \|\mathbf{Z}(t-d_0)\|_{\Delta}^{\rho+\tau}) \\ &\leq -L(M_1 - 2M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n \frac{L^{\frac{1-\frac{1}{r_{i+1}}}}}{1-m_i}) \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + M_1 \tilde{c}_i \bar{\xi} \frac{L^{\frac{1-\frac{1}{r_2}}}}{1-m_1} \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho+\tau} \\ &\quad + M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n L^{\frac{1-\frac{1}{r_{i+1}}}} (1 - \frac{1}{1-m_i}) \|\mathbf{Z}(t-d_{i+1})\|_{\Delta}^{\rho+\tau} \\ &\quad + M_2 \tilde{c}_i \bar{\xi} \cdot (1 - \frac{1}{1-m_1}) \|\mathbf{Z}(t-d_2)\|_{\Delta}^{\rho+\tau} + M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n L^{\frac{1-\frac{1}{r_{i+1}}}} (1 - \frac{1}{1-m_i}) \|\mathbf{Z}(t-d_0)\|_{\Delta}^{\rho+\tau}, \quad (55) \end{aligned}$$

由于 $0 < m_i < 1$, 则对 $i=1, \dots, n$, $1 - \frac{1}{1-m_i} < 0$ 成立。则

$$\dot{\Omega} \leq -L(M_1 - 2M_2 \tilde{c}_i \sum_{i=1}^n \frac{L^{\frac{1-\frac{1}{r_{i+1}}}}}{1-m_i} - M_2 \tilde{c}_i \bar{\xi} \frac{L^{\frac{1-\frac{1}{r_2}}}}{1-m_1}) \|\mathbf{Z}\|_{\Delta}^{\rho+\tau}, \quad (56)$$

显然可以选择

$$L \geq \max \left\{ 1, \left(\frac{2M_2 \tilde{c}_i}{M_1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-m_i} \right)^{r_n}, \left(\frac{M_2 \tilde{c}_i \bar{\xi}}{M_1(1-m_1)} \right)^{r_n} \right\},$$

使得式(56)的右边是负定的。因此, 输出反馈控制器(39)和(40)使系统(1)全局渐近稳定。

4 仿真例子

考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2(t-d_2) + \frac{1}{3} \eta_1(t-d_1)^{\frac{1}{3}}, \\ \dot{\eta}_2 &= v(t-d_0), \\ y &= \sigma \eta_1 + \sin \eta_1, \end{aligned} \quad (57)$$

式中 $2 < \sigma \leq 4$ 是一个未知常数。通过选择 $\tau = \frac{1}{3}$, 显然, 假设 1、2 是成立的。利用定理 1, 我们构造一个输出反馈控制器

$$\hat{\dot{z}}_1 = L(\hat{z}_2 - 1000 \lceil \hat{z}_1 \rceil^{\frac{4}{3}}), \hat{\dot{z}}_2 = L(u - 0.01 \lceil \hat{z}_1 \rceil^{\frac{5}{3}}), u = -15 \lceil \hat{z}_2 \rceil^{\frac{5}{4}} + 0.08 \lceil y \rceil^{\frac{5}{3}}, v = L^2 u. \quad (58)$$

在仿真中, 式(58)中的增益和初始条件选择为 $d_1 = 0, d_2 = d_0 = 0.1, \sigma = 3, L = 2.4$ 和 $(\eta_1(0), \eta_2(0), \hat{z}_1(0), \hat{z}_2(0)) = (35, 0.1, 0, 0)$ 。图 1 表明控制方案的有效性。

注 2 此仿真示例充分展示了本文所提出的全阶观测器相较于 Zhao 等人^[21]所设计的降阶观测器, 在状态估计精度方面具有显著优势。全阶观测器通过全面观测系统的所有状态变量, 不仅提供了更为精确的状态估计, 还展现了出色的鲁棒性, 能够有效应对系统参数的不确定性和外部干扰。即便在系统参数发生变化

