

多层布尔控制网络的集合可达性和可观测性

崔禹欣¹, 李 述^{1,2}, 刘凤秋³, 吴玉虎⁴

(1. 哈尔滨理工大学 理学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 哈尔滨理工大学 电气与工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150080;
3. 宁波工程学院 理学院, 浙江 宁波 315211; 4. 大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘 要 研究了具有全局状态层的多层布尔控制网络的集合可达性和可观测性。首先, 通过状态转换图重构技术, 将多层布尔控制网络扩展到逻辑动态系统。其次, 给出多层布尔控制网络集合可达性的充分必要条件。随后, 通过并行拓展技术和集合可达性, 给出多层布尔控制网络可观测性的充要条件。最后, 通过算例验证了理论结果的正确性。

关键词 矩阵的半张量积; 多层布尔控制网络; 集合可达性; 可观测性

中图分类号 O29

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Set Reachability and Observability of Boolean Multiplex Control Networks

CUI Yuxin¹, LI Shu^{1,2}, LIU Fengqiu³, WU Yuhu⁴

(1. School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China; 2. School of Electrical and Electronic Engineering, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China;
3. School of Science, Ningbo University of Technology, Ningbo 315048, China; 4. School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract Set reachability and observability of Boolean multiplex control networks with global state layer are studied. Firstly, by the state transition graph reconstruction technique, the Boolean multiplex control network is extended to a class of logical dynamic systems. Secondly, the sufficient and necessary condition for the set reachability of Boolean multiplex control networks is given. Next, based on the parallel extension technique and set reachability, the sufficient and necessary condition for the observability of Boolean multiplex control networks is given. Finally, an example is performed to illustrate the correctness of the theoretical results.

Key words semi-tensor product of matrices; Boolean multiplex control networks; set reachability; observability

1 引言

生物过程建模已经成为数学建模中的热门话题。因此, 人们对基因调控网络的研究有着非常大的兴趣。基因调控网络的建模方法也相当广泛, 其中包括布尔网络, 差分方程, 混杂系统, Petri 网, 线性回归模型等。

收稿日期: 2023-01-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(62173062)资助

通讯作者: 吴玉虎, 男, 蒙古族, 博士, 教授, 博士研究生导师, 研究方向: 非线性系统、随机逻辑系统、博弈决策和控制理论, E-mail: wuyuhu@dlut.edu.cn。

由于布尔网络^[1]模型能够简洁有效地描述作用在有限集上的动态离散模型。因此,布尔网络^[1]已成为基因调控网络的重要模型。此外,布尔网络在许多领域都有应用,包括系统生物学^[2,3]、化学^[4]、社会科学^[5]等。随着矩阵半张量积^[6]的引入,布尔网络的许多理论问题已经得到解决,例如可控性^[7-9]、稳定性^[10-12]、最优控制^[13]、辨识^[14],以及其它相关问题^[15-17]。

可达性是系统科学和控制架构的基本概念和研究课题,也是生物系统和遗传调控网络的焦点。在生物网络中,人们通过设计控制策略,将复杂网络从患病状态驱动至健康状态。因此,布尔控制网络的可达性已被用于设计和分析治疗干预策略。目前,已经得到了许多关于可达性的重要结论。文献[18]主要研究了具有状态和控制时滞的布尔控制网络的可达性问题。文献[19]研究了具有干扰输入的布尔控制网络的鲁棒可达性。文献[20]研究了层次布尔控制网络的可达性和同步性问题。受到文献[21,22]的启发,文献[23]研究了马尔科夫跳变布尔网络的集合可达性。进一步,文献[24]研究了状态依赖的脉冲布尔网络集合可达性的牵制控制设计问题。可观测性是现代控制理论中的另一个非常重要的概念。目前,已经有很多关于布尔网络以及布尔控制网络可观测性的优秀成果。例如,文献[25]通过有限自动机解决了布尔控制网络的可观测性问题。在此基础上,文献[26]提出了一种替代方法用于解决布尔网络的可观测性问题。受到上述文献启发,文献[27]给出了关于布尔控制网络可观测性的一些新结论。文献[28]通过集合可达性和并行拓展技术解决了布尔控制网络的可观测性问题。在文献[29]中,布尔控制网络的可观测性问题被转换为集合可控性问题,并且给出了一个简洁并且易于验证的充要条件,此外,文献[30-32]也是关于可观测性的优秀成果。

为了理解具有许多层次和交互共存的复杂生物系统的演化过程,多层网络作为一个新的描述已被提出。值得注意的是,多层网络不仅提供了构建生化系统的多级模型,还能更好地描述更丰富的相互作用结构。在过去的几年中,基于多层布尔网络的各种研究已经完成。文献[33]研究了两层网络的同步能力。文献[34]研究了多层布尔网络的稳定性问题。文献[35]研究了多层布尔控制网络的能控性问题。同时,由于生物调节的系统分析需要整体水平上的基因相互作用,而不是生物体孤立部分的特征^[2]。因此,从整体角度分析多层布尔控制网络的集合可达性和可观测性是相当必要的。基于上述讨论,本文希望通过一个具有全局状态层的多层布尔控制网络来从整体层面上考虑不同层之间节点的相互作用。事实上,多层网络在细胞生化网络、自然科学、社会科学和信息科学等领域也有诸多应用。因此,研究具有全局状态层的多层布尔控制网络的集合可达性及其可观测性是有意义的。本文的主要贡献包括两点:(1)与传统的布尔控制网络结构不同,本文研究的多层布尔控制网络具有全局状态层,可以模拟更加复杂的动态系统。(2)本文通过状态转换图重构技术给出了具有全局状态层的多层布尔控制网络集合可达性的充要条件。其次,在集合可达性的基础上,利用并行互联技术给出了多层布尔控制网络的可观测性的充要条件。

2 预备知识

2.1 符号说明

(1) $D = \{0, 1\}$, $D^n = \underbrace{D \times D \times \cdots \times D}_n$ 。(2) I_n : n 阶单位矩阵。(3) $\Delta_n = \{\delta_n^1, \delta_n^2, \dots, \delta_n^n\}$, 其中 δ_n^i 表示 n 阶单位矩阵的第 i 列。(4) $\text{Col}_i(A)$: 矩阵 A 的第 i 列。(5) $\delta_n^0: [\underbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}_n]^T$ 。(6) $[N:M]: \{N, N+1, \dots, M\}$, 其中 $N \leq M$ 且 N, M 都是正整数。(7) 一个 $n \times m$ 维的矩阵 A , 如果它的每一列都属于集合 Δ_n , 则称矩阵 A 为一个逻辑矩阵。所有 $n \times m$ 维的逻辑矩阵构成的集合记作 $L_{n \times m}$ 。(8) 仅由 0 和 1 构成的 $n \times m$ 维矩阵 A 被称为一个布尔矩阵。所有的 $n \times m$ 维的布尔矩阵构成的集合记作 $B_{m \times n}$ 。(9) $\otimes_B$: 布尔乘法。(10) $0_{m \times n}$: $m \times n$ 维的零矩阵。(11) $W_{[m,n]} = [I_n \otimes \delta_m^1 I_n \otimes \delta_m^2 \cdots I_n \otimes \delta_m^m]$, 其中 $W_{[m,n]}$ 表示指标为 m 和 n 的换位矩阵。(12) $M_{r,k} = [\delta_k^1 \otimes \delta_k^1 \delta_k^2 \otimes \delta_k^2 \cdots \delta_k^k \otimes \delta_k^k]$, 其中 $M_{r,k}$ 为指标为 k 的降阶矩阵。

