

一类新的单机工期指派模糊调度算法研究

易国荣¹, 李金权², 顾文豪³

(1. 北京理工大学(珠海)信息学院, 广东 珠海, 519088; 2. 北京师范大学珠海分校 应用数学学院, 广东 珠海 519087;
3. 北京师范大学 文理学院, 广东 珠海 519087)

摘要 研究了单机模糊环境下, 如何安排工件加工顺序和指定工件工期, 使得提前完工和拖期完工惩罚总费用均值最小的工期指派调度优化问题。在该类调度问题中, 工件的加工时间为非对称三角模糊数; 总费用的均值用模糊数的加权可能性均值来计算。针对一类权函数族, 给出了该类权函数族下的工件最优工期的计算方法, 基于该最优工期, 给出了排序的最优调度算法, 并证明了该类工期设定问题是多项式可解的。数值实验中针对工件完工时间服从不同的非对称分布的情形, 与现有的方法比较, 结果表明给出的方法能更有效的降低费用。

关键词 工期指派; 模糊调度; 非对称三角模糊数

中图分类号 O22

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



A New Fuzzy Scheduling Algorithm for Single Machine Duration Assignment

YI Guorong¹, LI Jinquan², GU Wenhao³

(1. School of Information Technology, Beijing Institute of Technology, Zhuhai 519088, China;
2. School of Applied Mathematics, Beijing Normal University, Zhuhai 519087, China;
3. Faculty of Arts and Sciences, Beijing Normal University, Zhuhai 519087, China)

Abstract In this paper, a single machine due date assignment scheduling optimization problem in fuzzy environment is investigated, which objective function is to minimize the total cost of earliness-tardiness penalties by arranging the processing sequence of jobs and setting due dates for each job. In this type of scheduling problem, asymmetric triangular fuzzy numbers are used to describe the processing times of jobs, and weighted possible mean value of fuzzy numbers is used to compute the average value of the total costs of penalties; Based on a kind of weight functions, the optimal due dates of each job are obtained, and moreover, a new scheduling algorithm is proposed; Based on this type of method, it has been proven that the problem investigated in this paper is polynomial solvable. In numerical experiments, when the completion time of the jobs follows different asymmetric distributions, compared with existing methods, the results show that the method proposed in this paper can more effectively reduce costs.

Key words due date assignment; fuzzy scheduling; asymmetric triangular fuzzy numbers

收稿日期: 2023-08-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(11971065)资助

通信作者: 李金权, 男, 汉族, 博士, 教授, 研究方向: 模糊优化与调度, E-mail: 151921050@qq.com。

0 引言

在企业的供应链管理和生产排程中,合理预测和设定订单的工期并基于此安排生产排程,能有效的降低存储成本、额外运输成本、保险成本等费用,这有利于企业降低成本和节省资源^[1,2]。针对具体生产情景,构建工期指派调度优化模型并给出有效的调度算法,能够有效地降低该费用。因此,工期指派调度优化问题引起了很多学者的研究和关注^[3-6]。

在具体的生产环境中,工件加工时间受到多种因素影响,往往是不确定。通常使用随机方法^[7,8]和模糊方法^[9-11]来构建工期指派调度模型。随机方法中,一般假定工件的加工时长为一服从某种分布的随机变量,如 Portougal, Trietsch 和 Baker。采用正态分布来描述工件的加工时间^[7,8],并在不同条件下,给出了随机环境下的工期指派问题的渐近最优算法和分枝界定算法。随着人们对工期指派调度优化问题的深入研究,发现在一些场景中,由于工件加工时间历史数据较少,工件加工时间的概率分布难以估计的情形时有发生,需要依据经验估算工件的加工时间,例如“大约 4 小时”。模糊数学刻画该类不确定信息有着自己独特的优势。李金权等利用模糊变量来描述加工时间,在不同的条件下给出了模糊环境下的工期指派调度模型^[9-12]。针对加工数据具有对称性,采用对称模糊数来表示加工时长^[9,10],并针对模糊数不同截集所表示的信息重要程度不同,给出了加权调度模型^[10]。针对加工数据具有非对称性,采用非对称模糊数刻画工件的加工时间,并相应的给出了工期指派问题的加权模型和求解算法^[11,12]。

由于不同种类的工件加工时间数据分布的多样性,加之完工时间随着工件个数的增多,方差变化也在增大,而利用单一权函数来匹配截集数据的重要程度略显不足。如何根据不同数据分布,选择恰当的权函数来匹配截集的重要程度,从而为每个工件确定好恰当的工期,降低费用是一个值得研究的问题。

本文引入一类权函数族,针对加工时间不具有对称性的情形,采用非对称三角模糊数来表示工件加工时间,给出了该类工期指派问题的最优工期的计算方法,并证明了该类工期指派调度问题是多项式可解的。文献[12]所研究的模型是本文的一个特例。数值实验中,针对工件完工时间服从不同的非对称分布的情形,与现有的方法进行了比较,实验结果表明本文给出的方法能更有效的降低费用,并验证了算法的有效性。

1 预备知识

1.1 模糊数

定义 1^[13] 设 A 是实数 $\mathbf{R}$ 上的模糊集, $A(x)$ 为其隶属函数,且满足如下性质

(1) 正则性: $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ 使得 $A(x_0) = 1$,

(2) 有界闭区间: $\forall \gamma \in [0, 1], A_\gamma = \{x \in \mathbf{R} \mid A(x) \geq \gamma\} = [a_1(\gamma), a_2(\gamma)]$ 为有界闭区间,则称 A 为 $\mathbf{R}$ 上的模糊数,称 $\{x \mid A(x) > 0\}$ 为模糊数 A 的支撑集; $F(\mathbf{R})$ 表示实数集 $\mathbf{R}$ 上的全体模糊数集合。