或受到扰动时,全阶观测器依然能够维持出色的估计性能。此外,与 Zhao 等人设计的输出反馈控制器相比,本文所设计的输出反馈控制器展现出更为卓越的稳定性效果,为实际应用提供更为可靠的控制方案。

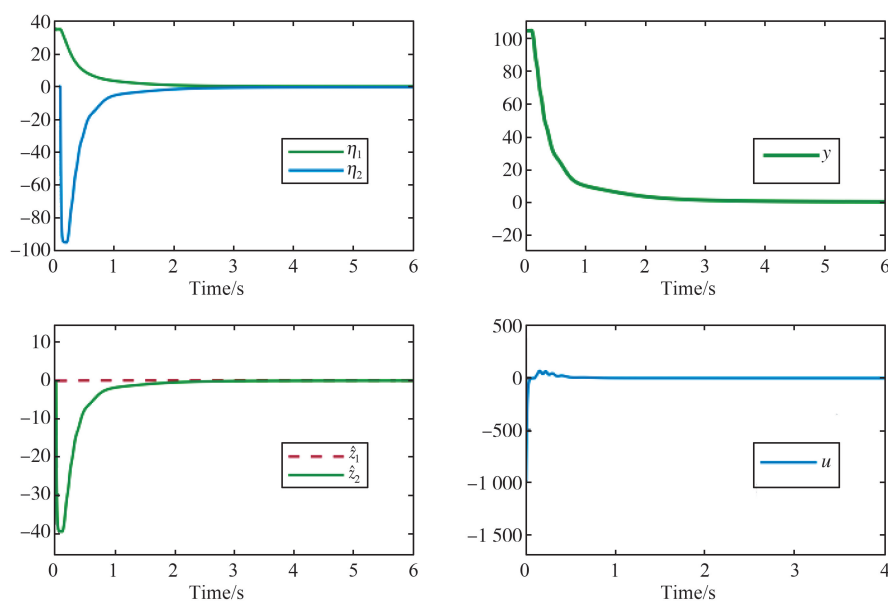


图1 $\eta_1(t), \eta_2(t), \hat{z}_1, \hat{z}_2, y, u$ 的轨迹

Fig. 1 Trajectories of $\eta_1(t), \eta_2(t), \hat{z}_1, \hat{z}_2, y, u$

5 结论

本文针对一类非线性函数、积分器及输入中都包含时滞的非线性系统,在输出信息不确定的条件下,研究了其全局输出反馈稳定问题。一些有意义的问题仍然存在:(1)当非线性项同时受到高阶和低阶条件的限制时,如何构造一个输出反馈控制器来稳定系统(1)?(2)最近学术界对具有 $y = \eta_1(t)$ 的随机系统的输出反馈控制得到了许多结果,一个有趣的问题是,我们是否可以对具有未知输出函数的随机非线性系统建立类似的结果?

参 考 文 献

- [1] DENG H, KRSTIC M. Output-feedback stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance[J]. Systems and Control Letters, 2000, 39(3): 173-182.
- [2] KHALIL H K. Nonlinear Systems[M], New Jersey: Prentice-Hall, 2002.
- [3] BACCIOTTI A, ROSIER L. Lyapunov functions and stability in control theory (2nd ed.) [M], Berlin Heidelberg: Springer, 2005.
- [4] XIE X J, DUAN N, YU X. State-feedback control of high-order stochastic nonlinear systems with SISS inverse dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(8): 1921-1926.
- [5] YIN J, KHOO S. Continuous finite-time state feedback stabilizers for some nonlinear stochastic systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(11): 1581-1600.
- [6] LIU L, XIE X J. State-feedback stabilization for stochastic high-order nonlinear systems with SISS inverse dynamics[J]. Asian Journal of Control, 2012, 14(1): 207-216.
- [7] ZHANG X F, FENG G, SUN Y H. Finite-time stabilization by state feedback control for a class of time-varying nonlinear systems[J]. Automatica, 2012, 48(3): 499-504.
- [8] XIE X J, LIU L. A homogeneous domination approach to state feedback of stochastic high-order nonlinear systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(2): 494-499.
- [9] QIAN C J, LIN W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(7): 1061-1079.
- [10] QIAN C J, LIN W. Output feedback control of a class of nonlinear systems: a nonseparation principle paradigm[J]. IEEE Transactions