2.2 矩阵半张量积的定义和性质

定义 1^[6] 设矩阵 $A \in L_{n \times m}$, $B \in L_{p \times q}$, 并且 α 是 m 和 p 的最小公倍数。那么, A 和 B 的半张量积定义为 $A \ltimes B = (A \otimes I_{\alpha/m})(B \otimes I_{\alpha/p})$ 其中 $\otimes$ 为 Kronecker 积。当 $m = p$ 时, 矩阵的半张量积等于它们的普通乘法。因此, 矩阵的半张量积是矩阵乘法的推广。为简化后面的内容, 省略半张量积符号 $\ltimes$ 。

引理 1^[6] 假设 $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是一个关于逻辑变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的逻辑函数,则可以找到唯一的矩阵 $M_f \in L_{2 \times 2^n}$, 称为函数 f 的结构矩阵,使得 $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = M_f \times_{i=1}^n x_i$, 这里 $x_i \in \Delta_2$, 并且 $\text{Col}_i(M_f) = f(\delta_{2^n}^i)$, $i = 1, 2, \dots, 2^n$ 。

关于矩阵的半张量积的一些性质已在文献[6]中有详细阐述,因此在本文中不再过多赘述。

2.3 问题描述

本文考虑的多层布尔控制网络有 K 层,每层有 N 个节点。在整个网络中,彼此不同的节点一共有 $n(N \leq n \leq NK)$ 个。具体可用如下模型表示

$$\begin{cases} X(t+1) = f(X(t), U(t)), \\ \tilde{X}(t+1) = \tilde{f}(X(t), U(t)), \\ Y(t+1) = h(\tilde{X}(t+1)), \end{cases} \quad (1)$$

这里 $X(t) = [X_1(t) X_2(t) \cdots X_{KN}(t)]^T \in D^{KN}$, $\tilde{X}(t) = [\tilde{X}_1(t) \tilde{X}_2(t) \cdots \tilde{X}_n(t)]^T \in D^n$, $Y(t) = [Y_1(t) Y_2(t) \cdots Y_p(t)]^T \in D^p$, 以及 $U(t) = [U_1(t) U_2(t) \cdots U_m(t)]^T \in D^m$ 是逻辑向量,并且 $X_i, \tilde{X}_i, Y_j, U_k \in \Delta_2$ 分别表示第 i 个节点的状态,第 i 个节点的全局状态,第 j 个输出节点的状态以及第 k 个控制输入。 $f: D^{KN+m} \rightarrow D^{KN}$ 和 $\tilde{f}: D^{KN+m} \rightarrow D^n$ 分别表示逻辑函数, $\tilde{f}$ 也被称为渠道函数, $h: D^n \rightarrow D^p$ 表示输出函数。

备注 1 公式(1)中的全局状态 $\tilde{X}(t+1)$ 是由吴等人在文献[36]中提出的,其目的是为了从系统生物学的角度描述网络的全局状态,其中 $\tilde{X}(t+1) = \times_{i=1}^n \tilde{X}_i(t+1)$, 这里 $\tilde{X}_i(t+1)$ 表示如下

$$\tilde{X}_i(t+1) = \tilde{f}_i(X_i^{l_{i1}}(t), X_i^{l_{i2}}(t), \dots, X_i^{l_{is}}(t), U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)),$$

式中 $X_i^{l_{is}}$ 表示在第 l_{is} 层的节点 i 的状态,并且 $\{l_{i1}, l_{i2}, \dots, l_{is}\} \subset \{1, 2, \dots, K\}$ 。

接下来,令 $x(t) = \times_{l=1}^K x^l(t)$, $\tilde{x}(t) = \times_{i=1}^n \tilde{x}_i(t)$, $y(t) = \times_{j=1}^p y_j(t)$ 以及 $u(t) = \times_{k=1}^m u_k(t)$ 分别表示 $X(t), \tilde{X}(t), Y(t)$ 以及 $U(t)$ 的向量形式。这里 $x^l(t) = \times_{i=1}^N x_i^l(t)$ 表示第 l 层的整体状态,并且 $a_{il} = 1$ 表示节点 i 在第 l 层出现, x_i^l 表示节点 i 在第 l 层的状态。则通过引理 1, 多层布尔控制网络(1)可以转化为

$$\begin{cases} x(t+1) = L u(t) x(t), \\ \tilde{x}(t+1) = \tilde{L} u(t) \tilde{x}(t), \\ y(t+1) = H \tilde{x}(t+1), \end{cases} \quad (2)$$

式中 $x(t) \in \Delta_{2NK}$, $\tilde{x}(t) \in \Delta_{2n}$, $y(t) \in \Delta_{2p}$, $u(t) \in \Delta_{2m}$, 并且 $L \in L_{2NK \times 2m+2NK}$ 和 $\tilde{L} \in L_{2n \times 2m+2n}$ 分别表示整体和全局结构矩阵, $H \in L_{2p \times 2n}$ 表示输出结构矩阵。继而,用代数形式(2)来说明本文的方法和结果。 $x(t; u, x_0)$ 和 $\tilde{x}(t; u, x_0)$ 分别表示在控制序列 $u = \{u(t)\}$ 下系统的整体和全局状态轨迹, $y(t; u, x_0)$ 表示对应的输出,即 $y(t; u, x_0) = H \tilde{x}(t; u, x_0)$ 。

定义 2 考虑多层布尔控制网络(2),假定初始子集 $M_0 \subset \Delta_{2NK}$ 是初始状态的集合,整体目标子集 $M_d \subset \Delta_{2NK}$ 是整体末态的集合,全局目标子集 $\tilde{M}_d \subset \Delta_{2n}$ 是全局末态的集合。

(1) M_d 被称从 M_0 出发整体可达的,如果对于任意的初始状态 $x_0 \in M_0$, 存在一个正整数 $\xi \geq 1$ 和一个输入序列 $u = \{u(t), t = 0, 1, \dots, \xi - 1\}$, 使得

$$x(\xi; u, x_0) \in M_d. \quad (3)$$

(2) $\tilde{M}_d$ 被称从 M_0 出发全局可达的,如果对于任意的初始状态 $x_0 \in M_0$, 存在一个正整数 $\xi \geq 1$ 和一个输入序列 $u = \{u(t), t = 0, 1, \dots, \xi - 1\}$, 使得

$$\tilde{x}(\xi; u, x_0) \in \tilde{M}_d. \quad (4)$$

定义 3 假定 x_0 和 x'_0 是两个不同的初始状态。 x_0 和 x'_0 被称为是可区分的,如果存在一个正整数 $\xi \geq 1$ 和一个输入序列 $u = \{u(t), t = 0, 1, \dots, \xi - 1\}$, 使得 $y(\xi; u, x_0) \neq y(\xi; u, x'_0)$ 。

定义 4 多层布尔控制网络(2)被称为可观测的,如果对于任意的两个不同的初始状态 $x_0, x'_0 \in \Delta_{2NK}$,

存在一个正整数 $\xi \geq 1$ 和一个输入序列 $u = \{u(t), t=0, 1, \dots, \xi-1\}$, 使得

$$y(\xi; u, x_0) \neq y(\xi; u, x'_0). \quad (5)$$

备注 2 在定义 3 的基础上, 将定义 4 重写为: 多层布尔控制网络(2)被称为可观测的, 如果对于任意的两个不同的初始状态 $x_0, x'_0 \in \Delta_{2KN}$, 存在一个输入序列 u , 使得 x_0 和 x'_0 是通过输入序列 u 可区分的。