模糊数的加法,减法,数乘和取大运算,可以表示为^[14]:令 $A, B \in F(\mathbf{R}); \gamma \in [0, 1], A_\gamma = [a_1(\gamma), a_2(\gamma)], B_\gamma = [b_1(\gamma), b_2(\gamma)]$, 则有

$$A + B = \bigcup_{\gamma \in [0, 1]} \gamma [a_1(\gamma) + b_1(\gamma), a_2(\gamma) + b_2(\gamma)],$$

$$A - B = \bigcup_{\gamma \in [0, 1]} \gamma [a_1(\gamma) - b_2(\gamma), a_2(\gamma) - b_1(\gamma)],$$

$$\max\{A, B\} = \bigcup_{\gamma \in [0, 1]} \gamma [a_1(\gamma) \vee b_1(\gamma), a_2(\gamma) \vee b_2(\gamma)],$$

$$\lambda A = \bigcup_{\gamma \in [0, 1]} \gamma [\lambda a_1(\gamma), \lambda a_2(\gamma)], \lambda \in (0, +\infty)。$$

定义 2^[15] 函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ 是权函数,如果 $f(\gamma)$ 是非负、单调递增且满足 $\int_0^1 f(\gamma) d\gamma = 1$ 。

定义 3^[15] 令 A 是一个有界支撑集的模糊数, $f(\gamma)$ 为一个权函数,则称

$$\bar{M}_f(A) = \int_0^1 f(\gamma) \frac{a_1(\gamma) + a_2(\gamma)}{2} d\gamma, \text{Var}_f(A) = \int_0^1 f(\gamma) \left(\frac{a_1(\gamma) - a_2(\gamma)}{2} \right)^2 d\gamma,$$

分别为 A 的 f -加权可能性均值和 f -加权可能性方差,称 $\sigma_A = \sqrt{\text{Var}(A)}$ 为 A 的 f -加权可能性标准差。

根据定义3和模糊数的加法和数乘运算,可得

$$\bar{M}_f(A+B) = \bar{M}_f(A) + \bar{M}_f(B),$$

$$\bar{M}_f(\lambda A) = \lambda \bar{M}_f(A).$$

定义4^[14] 若模糊数A的隶属函数为

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x < a - \alpha, \\ 1 + (x - a)/\alpha, & a - \alpha \leq x < a, \\ 1 - (x - a)/\beta, & a \leq x \leq a + \beta, \\ 0, & x > a + \beta, \end{cases}$$

则称A为三角模糊数,记作 $A = (a, \alpha, \beta)$,式中 a, α 和 β 分别为模糊数A的峰点、左宽度和右宽度, $a \in \mathbf{R}, \alpha, \beta > 0$;称 β/α 为其宽度比。若 $\alpha = \beta$,则称A为对称三角模糊数,简记为 $A = (a, \alpha)$ 。对于模糊数 $A = (a, \alpha, \beta)$,权函数为 $f(\gamma) = (m+1)\gamma^m$,则有

$$\bar{M}_f(A) = a + (\beta - \alpha)/2(m+2),$$

$$\text{Var}_f(A) = (\alpha + \beta)^2/2[(m+2)(m+3)].$$

1.2 问题描述

问题描述如下:设有 n 个工件 $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ 在一台机器上加工,工件加工过程中无中断,在 $t=0$ 时 n 个工件都可以加工;工件 J_i 的加工时间不确定,用模糊数表示,记 $\tilde{p}_i = (a_i, \alpha_i, \beta_i)$ ($a_i > 0, \alpha_i > 0, \beta_i > 0$), d_i 为确定性工期。对于给定的工件集合的调度 Π ,工件 J_i 在 Π 中的完工时间为 C_i ,提前完工(earliness)时间记为 $E_i = \max\{d_i - C_i, 0\}$,拖期完工(tardiness)时间为 $T_i = \max\{C_i - d_i, 0\}$,提前完工和拖期完工的单位时间惩罚分别为 e_i 和 t_i ;权函数族为 $f(\gamma) = (m+1)\gamma^m$ ($m > 0$)。本文研究的问题为合理安排 n 个工件在一台机器上的加工顺序,并给出每个工件的工期,使得所有工件的提前完工惩罚和拖期完工惩罚之和的 f -加权可能性均值最小,即极小化目标函数

$$f_{\text{cost}}(\Pi, \mathbf{d}) = \bar{M}_f\left(\sum_{i=1}^n (e_i E_i + t_i T_i)\right),$$

式中 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 。使得目标函数达到最小的调度称为最优调度,对应的工期向量为最优工期向量。当只有一个工件时,上述目标函数 $f_{\text{cost}}(\Pi, \mathbf{d})$,简单记作为 $f_{\text{cost}}(d)$,即

$$f_{\text{cost}}(d) = \bar{M}_f(e \max\{d - C, 0\} + t \max\{C - d, 0\}).$$

用三参数表示法表示本文研究的工期指派调度优化问题,目标函数仍表示为

$$1 \mid \tilde{p} \mid \bar{M}_f\left(\sum_{i=1}^n (e_i E_i + t_i T_i)\right).$$

定义5 设工件的完工时间为 C ,权函数均取做 $f(\gamma) = (m+1)\gamma^m$ 。若工期 d^* 使得

$$f_{\text{cost}}(d) = \bar{M}_f(e \max\{d - C, 0\} + t \max\{C - d, 0\})$$

在 $d = d^*$ 时取到最小值,则称 d^* 为该工件相对于完工时间 C 的最优工期,简称最优工期。余下部分,将对权函数 $f(\gamma) = (m+1)\gamma^m$ 取不同的 m 值,来寻找最小的 d 。

2 $1 \mid \tilde{p} \mid \bar{M}_f\left(\sum_{i=1}^n (e_i E_i + t_i T_i)\right)$ 多项式求解算法

定理1 设工件的完工时间为 $C = (a, \alpha, \beta)$,提前完工和拖期完工的单位时间惩罚分别为 e 和 t ,则对于该完工时间,对于权函数 $f(\gamma) = (m+1)\gamma^m$,该工件的最优工期为

$$d^* = \begin{cases} a + \alpha \lceil \sqrt[m+1]{2t/(t+e)} - 1 \rceil, & t \leq e, \\ a + \beta \lceil 1 - \sqrt[m+1]{2e/(t+e)} \rceil, & t > e. \end{cases}$$

证 做线性变换 $d = a + k\alpha$,则

$$f_{\text{cost}}(d) = f_{\text{cost}}(a + k\alpha) = e \bar{M}_f(\max\{0, a + k\alpha - C\}) + t \bar{M}_f(\max\{0, C - (a + k\alpha)\}) \triangleq g_m(k).$$