- on Automatic Control, 2002, 47(10): 1710-1715.
- [11] LIU S J, JIANG Z P, ZHANG J F. Global output-feedback stabilization for a class of stochastic non-minimum-phase nonlinear systems [J]. Automatica, 2008, 44(8): 1944-1957.
- [12] LI W Q, XIE X J, ZHANG S Y. Output-feedback stabilization of stochastic high-order nonlinear systems under weaker conditions [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2010, 49(3): 1262-1282.
- [13] SUN Z Y, ZHANG X H, XIE X J. Continuous global stabilisation of high-order time-delay nonlinear systems [J]. International Journal of Control, 2013, 86(6): 994-1007.
- [14] AI W Q, ZHAI J Y, FEI S M. Universal adaptive regulation for a class of nonlinear systems with unknown time delays and output function via output feedback [J]. International Journal of the Franklin Institute, 2013, 350(10): 3168-3187.
- [15] ZHAI J Y. Global output feedback stabilization for a class of nonlinear time-varying delay systems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 228: 606-614.
- [16] ZHAI J Y, ZHA W T. Global adaptive output feedback control for a class of nonlinear time-delay systems [J]. ISA Transactions, 2014, 53(1): 2-9.
- [17] ZHAO C R, ZHANG K, XIE X J. Output feedback stabilization of stochastic feedforward nonlinear systems with input and state delay [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(7): 1422-1436.
- [18] ZHANG K, SUN Z Y, CHEN C C. Global stabilization via output feedback for a class of uncertainty nonlinear systems with time-varying delay and zero dynamics [J]. ISA Transactions, 2023, 132: 235-245.
- [19] LIU L, KONG M, LAM J. A new design method to global asymptotic stabilization of strict-feedforward stochastic nonlinear time delay systems [J]. Automatica, 2023, 151: 110932.
- [20] YUAN M, ZHAI J. Adaptive output feedback control for a class of switched stochastic nonlinear time-delay systems [J]. International Journal of Control, 2023, 96(1): 110-123.
- [21] ZHAO C, LIN W. Homogeneous output feedback design for time-delay nonlinear integrators and beyond: An emulation [J]. Automatica, 2022, 146: 110641.
- [22] YAN X, SONG X, WANG Z, et al. Global output-feedback adaptive stabilization for planar nonlinear systems with unknown growth rate and output function [J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 314: 299-309.
- [23] LI Z J, XIE X J, ZHANG K. Output feedback stabilisation for nonlinear systems with unknown output function and control coefficients and its application [J]. International Journal of Control, 2017, 7(2): 305-313.
- [24] YAN X H, LIU Y G. Global output-feedback asymptotic stabilization for a class of uncertain nonlinear systems with uncertain growth rate [J]. In Proceedings of 30th Chinese Control Conference, 2011, Yantai, 6556-6561.
- [25] ZHAI J Y, AI W Q, FEI S M. Global output feedback stabilization for a class of uncertain nonlinear systems [J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(2): 305-313.
- [26] ZHAI J Y. Global finite-time output feedback stabilisation for a class of uncertain nontriangular nonlinear systems [J]. International Journal of Systems Science, 2014, 45(3): 637-646.
- [27] ZHAI J Y, QIAN C J. Global control of nonlinear systems with uncertain output function using homogeneous domination approach [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22(14): 1543-1561.
- [28] JIANG M M, WANG P, XIE X J. Global output feedback stabilisation of nonlinear time-delay systems with unknown output function [J]. International Journal of Systems Science, 2017, 48(12): 2554-2564.

(责任编辑:刘庆松)