3 集合可达性

本部分研究多层布尔控制网络(2)的集合可达性。首先, 介绍状态转换图重构技术。其次, 通过状态转换图重构技术将多层布尔控制网络(2)转换为逻辑动态系统。最后, 给出了多层布尔控制网络(2)集合可达性的一个充分必要条件。

3.1 状态转换图

状态转换图重构技术^[21]是用于集合可达性分析的主要方法, 其主要思路是通过重新构造多层布尔控制网络的状态以及网络中状态转换的关系来得到逻辑动态系统的状态转换图, 进而描绘逻辑动态系统的状态及引起系统状态转换的事件, 表示逻辑动态系统的行为。对于任意的子集 $M \subset \Delta_{2KN}$, 它的指标矩阵 D_M 表示如

$$\text{Col}_j(D_M) = \begin{cases} \delta_{2KN}^j, & \text{如果 } \delta_{2KN}^j \in M, \\ \delta_{2KN}^0, & \text{否则,} \end{cases}$$

式中 $D_M \in B_{2KN \times 2KN}$ 。

设 M_d^c 是整体目标子集 $M_d \subset \Delta_{2KN}$ 的补集, 而 $\tilde{M}_d^c$ 是全局目标子集 $\tilde{M}_d \subset \Delta_{2n}$ 的补集。同理于 D_M , M_d^c 和 $\tilde{M}_d^c$ 的指标矩阵分别用 $D_{M_d^c} \in B_{2KN \times 2KN}$ 和 $D_{\tilde{M}_d^c} \in B_{2n \times 2n}$ 表示。进一步定义扩充指标矩阵 $\hat{D}_{M_d^c}$ 和 $\hat{D}_{\tilde{M}_d^c}$ 如下

$$\hat{D}_{M_d^c} = \begin{bmatrix} D_{M_d^c} & \mathbf{0}_{2KN \times 2KN} & \cdots & \mathbf{0}_{2KN \times 2KN} \\ \mathbf{0}_{2KN \times 2KN} & D_{M_d^c} & \cdots & \mathbf{0}_{2KN \times 2KN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{2KN \times 2KN} & \mathbf{0}_{2KN \times 2KN} & \cdots & D_{M_d^c} \end{bmatrix}_{2m+KN \times 2m+KN}, \quad \hat{D}_{\tilde{M}_d^c} = \begin{bmatrix} D_{\tilde{M}_d^c} & \mathbf{0}_{2n \times 2n} & \cdots & \mathbf{0}_{2n \times 2n} \\ \mathbf{0}_{2n \times 2n} & D_{\tilde{M}_d^c} & \cdots & \mathbf{0}_{2n \times 2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{2n \times 2n} & \mathbf{0}_{2n \times 2n} & \cdots & D_{\tilde{M}_d^c} \end{bmatrix}_{2m+KN \times 2m+KN},$$

即使矩阵 $D_{M_d^c}$ 和 $D_{\tilde{M}_d^c}$ 维数不一致, 但扩充指标矩阵 $\hat{D}_{M_d^c}$ 和 $\hat{D}_{\tilde{M}_d^c}$ 维数一致且 $\hat{D}_{M_d^c}, \hat{D}_{\tilde{M}_d^c} \in B_{2m+KN \times 2m+KN}$ 。对于矩阵 $D_{\tilde{M}_d^c}$, 由 $N \leq n \leq NK$ 可知, 2^{m+KN} 是 2^n 的倍数。可见, 矩阵 $D_{\tilde{M}_d^c} \in B_{2n \times 2n}$ 可以扩充为扩充指标矩阵 $\hat{D}_{\tilde{M}_d^c}$ 。

将状态空间 Δ_{2KN} 和 Δ_{2n} 拓展为 Δ_{2KN}^0 和 Δ_{2n}^0 , 其中 $\Delta_{2KN}^0 := \Delta_{2KN} \cup \{\delta_{2KN}^0\}$, $\Delta_{2n}^0 := \Delta_{2n} \cup \{\delta_{2n}^0\}$ 。那么, 根据多层布尔控制网络(2), 构造逻辑动态系统

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = L\hat{D}_{M_d^c}u(t)\hat{x}(t), \\ \tilde{x}(t+1) = \tilde{L}\hat{D}_{\tilde{M}_d^c}u(t)\tilde{x}(t), \end{cases} \quad (6)$$

式中 $\hat{x}(t) \in \Delta_{2KN}^0$, $\tilde{x}(t) \in \Delta_{2n}^0$ 。

从公式(6)可以看出, 当 $\hat{x}(t) \in M_d^c$ 时, 对于任意的 $u(t) \in \Delta_{2m}$, $L\hat{D}_{M_d^c}u(t)\hat{x}(t) \neq \delta_{2KN}^0$; 当 $\hat{x}(t) \in \tilde{M}_d^c$ 时, $\tilde{L}\hat{D}_{\tilde{M}_d^c}u(t)\tilde{x}(t) \neq \delta_{2n}^0$ 。

备注 3 由于网络结构不同, 文献[21]中的指标矩阵不能适应本文研究的多层布尔控制网络。因此, 本文在文献[21]的基础上提出扩充指标矩阵 $\hat{D}_{M_d^c}$ 和 $\hat{D}_{\tilde{M}_d^c}$ 。通过扩充指标矩阵 $\hat{D}_{M_d^c}$ 和 $\hat{D}_{\tilde{M}_d^c}$, 将具有全局状态层的多层布尔控制网络(2)拓展为逻辑动态系统。

下面,将多层布尔控制网络(2)和逻辑动态系统(6)的转换关系通过状态转换图重构技术给出。一个逻辑动态系统的全局状态转换图是一个边-标号图 (χ, ϵ) ,其中 $\chi = \chi_1 \cup \chi_2$ 表示节点的集合, χ_1 表示整体状态的集合,并且 χ_2 表示全局状态的集合。多层布尔控制网络(2)的整体状态集合表示为 $\chi_{1(2)} = \Delta_{2KN}$,全局状态集合表示为 $\chi_{2(2)} = \Delta_{2n}$,边集合表示为 $\epsilon_{(2)}$;逻辑动态系统(6)的整体状态集合表示为 $\chi_{1(6)} = \Delta_{2KN}^0$,全局状态集合表示为 $\chi_{2(6)} = \Delta_{2n}^0$,边集合表示为 $\epsilon_{(6)}$ 。 $\epsilon \subset \chi_1 \times \chi_2 \times \delta_{2m}^s$ 表示带有控制的边的集合。 $(\delta_{2KN}^j, \delta_{2n}^i, \delta_{2m}^s)$ 表示系统

在控制 δ_{2m}^s 下从 δ_{2KN}^j 转移到 δ_{2n}^i ,记为 $\delta_{2KN}^j \xrightarrow{\delta_{2m}^s} \delta_{2n}^i$ 。