(1) 当 $k \leq -1$, 即 $d = a + k\alpha \leq a - \alpha$ 。显然, $E = (0, 0, 0)$, $T = (-k\alpha, \alpha, \beta)$ 。从而

$$f_{\text{cost}}(d) = g_m(k) = \bar{M}_f(e \max\{d - C, 0\} + t \max\{C - d, 0\}) = -tk\alpha + \frac{t(\beta - \alpha)}{2(m+2)}.$$

(2) 当 $-1 < k \leq 0$ 时, 即 $d = a + k\alpha \in [a - \alpha, a]$, 则有

$$\begin{aligned} \bar{M}_f(E) &= \int_0^1 \frac{m+1}{2} \gamma^m (0 + 1 + k - \gamma) d\gamma = \alpha \frac{(1+k)^{m+2}}{2(m+2)}, \\ \bar{M}_f(T) &= \int_0^{1+k} \frac{m+1}{2} \gamma^m [0 + (1-\gamma)\beta - k\alpha] d\gamma + \int_{1+k}^1 \frac{m+1}{2} \gamma^m [(-k-1+\gamma)\alpha + (1-\gamma)\beta - k\alpha] d\gamma \\ &= \frac{\beta - (1+2k)\alpha}{2} + \frac{(m+1)(\alpha - \beta)}{2(m+2)} + \frac{\alpha}{2(m+2)} (1+k)^{m+2}. \end{aligned}$$

从而

$$f_{\text{cost}}(d) = g_m(k) = e\bar{M}_f(E) + t\bar{M}_f(T) = \frac{\alpha(t+e)(k+1)^{m+2}}{2(m+2)} + \frac{(\alpha - \beta)(m+1)t}{2(m+2)} - \frac{t\alpha(2k+1) - t\beta}{2}.$$

(3) 当 $0 < k \leq \beta/\alpha$ 时, 即 $d = a + k\alpha \in [a, a + \beta]$, 则有

$$\begin{aligned} \bar{M}_f(E) &= \int_0^{1-\frac{k\alpha}{\beta}} \frac{m+1}{2} \gamma^m [0 + (1-\gamma)\alpha + k\alpha] d\gamma + \int_{1-\frac{k\alpha}{\beta}}^1 \frac{m+1}{2} \gamma^m [k\alpha - (1-\gamma)\beta + (1-\gamma+k)\alpha] d\gamma \\ &= \frac{(1+2k)\alpha - \beta}{2} + \frac{(m+1)(\beta - \alpha)}{2(m+2)} + \frac{\beta}{2(m+2)} (1-k)^{m+2}, \\ \bar{M}_f(T) &= \int_0^{1-\frac{k\alpha}{\beta}} \frac{m+1}{2} \gamma^m [0 + (1-\gamma)\beta - k\alpha] d\gamma = \frac{\beta}{2(m+2)} (1 - \frac{k\alpha}{\beta})^{m+2}. \end{aligned}$$

从而

$$f_{\text{cost}}(d) = g_m(k) = e\bar{M}_f(E) + t\bar{M}_f(T) = \frac{\beta(t+e)(1-k\alpha/\beta)^{m+2}}{2(m+2)} - \frac{(\alpha - \beta)(m+1)e}{2(m+2)} + \frac{e\alpha(2k+1) - e\beta}{2}.$$

(4) 当 $k > \beta/\alpha$ 时, 即 $d = a + k\alpha > a + \beta$, 则有

$$f_{\text{cost}}(d) = g_m(k) = \bar{M}_f(e \max\{d - C, 0\} + t \max\{C - d, 0\}) = ek\alpha + \frac{e(\alpha - \beta)}{2(m+2)}.$$

综上, 可得

$$\begin{aligned} g_m(k) &= \begin{cases} \alpha - tk\alpha + \frac{t(\beta - \alpha)}{2(m+2)}, & k \leq -1, \\ \frac{\alpha(t+e)(k+1)^{m+2}}{2(m+2)} + \frac{(\alpha - \beta)(m+1)t}{2(m+2)} - \frac{t\alpha(2k+1) - t\beta}{2}, & -1 < k \leq 0, \\ \frac{\beta(t+e)(1-k\alpha/\beta)^{m+2}}{2(m+2)} - \frac{(\alpha - \beta)(m+1)e}{2(m+2)} + \frac{e\alpha(2k+1) - e\beta}{2}, & 0 < k \leq \beta/\alpha, \\ ek\alpha + \frac{e(\alpha - \beta)}{2(m+2)}, & k > \beta/\alpha, \end{cases} \\ &= \alpha \begin{cases} -tk + \frac{t(\beta/\alpha - 1)}{2(m+2)}, & k \leq -1, \\ \frac{(t+e)(k+1)^{m+2}}{2(m+2)} + \frac{(1-\beta/\alpha)(m+1)t}{2(m+2)} - \frac{t(2k+1) - t\beta/\alpha}{2}, & -1 < k \leq 0, \\ \frac{\beta/\alpha(t+e)(1-k\alpha/\beta)^{m+2}}{2(m+2)} - \frac{(1-\beta/\alpha)(m+1)e}{2(m+2)} + \frac{e(2k+1) - e\beta/\alpha}{2}, & 0 < k \leq \beta/\alpha, \\ ek + \frac{e(1-\beta/\alpha)}{2(m+2)}, & k > \beta/\alpha, \end{cases} \\ &\triangleq \alpha h_f(e, t, \beta/\alpha, k), \end{aligned}$$

式中 h_f 是关于 $e, t, \beta/\alpha, k$ 的函数。显然, $g_m(k)$ 是关于 k 的分段 $m+2$ 次连续多项式函数。不难发现

$$g'_m(k) = \begin{cases} -t\alpha, & k \leq -1, \\ \frac{\alpha(t+e)(k+1)^{m+1} - t\alpha}{2}, & -1 < k \leq 0, \\ \frac{-\alpha(t+e)(1-k\alpha/\beta)^{m+1} + e\alpha}{2}, & 0 < k \leq \beta/\alpha, \\ e\alpha, & k > \beta/\alpha, \end{cases} \quad (1)$$