多层布尔控制网络(2)和逻辑动态系统(6)的状态转换图分别用边标号图 $(\chi_{(2)}, \epsilon_{(2)})$ 和 $(\chi_{(6)}, \epsilon_{(6)})$ 表示,其中 $\chi_{(2)} = \chi_{1(2)} \cup \chi_{2(2)}$, $\chi_{(6)} = \chi_{1(6)} \cup \chi_{2(6)}$ 。进一步,逻辑动态系统(6)的状态转换图 $(\chi_{(6)}, \epsilon_{(6)})$ 可由 $\chi_{1(6)} = \chi_{1(2)} \cup \{\delta_{2KN}^0\}$, $\chi_{2(6)} = \chi_{2(2)} \cup \{\delta_{2n}^0\}$ 以及 $\epsilon_{(6)} = \epsilon_1 \cup \epsilon_2 \cup \epsilon_3$ 给出,其中 $\epsilon_1 = \{(\delta_{2KN}^j, \delta_{2n}^i, \delta_{2m}^s) \in \epsilon_{(2)} \mid j \in \Lambda_d^c, i \in [1, 2^n]\}$, $\epsilon_2 = \{(\delta_{2KN}^j, \delta_{2n}^0, \delta_{2m}^s) \mid j \in \Lambda_d\}$, $\epsilon_3 = (\delta_{2KN}^0, \delta_{2n}^0, \delta_{2m}^s)$ 。这里 Λ_d, Λ_d^c 分别表示集合 M_d , M_d^c 的指标集。

逻辑动态系统(6)的状态转换图可以根据多层布尔控制网络(2)的状态转换图来直接确定。全局状态的转换过程如下: $(\chi_{(2)}, \epsilon_{(2)})$ 中从 $\tilde{M}_d^c$ 出发的边保持不变; $(\chi_{(2)}, \epsilon_{(2)})$ 中从 $\tilde{M}_d$ 出发的边被 $(\chi_{(6)}, \epsilon_{(6)})$ 中指向 δ_{2n}^0 的边替换;边 $(\delta_{2KN}^0, \delta_{2n}^0, \delta_{2m}^s)$ 被添加到 $(\chi_{(2)}, \epsilon_{(2)})$ 中。此外,通过一个数值算例来说明从多层布尔控制网络(2)到逻辑动态系统(6)的转换过程。

算例1 考虑双层布尔控制网络(2)的全局状态转移矩阵为

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

假定 $\tilde{M}_d = \{\delta_4^2, \delta_4^4\}$,则有 $\tilde{M}_d^c = \{\delta_4^1, \delta_4^3\}$ 。那么,矩阵 $\hat{D}_{\tilde{M}_d}$ 为 $\delta_8 [1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 5 \ 0 \ 7 \ 0]$ 。全局末态子集中的状态 $\tilde{x}_i \in \tilde{M}_d$ 由灰色节点表示,从 $\tilde{M}_d$ 出发的边由虚线表示。全局末态子集的补集中的状态 $\tilde{x}_i \in \tilde{M}_d^c$ 由白色节点表示,从 $\tilde{M}_d^c$ 出发的边由实线表示。由此,可以得到双层布尔控制网络的全局状态转换图如图1(a)所示。进一步,逻辑动态系统(6)的一步全局状态转移矩阵为

$$\tilde{L}\hat{D}_{\tilde{M}_d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

通过状态转换图重构技术可知,逻辑动态系统的全局状态转换图可由双层布尔控制网络的全局状态转换图重构得到。具体过程如下:从 $\tilde{M}_d^c = \{\delta_4^1, \delta_4^3\}$ 出发的边保持不变,从全局目标子集 $\tilde{M}_d = \{\delta_4^2, \delta_4^4\}$ 出发的边被更改为指向状态 δ_4^0 的边,并添加从 δ_4^1 出发指向 δ_4^0 的边。由此,可以得到逻辑动态系统(6)的全局状态转换图如图1(b)所示。

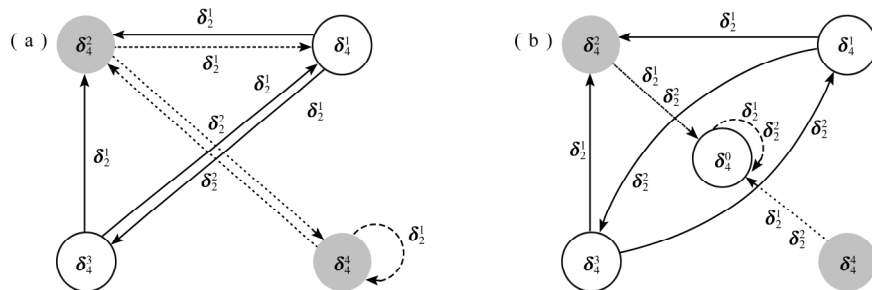


图1 (a)算例1中双层布尔控制网络的全局状态转换图;(b)算例1中逻辑动态系统的全局状态转换图

3.2 集合可达性

本节研究了多层布尔控制网络(2)的集合可达性。首先,介绍借助逻辑动态系统(6)分析多层布尔控制

网络(2)的集合可达性。

引理 1 假定 $M_0 \subset \Delta_{2KN}$ 是一个初始子集, $M_d \subset \Delta_{2KN}$ 是一个整体目标子集, $\tilde{M}_d \subset \Delta_{2n}$ 是一个全局目标子集。如果存在一个输入序列 u , 使得(1) 多层布尔控制网络(2)中 M_d 是自 M_0 出发整体可达的当且仅当逻辑动态系统(6)中 δ_{2KN}^0 是自 M_0 出发整体可达的。(2) 多层布尔控制网络(2)中 $\tilde{M}_d$ 是自 M_0 出发全局可达的当且仅当逻辑动态系统(6)中 δ_{2n}^0 是自 M_0 出发全局可达的。

证明 首先,证明(1)的必要性成立。假定多层布尔控制网络(2)的整体目标子集 M_d 是自 M_0 出发整体可达的。那么,对于任意的 $x_0 \in M_0$, 存在一个正整数 $\xi \geq 1$ 和一个输入序列 $u = \{u(t), t=0, 1, \dots, \xi-1\}$, 使得 $x(\xi; u, x_0) \in M_d$ 。进一步,通过扩充指标矩阵 $\hat{D}_{M_d}$, 可以得到 $LD_{M_d} u(\xi) x(\xi) = \delta_{2KN}^0$ 。也就是说,对于任意的 $x_0 \in M_0$, 存在一个正整数 $\xi \geq 1$ 和一个输入序列 $u = \{u(t), t=0, 1, \dots, \xi\}$, 使得逻辑动态系统(6)的整体状态 $\hat{x}(\xi+1; u, x_0) = \delta_{2KN}^0$ 。必要性得证。

接下来,证明(1)的充分性成立。假定 δ_{2KN}^0 是逻辑动态系统(6)自 M_0 出发整体可达的。那么,存在一个正整数 $\xi \geq 1$ 和一个输入序列 $u = \{u(t), t=0, 1, \dots, \xi-1\}$, 使得 $\hat{x}(\xi; u, x_0) = \delta_{2KN}^0$ 。根据扩充指标矩阵 $\hat{D}_{M_d}$ 的性质,当 $\hat{x}(\xi-1; u, x_0) \in M_d$ 时, $\hat{x}(\xi; u, x_0) = Lu(\xi-1) \hat{x}(\xi-1) = \delta_{2KN}^0$ 。也就是说,对于多层布尔控制网络(2), M_d 是自 M_0 出发整体可达的。充分性得证。

类似地,可以证得结论(2),此处不再重复赘述。

定理 1 考虑多层布尔控制网络(2), 假定 $M_0 = \{\delta_{2KN}^j \mid j \in \Lambda_0\}$, 这里 Λ_0 是 $[1:2^{KN}]$ 的子集。那么,下面的结论成立。

(1) 如果存在一个正整数 $\xi \geq 1$ 和一个输入序列 $u = \{u(t), t=0, 1, \dots, \xi-1\}$, 使得 M_d 是自 M_0 出发在 $[0, \xi]$ 上整体可达的当且仅当 $\text{Col}_j [((LD_{M_d}) \times_B \mathbf{1}_{2m})^{\xi+1}] = \delta_{2KN}^0, \forall j \in \Lambda_0$ 。

(2) 如果存在一个正整数 $\xi \geq 1$ 和一个输入序列 $u = \{u(t), t=0, 1, \dots, \xi-1\}$, 使得 $\tilde{M}_d$ 是从 M_0 出发在 $[0, \xi]$ 上全局可达的当且仅当 $\text{Col}_j [(\tilde{L}\tilde{D}_{\tilde{M}_d}) \times_B \mathbf{1}_{2m})^{\xi+1}] = \delta_{2n}^0, \forall j \in \Lambda_0$ 。

证明 首先,证明命题(1)的必要性成立。已知 M_d 是自 M_0 出发整体可达的。那么,对于任意的 $x_0 = \delta_{2KN}^j$, 存在一个正整数 $\xi \geq 1$ 和一个输入序列 $u = \{u(t), t=0, 1, \dots, \xi-1\}$, 使得 $x(\xi; u, x_0) \in M_d$ 。那么,根据扩充指标矩阵 $\hat{D}_{M_d}$, 可以得到 $LD_{M_d} u(\xi) x(\xi) = \delta_{2KN}^0$ 。也就是说,对于任意的 $j \in \Lambda_0$, 存在一个输入序列 $u = \{u(t), t=0, 1, \dots, \xi\}$, 使得 $((LD_{M_d}) \times_B \mathbf{1}_{2m})^{\xi+1} \delta_{2KN}^j = \delta_{2KN}^0$, 即 $\text{Col}_j [((LD_{M_d}) \times_B \mathbf{1}_{2m})^{\xi+1}] = \delta_{2KN}^0$ 。因此,必要性成立。

接下来,证明命题(1)的充分性成立。对于任意的 $j \in \Lambda_0$, 有 $\text{Col}_j [((LD_{M_d}) \times_B \mathbf{1}_{2m})^{\xi+1}] = \delta_{2KN}^0$ 。那么,可以得到存在正整数 $t \in [0, \xi]$ 和一个输入序列 u , 使得 $x(t; u, x_0) \in M_d$ 。因此,存在一个输入序列 u , 使得 M_d 是从 M_0 出发在 $[0, \xi]$ 上是整体可达的。

类似于命题(1),可以证得结论(2),此处不再重复赘述。

4 可观测性

本节通过并行拓展技术将多层布尔控制网络的可观测性问题转化为了多层布尔控制网络的集合可达性问题。首先,将多层布尔控制网络(2)和一个复制网络互联,如图 2 所示。

$$\begin{cases} x'(t+1) = Lu(t)x'(t), \\ \tilde{x}'(t+1) = \tilde{L}u(t)x'(t), \\ y'(t+1) = H\tilde{x}'(t+1). \end{cases} \quad (7)$$

接下来,令 $\tau(t) := x(t) \times x'(t)$, $\tilde{\tau}(t) := \tilde{x}(t) \times \tilde{x}'(t)$, 并且 $\kappa(t) = y(t) \times y'(t)$, 那么互联的多层布尔控制网络的状态空间可以表示成如下形式

$$\begin{cases} \tau(t+1) = L_\tau u(t) \tau(t), \\ \tilde{\tau}(t+1) = \tilde{L}_\tau u(t) \tau(t), \\ \kappa(t+1) = \Gamma \tilde{\tau}(t+1), \end{cases} \quad (8)$$

这里 $L_\tau = LW_{[2KN, 2KN+m]} LW_{[2KN+m, 2KN+m]} W_{[2m, 2KN+m]} M_{r, 2m}$, $\tilde{L}_\tau = \tilde{L}W_{[2n, 2KN+m]} \tilde{L}W_{[2KN+m, 2KN+m]} W_{[2m, 2KN+m]} M_{r, 2m}$, 并且 $\Gamma = HW_{[2p, 2n]} HW_{[2n, 2n]}$ 。显然, 对于任意的 $\tau_0 = x_0 \times x'_0$, 有 $\tau(t; u, \tau_0) = x(t; u, x_0) \times x(t; u, x'_0)$ 以及 $\tilde{\tau}(t; u, \tau_0) = \tilde{x}(t; u, x_0) \times \tilde{x}(t; u, x'_0)$, 其中 $x(t; u, x'_0)$ 和 $\tilde{x}(t; u, x'_0)$ 分别表示从 x'_0 出发的多层布尔控制网络(7)的整体解和全局解。 $\tau(t; u, \tau_0)$ 和 $\tilde{\tau}(t; u, \tau_0)$ 分别表示从 τ_0 出发的多层布尔控制网络(8)的整体解和全局解。

接下来, 对于逻辑矩阵 $H \in \Delta_{2n \times 2n}$, 定义 H -可区分子集如 $\Omega_H := \{x \times x' \mid H\tilde{L}x \neq H\tilde{L}x'\}$ 。同时, 定义 $\Omega_I = \{x \times x' \mid x \neq x'\}$ 。进一步, H -不可区分子集定义如 $\Omega_{I \setminus H} = \{\delta_{2KN}^i \times \delta_{2KN}^j \mid \text{Col}_i(H\tilde{L}) = \text{Col}_j(H\tilde{L}) \text{ 并且 } i < j\}$ 。

为了方便起见, 记 $\Omega_H = \{\delta_{22n}^i \mid i \in \Lambda_H\}$, $\Omega_{I \setminus H} = \{\delta_{22KN}^i \mid i \in \Lambda_{I \setminus H}\}$, 其中 $\Lambda_H \subseteq [1: 2^{2n}]$ 和 $\Lambda_{I \setminus H} \subseteq [1: 2^{2KN}]$ 分别为 Ω_H 和 $\Omega_{I \setminus H}$ 的指标集。换句话说, $\Omega_{I \setminus H}$ 中的每一个状态 τ_0 都对应着多层布尔控制网络(2)中

满足 $H\tilde{x}_0 = H\tilde{x}'_0$ 的一个状态对 (x_0, x'_0) , 即 $H\tilde{x}(1; u, x_0) = H\tilde{x}(1; u, x'_0)$ 。

定理 2 考虑多层布尔控制网络(2)和互联的多层布尔控制网络(8)。(1) 多层布尔控制网络(2) 是可观测的, 当且仅当多层布尔控制网络(8)的末态集合 Ω_H 是自 $\Omega_{I \setminus H}$ 出发全局可达的。(2) 假定 $\Omega_H = \{\delta_{22n}^i \mid i \in \Lambda_H\}$, 以及 $\Omega_{I \setminus H} = \{\delta_{22KN}^i \mid i \in \Lambda_{I \setminus H}\}$ 。那么, 多层布尔控制网络(2)是可观测的当且仅当

$$\text{Col}_j[(\tilde{L}_\tau \tilde{D}_{\Omega_H}) \times \mathbf{1}_{2m}]^{\xi+1} = \delta_{22n}^0, \forall j \in \Lambda_{I \setminus H}。$$

证明 首先证明(1)的充分性成立。假定对于多层布尔控制网络(8)来说, Ω_H 是自 $\Omega_{I \setminus H}$ 出发全局可达的。那么, 对于任意的 $\tau_0 \in \Omega_{I \setminus H}$, 存在一个正整数 $\xi \geq 1$ 和一个输入序列 $u = \{u(t), t = 0, 1, \dots, \xi-1\}$, 使得 $\tilde{\tau}(\xi; u, \tau_0) \in \Omega_H$ 。也就是说, $\tilde{x}(\xi; u, x_0) \times \tilde{x}(\xi; u, x'_0) \in \Omega_H$ 。根据 H -可区分子集的定义, 可以得到 $H\tilde{x}(\xi; u, x_0) \neq H\tilde{x}(\xi; u, x'_0)$, 即 $y(\xi; u, x_0) \neq y(\xi; u, x'_0)$ 。因此, 通过定义 4, 充分性成立。