显然,当 $k \leq -1$ 时函数递减; $k > 1$ 时函数递增。

当 $-1 < k < 0$ 时, $g''_m(k) = \frac{\alpha(t+e)(k+1)^m}{2} > 0$ 。

对于方程 $g'_m(k) = 0$, 只有当 $t < e$ 时在 $[-1, 0]$ 内有根, 并且其根为 $k = -1 + \sqrt[m+1]{2t/(t+e)}$ 。

当 $0 < k < \beta/\alpha$ 时, $g''_m(k) = \frac{\alpha^2(t+e)}{2\beta}(1 - \frac{k\alpha}{\beta})^m > 0$ 。

对于方程 $g'_m(k) = 0$, 只有 $e < t$ 时在 $[0, \beta/\alpha]$ 内有根, 并且其根为 $k = [1 - \sqrt[m+1]{2e/(t+e)}]\beta/\alpha$ 。

由于二阶导数大于零时驻点取为最小值点, 从而 $g_m(k)$ 取到最小值当 k 取值如

$$k = k^* = \begin{cases} \sqrt[m+1]{2t/(t+e)} - 1, & t \leq e, \\ [1 - \sqrt[m+1]{2e/(t+e)}]\beta/\alpha, & t > e, \end{cases} \quad (2)$$

从而最优工期为

$$d^* = a + \begin{cases} \alpha [\sqrt[m+1]{2t/(t+e)} - 1], & t \leq e, \\ \beta [1 - \sqrt[m+1]{2e/(t+e)}], & t > e. \end{cases}$$

注1 定理1的结果给出了不同权函数对应的最优工期的计算公式, 为设定工件工期提供了不同的选择; 在数值实验部分, 也验证了权函数的恰当选择会使得费用更小。

定义6^[12] 在 $1 | \tilde{p} | \bar{M}_f(\sum_{i=1}^n (e_i E_i + t_i T_i))$ 中, 工件的完工时间为 $C = (a, \alpha, \beta)$, 工期为 d , 则称 $k = (d - a)/\alpha$ 为工期相对于完工时间 C 的峰点 a 和左宽度 α 的客户服务水平, 简称客户服务水平。

对于一个可行调度 Π , 令 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, 对于权函数 $f(\gamma) = (m+1)\gamma^m$ 由定义6知 $f(\Pi, \mathbf{d})$ 可表示为

$$\begin{aligned} f(\Pi, \mathbf{d}) &= \bar{M}_f(\sum_{i=1}^n \max\{e_i(d_i - C_i), 0\} + \max\{t_i(C_i - d_i), 0\}) \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_f(\max\{e_i(a_i + k_i\alpha_i - C_i), 0\} + \max\{t_i[C_i - (a_i + k_i\alpha_i)], 0\}) \triangleq g_m(\Pi, \mathbf{k}). \end{aligned}$$

从而本文研究的问题 $1 | \tilde{p} | \bar{M}_f(\sum_{i=1}^n (e_i E_i + t_i T_i))$ 等价于 $1 | \tilde{p} | g_m(\Pi, \mathbf{k})$, 即合理安排工件的加工顺序, 合理确定每个工件工期的客户服务水平, 并按照 $d_i = a_i + k_i\alpha_i (i = 1, \dots, n)$ 来确定工期, 使得目标函数最小。

定义7 设工件的完工时间为 $C = (a, \alpha, \beta)$, 宽度比为 $\omega = \beta/\alpha$, 提前完工和拖期完工的单位时间惩罚分别为 e 和 t , 工期 d 的客户服务水平为 k , 权函数 $f(\gamma) = (m+1)\gamma^m (m > 0)$, 则称

$$q \triangleq h_f(e, t, \omega, k) = \begin{cases} -tk + \frac{t(\omega-1)}{2(m+2)}, & k \leq -1, \\ \frac{(t+e)(k+1)^{m+2}}{2(m+2)} + \frac{(1-\omega)(m+1)t}{2(m+2)} - \frac{t(2k+1) - t\omega}{2}, & -1 < k \leq 0, \\ \frac{\omega(t+e)(1-k/\omega)^{m+2}}{2(m+2)} - \frac{(1-\omega)(m+1)e}{2(m+2)} + \frac{e(2k+1) - e\omega}{2}, & 0 < k \leq \omega, \\ ek + \frac{e(1-\omega)}{2(m+2)}, & k > \omega, \end{cases} \quad (3)$$

为工件具有宽度比 J_i 的单位综合惩罚权重,简称为单位综合惩罚权重。

给定一个 Π ,不失一般性,令 $\Pi=(J_1, J_2, \dots, J_n)$ 。在该调度 Π 中,根据模糊数的加法,我们得到 J_i 的完工时间为 $C_i=(\sum_{j=1}^i a_j, \sum_{j=1}^i \alpha_j, \sum_{j=1}^i \beta_j)$ 。同时指派工期为 d_i ,根据定义 6,对于每个工件,我们有 $d_i =$

$\sum_{j=1}^i \alpha_j + k_i \sum_{j=1}^i \alpha_j$ 。令 $\mathbf{d}=(d_1, d_2, \dots, d_n)$,则

$$\begin{aligned} f(\Pi, \mathbf{d}) &= g_m(\Pi, \mathbf{k}) \\ &= \bar{M}_f(\sum_{i=1}^n \max\{e_i(\sum_{j=1}^i a_j + k_i \sum_{j=1}^i \alpha_j - C_i), 0\} + \max\{t_i[C_i - (\sum_{j=1}^i a_j + k_i \sum_{j=1}^i \alpha_j)], 0\}) \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_f(\max\{e_i(\sum_{j=1}^i a_j + k_i \sum_{j=1}^i \alpha_j - C_i), 0\} + \max\{t_i[C_i - (\sum_{j=1}^i a_j + k_i \sum_{j=1}^i \alpha_j)], 0\}) \\ &= \sum_{i=1}^n [h_f(e_i, t_i, \omega_i, k_i) \sum_{j=1}^i \alpha_j]。 \end{aligned} \quad (4)$$