接下来, 证明(1)的必要性成立。对于给定的状态 $x_0, x'_0 \in \Delta_{2KN}$, 可以得到 $y(\xi; u, x_0) \neq y(\xi; u, x'_0)$, 即 $H\tilde{x}(\xi; u, x_0) \neq H\tilde{x}(\xi; u, x'_0)$ 。那么, 根据 H -可区分子集的定义, 可以得到 $\tilde{x}(\xi; u, x_0) \times \tilde{x}(\xi; u, x'_0) \in \Omega_H$, 即 $\tilde{\tau}(\xi; u, \tau_0) \in \Omega_H$ 。因此, 对于任意的 $\tau_0 \in \Omega_{I \setminus H}$, (5)可以等价的表示为 $\tilde{\tau}(\xi; u, \tau_0) \in \Omega_H$, 必要性成立。

最后, 证明命题(2)。基于命题(1), 可知多层布尔控制网络(2)是可观测的当且仅当多层布尔控制网络(8)的子集 Ω_H 是自 $\Omega_{I \setminus H}$ 出发集合可达的。因此, 根据定理 1 的结论(2), 命题(2)成立。

备注 4 与文献[28]相比, 本文研究的多层布尔控制网络具有全局状态层, 可以模拟更加复杂的基因调控网络。与文献[36]相比, 本文不仅研究了多层布尔控制网络的可观测性, 还研究了该网络的集合可达性。

5 算例

算例 1 考虑一个每层两个节点, 彼此不同的节点有三个的双层布尔控制网络如下

$$\begin{aligned} & \text{第一层} \begin{cases} x_1^1(t+1) = x_2^1(t) \vee u(t), \\ x_2^1(t+1) = \neg x_1^1(t), \end{cases} \quad \text{第二层} \begin{cases} x_2^2(t+1) = \neg x_3^2(t), \\ x_3^2(t+1) = x_2^2(t) \leftrightarrow u(t). \end{cases} \\ & \text{全局状态层} \begin{cases} \tilde{x}_1(t+1) = x_1^1(t+1), \\ \tilde{x}_2(t+1) = x_2^1(t+1) \wedge x_2^2(t+1), \\ \tilde{x}_3(t+1) = x_3^2(t+1), \end{cases} \quad \text{输出层} \begin{cases} y_1(t+1) = \tilde{x}_1(t+1) \wedge \tilde{x}_2(t+1), \\ y_2(t+1) = \tilde{x}_3(t+1). \end{cases} \end{aligned}$$

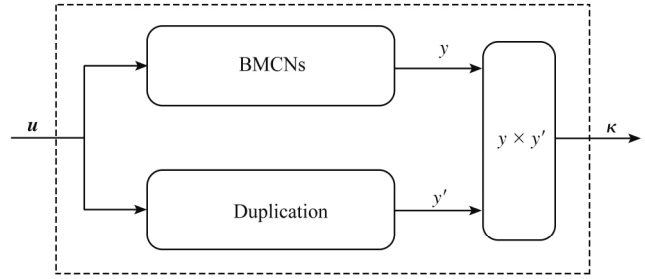


图 2 多层布尔控制网络与其复制网络的并行互联

通过矩阵的半张量积方法,可以得到整体结构矩阵 L 和全局结构矩阵 $\tilde{L}$ 如 $L = \delta_{16} [7 \ 5 \ 8 \ 6 \ 7 \ 5 \ 8 \ 6 \ 3 \ 1 \ 4 \ 2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 2 \ 8 \ 6 \ 7 \ 5 \ 16 \ 14 \ 15 \ 13 \ 4 \ 2 \ 3 \ 1 \ 12 \ 10 \ 11 \ 9]$, 以及 $\tilde{L} = \delta_8 [4 \ 4 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 3 \ 3 \ 4 \ 2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 2 \ 3 \ 1 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 7 \ 7 \ 8 \ 8 \ 3 \ 1 \ 4 \ 2 \ 7 \ 5 \ 8 \ 6]$ 。

假定 $\tilde{M}_d = \{\delta_8^2, \delta_8^5, \delta_8^8\}$ 以及 $\xi = 4$ 。那么,根据定理 1,可以得到

$$[(\tilde{L} \tilde{D}_{\tilde{M}_d}) \ltimes_B \mathbf{1}_{2^m}]^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

由此,可以得知,该双层布尔控制网络的全局末态集 $\tilde{M}_d = \{\delta_8^2, \delta_8^5, \delta_8^8\}$ 是自任意初始状态出发全局可达的。接下来,考虑该双层布尔控制网络的可观测性问题。根据 H -可区分分子集和 H -不可区分分子集定义可知 $\Omega_H = \{\delta_{256}^3, \delta_{256}^4, \delta_{256}^5, \delta_{256}^6, \dots, \delta_{256}^{253}, \delta_{256}^{257}, \delta_{256}^{256}\}$ 以及 $\Omega_{\neg H} = \{\delta_{256}^2, \delta_{256}^9, \delta_{256}^{10}, \dots, \delta_{256}^{251}, \delta_{256}^{252}\}$ 。那么,根据定理 2 可知,该双层布尔控制网络是不可观测的。

算例 2 上皮细胞和间充质表型之间的正向和反向转换在胚胎发育和组织修复以及癌症转移中起着至关重要的作用。因此,理解上皮细胞和间充质表型之间的转换过程仍然是发育和癌症生物学中的一个重要研究挑战。文献[37]确定了上皮细胞-间质转化的四个关键基因: $miR-34$ (μ_{34}), $miR-200$ (μ_{200}), $Snail$ 和 Zeb , 它们形成了两个相互抑制的切换开关。除此之外,还有一个额外的输入节点表示诱导上皮-间质转化的外部信号,从而得到了一个五个节点的基因调控网络,如图 3(a) 所示。尖锐箭头表示激活调控,钝箭头表示节点之间的抑制调控。

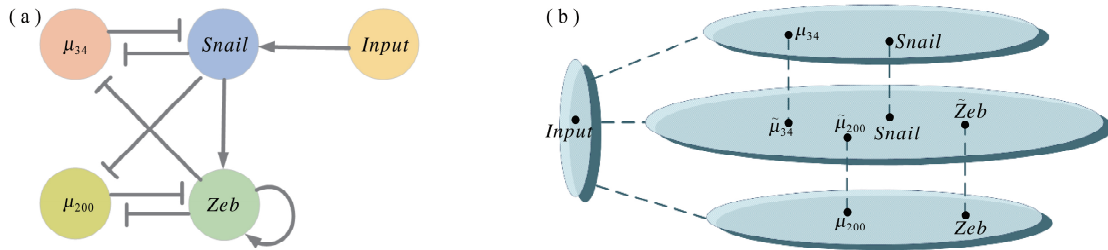


图 3 (a) 一个用于上皮细胞-间质转化的网络结构; (b) 上皮细胞-间质转化的多层布尔控制网络结构

这样,多层布尔控制网络可以更有效的模拟该网络,如图 3(b) 所示,该网络总结为

$$\begin{aligned} \text{第一层} & \begin{cases} \mu_{34}(t+1) = f_{\mu_{34}}(\mu_{34}(t), Snail(t), input) = \neg Snail(t), \\ Snail(t+1) = f_{Snail}(\mu_{34}(t), Snail(t), input) = \neg \mu_{34}(t) \vee input, \end{cases} \\ \text{第二层} & \begin{cases} \mu_{200}(t+1) = f_{\mu_{200}}(\mu_{200}(t), Zeb(t), input) = \neg Zeb(t), \\ Zeb(t+1) = f_{Zeb}(\mu_{200}(t), Zeb(t), input) = Zeb(t) \vee (\neg \mu_{200}(t)). \end{cases} \end{aligned}$$

该网络的全局状态层可以被描述为

$$\text{全局状态层} \begin{cases} \tilde{\mu}_{34}(t+1) = \neg \mu_{34}(t), \\ \tilde{Snail}(t+1) = Snail(t), \\ \tilde{\mu}_{200}(t+1) = \neg \mu_{200}(t), \\ \tilde{Zeb}(t+1) = Zeb(t). \end{cases}$$

输出层可以被描述为

$$\text{输出层} \begin{cases} y_1(t) = h_1(\tilde{\mu}_{34}(t), \tilde{Snail}(t)) = \tilde{\mu}_{34}(t) \wedge \tilde{Snail}(t), \\ y_2(t) = h_2(\tilde{\mu}_{200}(t), \tilde{Zeb}(t)) = \tilde{\mu}_{200}(t) \vee \tilde{ZEB}(t). \end{cases}$$

为了便于计算,利用 $x_1^1, x_2^1, x_3^2, x_4^2, u_1$ 分别表示 $\mu_{34}, Snail, \mu_{200}, Zeb, input$, 其具体含义如 x_1^1 : 特异性 $miRNA$; x_2^1 : 诱导上皮-间质转化的蛋白转录因子; x_3^2 : 上皮-间质转化中可维持细胞的上皮表型的主要调节分子; x_4^2 : 胚胎发育中必需的转录因子; u_1 : 诱导上皮-间质转化的外部输入信号; $f_{\mu_{34}}$: $Snail$ 基因抑制 μ_{34} 的转录; f_{Snail} : 在外部信号的调控下 μ_{34} 的转录抑制 $Snail$ 的表达; $f_{\mu_{200}}$: Zeb 基因抑制 μ_{200} 的转录; f_{Zeb} : μ_{200} 和 Zeb 的转录抑制 Zeb 的表达; 那么, 多层布尔控制网络可以被描述为

$$\begin{aligned} \text{第一层} & \begin{cases} x_1^1(t+1) = \neg x_2^1(t), \\ x_2^1(t+1) = \neg x_1^1(t) \vee u(t), \end{cases} & \text{第二层} & \begin{cases} x_3^2(t+1) = \neg x_4^2(t), \\ x_4^2(t+1) = x_4^2(t) \vee (\neg x_3^2(t)), \end{cases} \\ \text{全局状态层} & \begin{cases} \tilde{x}_1(t+1) = \neg \tilde{x}_1(t), \\ \tilde{x}_2(t+1) = x_2^1(t), \\ \tilde{x}_3(t+1) = \neg x_3^2(t), \\ \tilde{x}_4(t+1) = x_4^2(t). \end{cases} & \text{输出层} & \begin{cases} y_1(t) = \tilde{x}_1(t) \wedge \tilde{x}_2(t), \\ y_2(t) = \tilde{x}_3(t) \vee \tilde{x}_4(t), \end{cases} \end{aligned}$$

将之转化为相应的代数形式,可以得到

$$\begin{aligned} \text{第一层} & \begin{cases} x_1^1(t+1) = M_n x_2^1(t), \\ x_2^1(t+1) = M_d M_n x_1^1(t) u_1(t), \end{cases} & \text{第二层} & \begin{cases} x_3^2(t+1) = M_n x_4^2(t), \\ x_4^2(t+1) = M_d x_4^2(t) M_n x_3^2(t), \end{cases} \\ \text{全局状态层} & \begin{cases} \tilde{x}_1(t+1) = M_n x_1^1(t+1), \\ \tilde{x}_2(t+1) = x_2^1(t+1), \\ \tilde{x}_3(t+1) = M_n x_3^2(t+1), \\ \tilde{x}_4(t+1) = x_4^2(t+1), \end{cases} & \text{输出层} & \begin{cases} y_1(t) = M_c \tilde{x}_1(t) \tilde{x}_2(t), \\ y_2(t) = M_d \tilde{x}_3(t) \tilde{x}_4(t). \end{cases} \end{aligned}$$

基于矩阵的半张量积方法,可以得到整体状态转移矩阵 L 和全局状态转移矩阵 $\tilde{L}$

$$L = \delta_{16} [11 \ 10 \ 11 \ 9 \ 11 \ 10 \ 11 \ 9 \ 3 \ 2 \ 3 \ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \ 1 \ 15 \ 14 \ 15 \ 13 \ 15 \ 14 \ 15 \ 13 \ 3 \ 2 \ 3 \ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \ 1],$$

$$\tilde{L} = \delta_{16} [1 \ 4 \ 1 \ 3 \ 1 \ 4 \ 1 \ 3 \ 9 \ 12 \ 9 \ 11 \ 9 \ 12 \ 9 \ 11 \ 5 \ 8 \ 5 \ 7 \ 5 \ 8 \ 5 \ 7 \ 9 \ 12 \ 9 \ 11 \ 9 \ 12 \ 9 \ 11].$$

假定 $M_0 = \{\delta_{16}^1, \delta_{16}^4, \delta_{16}^6, \delta_{16}^7\}$, $\tilde{M}_d = \{\delta_{16}^2, \delta_{16}^5, \delta_{16}^8, \delta_{16}^{14}, \delta_{16}^{16}\}$ 以及 $\xi = 3$ 。那么, 根据定理 1, 可以得到

$$[(\tilde{L} \tilde{D}_{\tilde{M}_d}) \ltimes_B \mathbf{1}_{2m}]^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

通过观察上述矩阵,可以看出矩阵的第 1、4、6、7 列全为零向量。那么,通过定理 1,可以得出 $\tilde{M}_d = \{\delta_{16}^2, \delta_{16}^5, \delta_{16}^8, \delta_{16}^{14}, \delta_{16}^{16}\}$ 是自 $M_0 = \{\delta_{16}^1, \delta_{16}^4, \delta_{16}^6, \delta_{16}^7\}$ 出发全局可达的。因此,可以得知上皮细胞-间质转化网络的全局末态子集 $\tilde{M}_d = \{\delta_{16}^2, \delta_{16}^5, \delta_{16}^8, \delta_{16}^{14}, \delta_{16}^{16}\}$ 是自 $M_0 = \{\delta_{16}^1, \delta_{16}^4, \delta_{16}^6, \delta_{16}^7\}$ 出发全局集合可达的。

接下来,考虑该上皮细胞-间质转化网络的可观测性问题。根据 H -可区分分子集和 H -不可区分分子集定义可知 $\Omega_H = \{\delta_{256}^1, \delta_{256}^5, \delta_{256}^6, \delta_{256}^7, \delta_{256}^8, \delta_{256}^9, \dots, \delta_{256}^{245}, \delta_{256}^{246}, \delta_{256}^{247}, \delta_{256}^{249}, \delta_{256}^{250}, \delta_{256}^{251}, \delta_{256}^{253}, \delta_{256}^{254}, \delta_{256}^{255}\}$, 以及 $\Omega_{I \setminus H} = \{\delta_{256}^2, \delta_{256}^3, \delta_{256}^{17}, \delta_{256}^{19}, \delta_{256}^{33}, \delta_{256}^{34}, \dots, \delta_{256}^{243}, \delta_{256}^{234}, \delta_{256}^{235}, \delta_{256}^{236}, \delta_{256}^{237}, \delta_{256}^{238}, \delta_{256}^{253}, \delta_{256}^{248}, \delta_{256}^{252}\}$ 。