根据式(4),当每个工件加工时间具有相同宽度比时,我们有如下结论。

定理 2 设工件 J_i 的加工时间为 $\tilde{p}_i=(a_i, \alpha_i, \beta_i)$ ($i=1, \dots, n$) 具有相同宽度比 ω 该工件集任一最优调度记为 $\langle \Pi=\{J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_n}\}, \mathbf{d}, \mathbf{k}=\{k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_n}\} \rangle$ 。令

$$k_{i_j}^* = \begin{cases} \sqrt[m+1]{2t_{i_j}/(t_{i_j} + e_{i_j})} - 1, & t_{i_j} \leq e_{i_j}, \\ \omega [1 - \sqrt[m+1]{2e_{i_j}/(t_{i_j} + e_{i_j})}], & t_{i_j} > e_{i_j}, \end{cases}$$

则对于每一个工件,有

$$k_{i_j} = k_{i_j}^* = \begin{cases} \sqrt[m+1]{2t_{i_j}/(t_{i_j} + e_{i_j})} - 1, & t_{i_j} \leq e_{i_j}, \\ \omega [1 - \sqrt[m+1]{2e_{i_j}/(t_{i_j} + e_{i_j})}], & t_{i_j} > e_{i_j}, \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, n)。$$

证 假设存在一个 j_0 满足 $k_{i_{j_0}} \neq k_{i_{j_0}}^*$ 。不失一般性,令 $\mathbf{k}^*=(k_{i_1}^*, \dots, k_{i_n}^*)$ 。因为每个工件加工时间的宽度之比均为 $\mathbf{k}^*=(k_{i_1}^*, \dots, k_{i_n}^*)$,则在调度 Π 中,每个工件的完工时间的宽度比均为 $\mathbf{k}^*=(k_{i_1}^*, \dots, k_{i_n}^*)$ 。令 $\mathbf{k}^*=(k_{i_1}^*, \dots, k_{i_n}^*)$,从而有

$$\begin{aligned} g_m(\Pi, \mathbf{k}) &= \sum_{l=1}^n [h_f(e_{i_l}, t_{i_l}, \omega, k_{i_l}) \sum_{j=1}^l \alpha_{i_j}] \\ &\geq \sum_{l=2}^n [h_f(e_{i_l}, t_{i_l}, \omega, k_{i_l}^*) \sum_{j=1}^l \alpha_{i_j}] + h_f(e_{i_1}, t_{i_1}, \omega, k_{i_1}^*) \alpha_{i_1} \\ &= g_m(\Pi, \mathbf{k}^*), \end{aligned}$$

这与 Π 是最优的相矛盾,因此结论成立。

上述定理表明,当 n 个工件的加工时间宽度比相同时,对于工件 J_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的工期 d_i 的客户服务水平 k_i 在任何最优调度中都是相同的,并且 k_i 由 e_i, t_i, ω 和权函数 $f(\gamma)=(m+1)\gamma^m$ 唯一确定。基于上述定理,我们给出加工时间具有相同宽度比、权函数 $f(\gamma)=(m+1)\gamma^m$ ($m>0$) 时求解 $1 \mid \tilde{p} \mid \bar{M}_f(\sum_{i=1}^n (e_i E_i + t_i T_i))$ 的多项式算法。

算法 1

step 1 根据(2)式,当权函数为 $f(\gamma)=(m+1)\gamma^m$,计算最优客户服务水平 k_i^* ($i=1, \dots, n$);根据(3)式,计算在最优客户服务水平 k_i^* 下的单位综合惩罚权重 q_i ($i=1, \dots, n$)。

step 2 按照 q_i/α_i 非增的顺序排列工件的加工顺序,得到调度 $\Pi=\{J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_n}\}$ 。对于 Π 中的 J_{i_i} ,指派工期

$$d_{i_i} = \sum_{k=1}^{i_i} a_{i_k} + k_{i_i}^* \sum_{k=1}^{i_i} \alpha_{i_k}。$$

step 3 输出 Π , $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 和 $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ 。

定理 3 当工件加工时间具有相同宽度比时,对带有权函数 $f(\gamma) = (m+1)\gamma^m$ 的工期指派问题 $1 | \tilde{p} | \bar{M}_f(\sum_{i=1}^n (e_i E_i + t_i T_i))$ 是多项式可解的。

证 显然算法 1 是多项式时间算法,其计算复杂度为 $O(n \log n)$ 。假设存在一个最优调度 $\langle \Pi, k \rangle$ 不是由算法 1 得到的。根据定理 2,可知 $k = k^*$ 。从而至少存在两个相邻的工件 J_j 和 J_k 在 Π 中, J_j 在 J_k 之前加工,但是 $(q_j/\alpha_j) < (q_k/\alpha_k)$ 。调换 J_j 和 J_k 的加工顺序,就可得到另一个调度 Π' ,且

$$g_m(\Pi, k^*) - g_m(\Pi', k^*) = \alpha_j \alpha_k (q_k/\alpha_k - q_j/\alpha_j) > 0,$$

这与 Π 是最优调度相矛盾,从而定理成立。

例 1 设有 5 个工件,工件具体信息如表 1 所示。每种工件提前完工单位时间惩罚 e_i 和拖期完工单位时间惩罚 t_i ($i = 1, \dots, 10$) 分别在表 1 的第 2 和第 3 列;每种工件收集的加工时间历史数据在表 1 的第 4 列;由加工时间的历史数据构造模糊加工时间的方法为:对于每一种工件,用它的已收集的数据的平均数作为模糊加工时间的峰点 a ,用该组数据中的最小值与均值的距离作为模糊加工时间的左宽度 α ,用该组数据中最大值与均值的距离作为模糊加工时间右宽度 β ,从而得到每种工件的模糊加工时间 (a, α, β) ;经计算,5 个工件的模糊加工时间在表 1 的第 5 列。

表 1 工件信息
Table 1 Jobs' information

Jobs	Per unit earliness penalties (e_i)	Per unit tardiness penalties (t_i)	Discrete data collected for processing times	Fuzzy processing time
J_1	4	1	[4, 6, 6.5, 6.5, 7]	(6, 2, 1)
J_2	2	4	[6, 10, 10.5, 11.5, 12]	(10, 4, 2)
J_3	1	5	[8, 11.5, 13, 13.5, 14]	(12, 4, 2)
J_4	6	3	[5, 8, 8.5, 9, 9.5]	(8, 3, 1.5)
J_5	5	3	[3, 4, 4, 4.5, 4.5]	(4, 1, 0.5)

令权函数为 $f(\gamma) = (4+1)\gamma^4$,根据公式(2),计算可得到工件的最优客户服务水平向量为

$$k^* = (-0.167\ 446, 0.015\ 578, 0.032\ 876, -0.077\ 89, -0.055\ 91),$$

根据公式(3),计算得到最优客户服务水平下的单位综合惩罚权重向量为

$$\omega = (0.236\ 7, 0.329\ 82, 0.031\ 469, 0.206\ 83, 0.421\ 031)。$$

再根据算法 1,可以得到最优调度为: $J_3 \rightarrow J_4 \rightarrow J_2 \rightarrow J_1 \rightarrow J_5$;每个工件的最优工期为

$$(d_1^*, d_2^*, \dots, d_5^*) = (11.469, 10.473\ 7, 4.065\ 7, 6.442\ 56, 12.245\ 38)。$$

3 数值实验

为验证本文提的方法的有效性,在相同的数据集上与现有方法^[7,12]进行比较,具体做法见图 1。

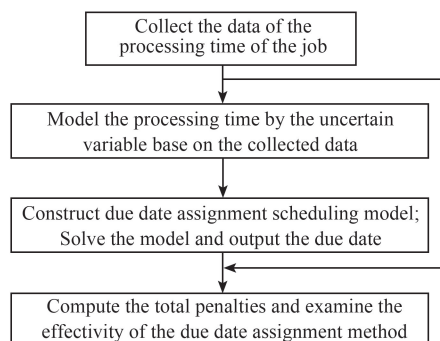


图 1 检验不确定环境下工期指派方法有效性流程图

Fig. 1 Flowchart for verifying the effectiveness of due date assignment methods in uncertain environments

文献[7]和[12]分别讨论了当完工时间服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 和对数正态分布时,如何确定最优工期 d ,使得提前完工惩罚和拖期完工惩罚的期望 $E(\max\{d - C, 0\} + t \max\{C - d, 0\})$ 最小。当工件加工时间服从伽马分布和瑞利分布时,本文给出了如何确定工期 d 使得 $E(\max\{d - C, 0\} + t \max\{C - d, 0\})$ 最小,计算工期 d 的具体过程参见文本附录。

为了叙述方便,以下称附录中给出的当工件服从各种分布的工期指派方法为方法 A,文[12]中针对加工时间为非对称三角模糊数的工期指派方法为方法 B,本文给出的方法为方法 C。针对 m 不同的取值分为 C_1, C_2, C_3, C_4 , 分别对应 $m = 2, 4, 8, 16$ 时。特别地,当 $m = 2$ 时与文献[12]的方案相同。

情形 1: 加工时间抽样数据服从对数正态分布时,工件的加工时间服从对数正态分布 ξ , (其中参数 $\mu = 0$, $\sigma = 0.7$, 即 $\ln \xi \sim N(0, 0.7)$), 提前完工单位时间惩罚和拖期完工单位时间惩罚分别为 $e = 3$ 和 $t = 18$ 。

第一步,对工件加工时间数据样本进行采集。抽样方法如下:由于工件加工时间服从对数正态分布,即 $\ln \xi \sim N(0, 0.7)$, 利用 Python 的 Numpy 包抽取按照 $N(0, 0.7)$ 分布的数据 i , 随后将这些数据做指数运算 $\xi = e^i$ 得到工件加工时间数据,共抽取 6 个样本,样本容量分别为 40, 80, 160, 320, 640, 1 280。同时为了排除数据偶然性的影响,最终结果取惩罚的均值,并且同一样本数下反复随机取数据(本文反复取 20 次),最后将这些数据再平均,以尽量减小实验的偶然性。

第二步,利用以上样本,用不确定变量模拟上述样本数据。方法 A,用对数正态分布 ξ , 其中参数 $\mu = 0$, $\sigma = 0.7$; 方法 B 和方法 C 中 α 与 β 的选择利用 3σ 原则来确定,于是可得非对称三角模糊数

$$(\alpha, \alpha, \beta) = (e^{0.5\sigma}, e^{0.5\sigma} - e^{-2.7\sigma}, e^{2.7\sigma} - e^{0.5\sigma}) = (1.419\ 1, 1.268\ 0, 5.200\ 3),$$