那么,根据定理 2 可知,当 $j \in \{169, 171, 185, 192, 201, 203, 205, 204, 217, 218, 219, 220, 221, 223, 233, 235, 236, 237, 239\} \subset \Omega_{I \setminus H}$ 时, $\text{Col}_j[(\tilde{L}_\tau \tilde{D}_{\Omega_H}) \times_B \mathbf{1}_{2^m}]^4 \neq \delta_{2^{2n}}^0$ 。由此可知,该上皮细胞-间质转化网络是不可观测的。

6 总结

本文主要研究了多层布尔控制网络的集合可达性问题和可观测性问题。首先,通过状态转换图重构技术,得到了多层布尔控制网络集合可达性的充要条件。其次,在集合可达性问题的基础上,进一步讨论了多层布尔控制网络可观测性问题的充要条件。最后,通过算例说明了理论结果的可行性。在未来,如何降低算法的计算复杂度是一个值得思考的问题,也是今后研究的一个重点。

参 考 文 献

- [1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. Journal of Theoretical Biology, 1969, 22(3): 437-467.
- [2] KITANO H. Systems biology: a brief overview[J]. Science, 2002, 295(5560): 1662-1664.
- [3] AZUMA S I, YOSHIDA T, SUGIE T. Structural oscillatory analysis of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2018, 6(2): 464-473.
- [4] HEIDEL J, MALONEY J, FARROW C, et al. Finding cycles in synchronous Boolean networks with applications to biochemical systems[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2003, 13(03): 535-552.
- [5] MACHADO A M, BAZZAN A L. Self-adaptation in a network of social drivers: using random Boolean networks[C].// In Proceedings of the 2011 workshop on Organic computing, June, 2011.
- [6] 程代展, 齐洪胜, 赵寅. 布尔网络的分析与控制——矩阵半张量积方法[J]. 自动化学报, 2011, 37(5): 529-540.
- [7] LU J Q, ZHONG J, HUANG C. On pinning controllability of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 61(6): 1658-1663.
- [8] LI Y, FENG J E, ZHU S. Controllability and reachability of periodically time-variant mixed-valued logical control networks[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2021, 40: 3639-3654.
- [9] WANG J, LIU Y, LI H. Finite-time controllability and set controllability of impulsive probabilistic Boolean control networks[J]. IEEE Access, 2020, 8: 111995-112002.
- [10] CHEN S Q, WU Y H, MACAULEY M, et al. Monostability and bistability of Boolean networks using semi-tensor products[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2018, 6(4): 1379-1390.
- [11] LIU R, LU J Q, LIU Y, et al. Delayed feedback control for stabilization of Boolean control networks with state delay[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2017, 29(7): 3283-3288.
- [12] ZHU S, FENG J E, ZHAO J. State feedback for set stabilization of markovian jump Boolean control networks[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-S, 2021, 14(4): 1591-1605.
- [13] TOYODA M, WU Y H. Mayer-type optimal control of probabilistic Boolean control network with uncertain selection probabilities[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 51(6): 3079-3092.
- [14] CHENG D Z, ZHAO Y. Identification of Boolean control networks[J]. Automatica, 2011, 47(4): 702-710.
- [15] WANG J, DE LEONE R, FU S H, et al. Event-triggered control design for networked evolutionary games with time invariant delay in strategies[J]. International Journal of Systems Science, 2021, 52(3): 493-504.

- [16] LE S Q, WU Y H, TOYODA M. A congestion game framework for service chain composition in NFV with function benefit[J]. Information Sciences, 2020, 514: 512-522.
- [17] FU S H, PAN Y, FENG J E, et al. Strategy optimization for coupled evolutionary public good games with threshold[J]. International Journal of Control, 2022, 95(2): 562-571.
- [18] ZHANG L, ZHAO M, LIU X, et al. Reachability of a kind of Boolean control networks with delays in both state and control[C].//2015 34th Chinese Control Conference (CCC). IEEE, 2015.
- [19] LI F, TANG Y. Robust reachability of Boolean control networks[J]. IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics, 2016, 14(3): 740-745.
- [20] ZHONG J, HO D W C, LU J Q, et al. Reachability and synchronization of hierarchical Boolean control networks[C].//2016 35th Chinese Control Conference (CCC). IEEE, 2016.
- [21] ZHOU R, GUO Y Q, GUI W. Set reachability and observability of probabilistic Boolean networks[J]. Automatica, 2019, 106: 230-241.
- [22] LIU Y, CHEN H, LU J Q, et al. Controllability of probabilistic Boolean control networks based on transition probability matrices[J]. Automatica, 2015, 52: 340-345.
- [23] ZHANG Q L, FENG J E, WANG B. Set reachability of markovian jump Boolean networks and its applications[J]. IET Control Theory and Applications, 2020, 14(18): 2914-2923.
- [24] LI Y, FENG J E, LI X, et al. Pinning controller design for set reachability of state-dependent impulsive Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, doi: 10.1109/TNNLS.2022.3171576.
- [25] ZHANG K, ZHANG L. Observability of Boolean control networks: a unified approach based on finite automata[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 61(9): 2733-2738.
- [26] CHENG D Z, QI H S, LIU T, et al. A note on observability of Boolean control networks[J]. Systems and Control Letters, 2016, 87: 76-82.
- [27] ZHU Q, LIU Y, LU J Q, et al. Observability of Boolean control networks[J]. Science China Information Sciences, 2018, 61(092201): 1-12.
- [28] GUO Y Q. Observability of Boolean control networks using parallel extension and set reachability[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(12): 6402-6408.
- [29] CHENG D Z, LI C, HE F. Observability of Boolean networks via set controllability approach[J]. Systems and Control Letters, 2018, 115: 22-25.
- [30] YU Y, MENG M, FENG J, et al. Observability criteria for Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 67(11): 6248-6254.
- [31] LIU Y, WANG L, YANG Y, et al. Minimal observability of Boolean control networks[J]. Systems and Control Letters, 2022, 163: 105204.
- [32] ZHU S, LU J, ZHONG J, et al. Sensors design for large-scale Boolean networks via pinning observability[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 67(8): 4162-4169.
- [33] XU M, ZHOU J, LU J A, et al. Synchronizability of two-layer networks[J]. The European Physical Journal B, 2015, 88(9): 1-6.
- [34] COZZO E, ARENAS A, MORENO Y. Stability of Boolean multilevel networks[J]. Physical Review E Statistical Nonlinear and Soft Matter Physics, 2012, 86(3): 2569-2575.
- [35] LUO C, WANG X, LIU H. Controllability of time-delayed Boolean multiplex control networks under asynchronous stochastic update[J]. Scientific Reports, 2014, 4(1): 7522.
- [36] WU Y H, XU J X, SUN X M, et al. Observability of Boolean multiplex control networks[J]. Scientific Reports, 2017, 7(1): 46495.
- [37] Joo J I, ZHOU J X, HUANG S, et al. Determining relative dynamic stability of cell states using Boolean network model[J]. Scientific Reports, 2018, 8(1): 1-14.

(责任编辑:刘庆松)