式中 e 为自然对数函数的底。

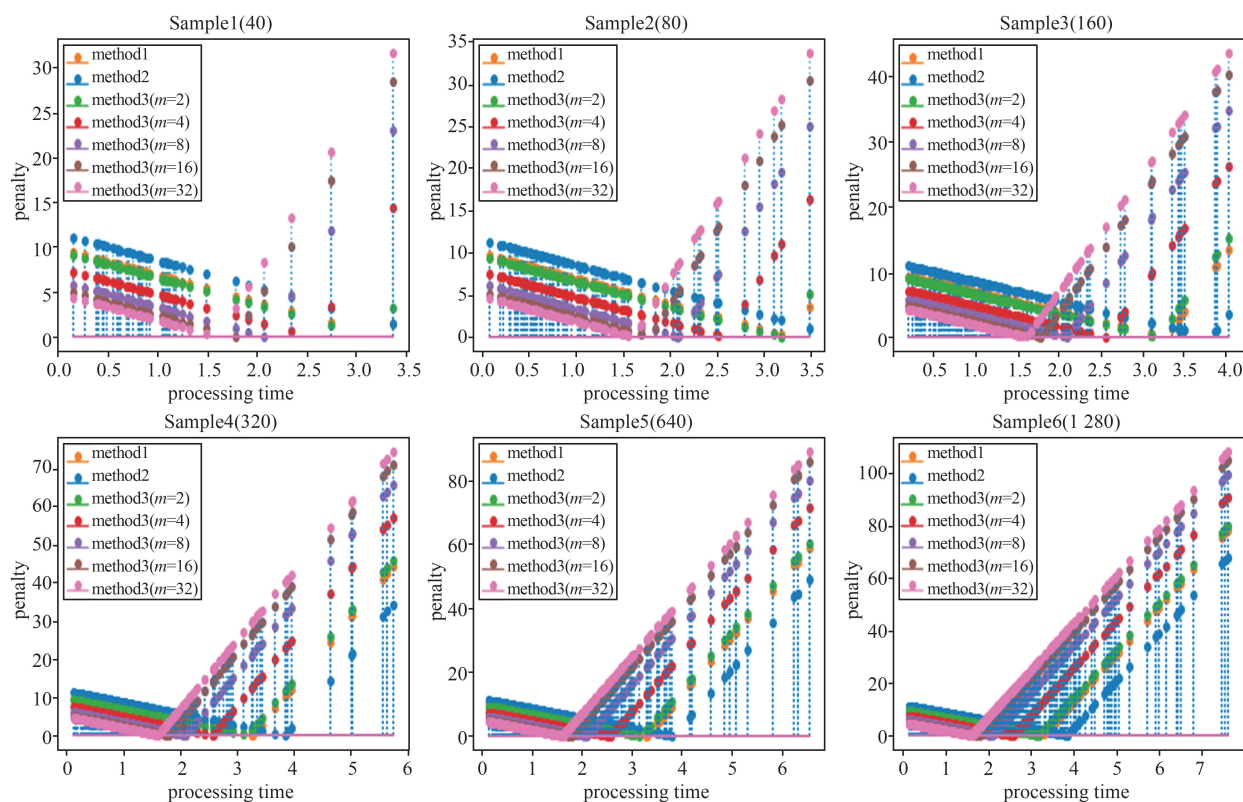


图 2 对数正态分布的样本 1~6 中每个工件提前完工惩罚和拖期完工惩罚

Fig. 2 Earliness-tardiness penalties for jobs in samples 1~6 with Lognormal distribution

第三步,根据方法 A,方法 B 和方法 C 中不同的权函数(这里的权函数中 m_i 的值取做 2, 4, 8, 16), 分别计算最优工期 $d_1^*, d_2^*, d_{m_i}^*$ 。计算可得: $d_1^* = 3.287\ 1, d_2^* = 3.839\ 7, d_{m_2}^* = 3.194\ 3, d_{m_4}^* = 2.571\ 5, d_{m_8}^* = 2.094\ 8, d_{m_{16}}^* = 1.788\ 5$ 。

第四步,针对上述三种方法计算出的最优工期,分别计算 6 个样本的中每个工件的拖期完工和提前完工

惩罚值,具体见如图2,其中横轴表示的工件的加工时间,纵轴表示对应的拖期完工/提前完工惩罚值的平均值。

对于上述6个样本,由方法A、方法B、方法C确定的工期而产生的平均惩罚和参见表2的2到6列。可以直接从数据集看出,当 m 取到8时(即方法 C_3)比其他方法更加优越。

表2 抽样数据服从对数正态分布的数值实验

Table 2 Numerical experiment on sampling data following Lognormal distribution

Samples	Penalties (method A)	Penalties (method B)	Penalties (method C1)	Penalties (method C2)	Penalties (method C3)	Penalties (method C4)
sample 1	6.730	8.160	6.530	5.590	5.330	5.430
sample 2	6.970	8.130	6.800	5.740	5.201	5.358
sample 3	5.358	9.011	7.502	6.487	6.137	6.417
sample 4	7.029	8.323	6.825	5.670 1	5.110 2	5.090
sample 5	6.893	8.255 7	6.694	5.482	5.073	5.255
sample 6	6.800	8.172	6.591	5.530 1	5.254	5.491

事实上,我们可以得到 m 与在该 m 下确定的 d^* 所模拟出的拖期完工/提前完工惩罚值均值的关系图(图3),可以发现在相同的数据样本下,按照图像趋势总有一个较小值,该值可以作为得到最优 m 的参考。

情形2:当拖期的数据明显增多时,对数正态分布就不能更很好的去模拟数据,于是考虑用伽马分布来模拟这种情况。

取样的方法和原则与情形1一致。伽马分布 $f(x, \beta, \alpha) = [\beta^\alpha / \Gamma(\alpha)] x^{\alpha-1} e^{-x\beta}$ 中 $\beta = 1, \alpha = 5$,惩罚系数 $e = 18, t = 2$ 时。

利用文[7]的随机方法确定 $d_1^* = 7.99$,方法B和方法C中的 α 和 β 用伽马函数的分位数得到数值解: $\alpha = 4.9, \beta = 7.4$ 。这可以保证95%以上的数据在区间 $(a - \alpha, a + \beta)$ 中,针对不同权函数计算

$$d_2^* = 11.17, d_{m2}^* = 9.64, d_{m4}^* = 8.075, d_{m8}^* = 6.829, d_{m16}^* = 6.009 4。$$

以这一组不同权函数对应的最优工期计算每个工件的拖期完工和提前完工惩罚值,如图4所示,横轴表示的工件的加工时间,纵轴表示对应的拖期完工/提前完工惩罚值。

对于上述6个样本,方法A、方法B、方法C确定的工期而产生的平均惩罚和参见表3的2~6列。

表3 抽样数据服从伽马分布的数值实验

Table 3 Numerical experiment on sampling data following Gamma distribution

Samples	Penalties (method A)	Penalties (method B)	Penalties (method C1)	Penalties (method C2)	Penalties (method C3)	Penalties (method C4)
sample 1	9.634	12.485	10.336	9.615	10.957	13.468
sample 2	9.360	12.56	10.314	9.351	10.469	12.941
sample 3	9.397	12.791	10.454	9.395	10.339	12.420
sample 4	9.332	12.758	10.460	9.331	10.388	12.620
sample 5	9.037	12.648	10.232	9.0375	10.070	12.280
sample 6	9.166	12.654	10.293	9.165	10.192	12.467

从表中可以看出,在伽马分布情况下,加权形式当 $m = 4$ 的时候可以到达较优,也可以通过以下图像

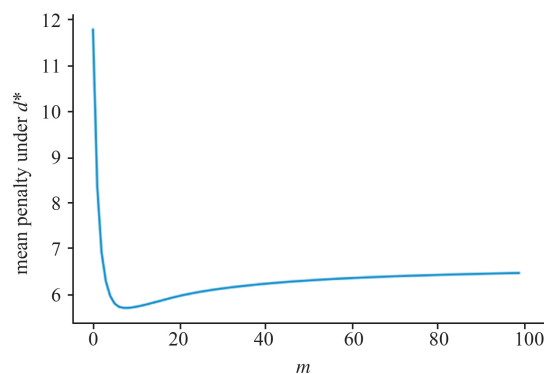


图3 对数正态分布时 m 与拖期完工/提前完工惩罚值的关系图像

Fig. 3 The relationship between m and earliness-tardiness penalties under Lognormal distribution

看出,当 $m=4$ 的时候在离散正整数上是最优的,仍然可以得到 m 与在该 m 下确定的 d^* 所模拟出的拖期完工/提前完工惩罚值的关系图(图 5)。

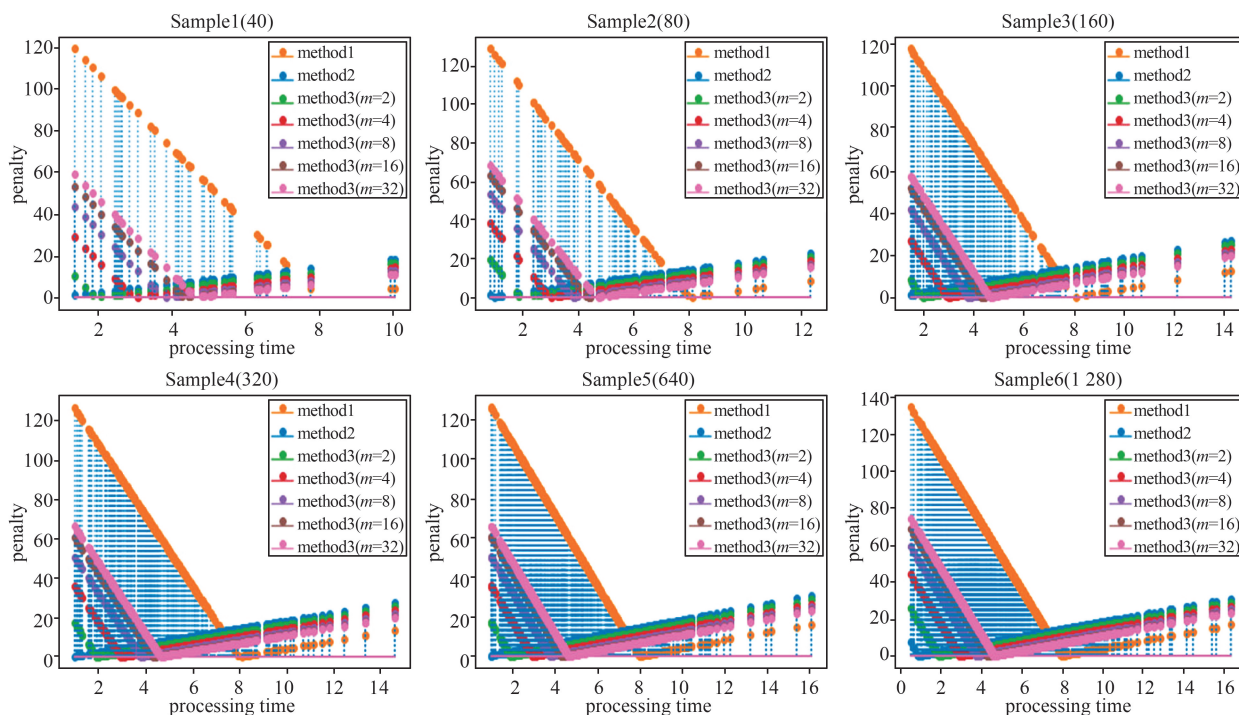


图 4 伽马分布的样本 1~6 中每个工件提前完工惩罚和拖期完工惩罚

Fig. 4 Earliness-tardiness penalties for jobs in samples 1~6 with Gamma distribution

情形 3:从数据上来看,若非对称数据的分布不集中时,其密度函数如图 6 所示。

利用瑞利分布来近似表示上述分布,考虑瑞利分布 $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ 。当 $\sigma=3$,根据瑞利分布性质得 $a=1.253 \times 3$,惩罚系数取 $e=1, t=2$ 。同样采用随机方法计算(具体见附录)可得 $d_1^* = 5.38$,方法 B 和方法 C 中的 α 和 β 用瑞利分布的分位数得到数值解 $\alpha=a, \beta=10-a$,这可以保证 97% 以上的数据在区间 $(a-\beta, a+\alpha)$ 中,针对不同权函数计算得

$$d_2^* = 6.318, d_{m2}^* = 5.522, d_{m4}^* = 4.845, d_{m8}^* = 4.373, d_{m16}^* = 4.087。$$

以这一组不同权函数对应的最优工期,计算每个工件的拖期完工和提前完工惩罚值,具体见图 7,横轴表示的工件的加工时间,纵轴表示对应的拖期完工/提前完工惩罚值。

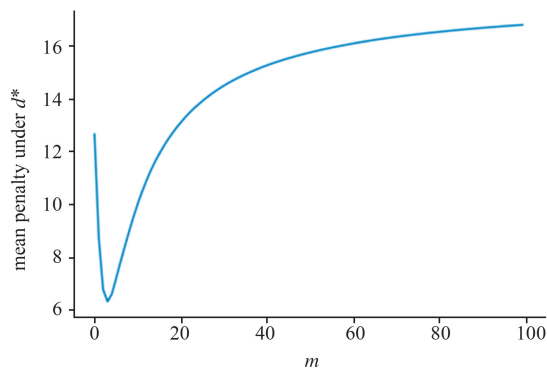


图 5 伽马分布时 m 与拖期完工/提前完工惩罚值的关系
Fig. 5 The relationship between m and earliness-tardiness penalties under Gamma distribution

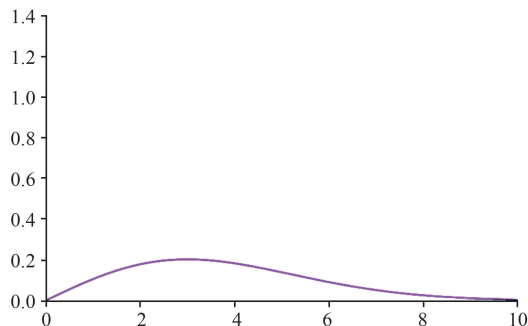


图 6 非对称且数据分布不集中的分布
Fig. 6 Asymmetric and uneven distribution of data

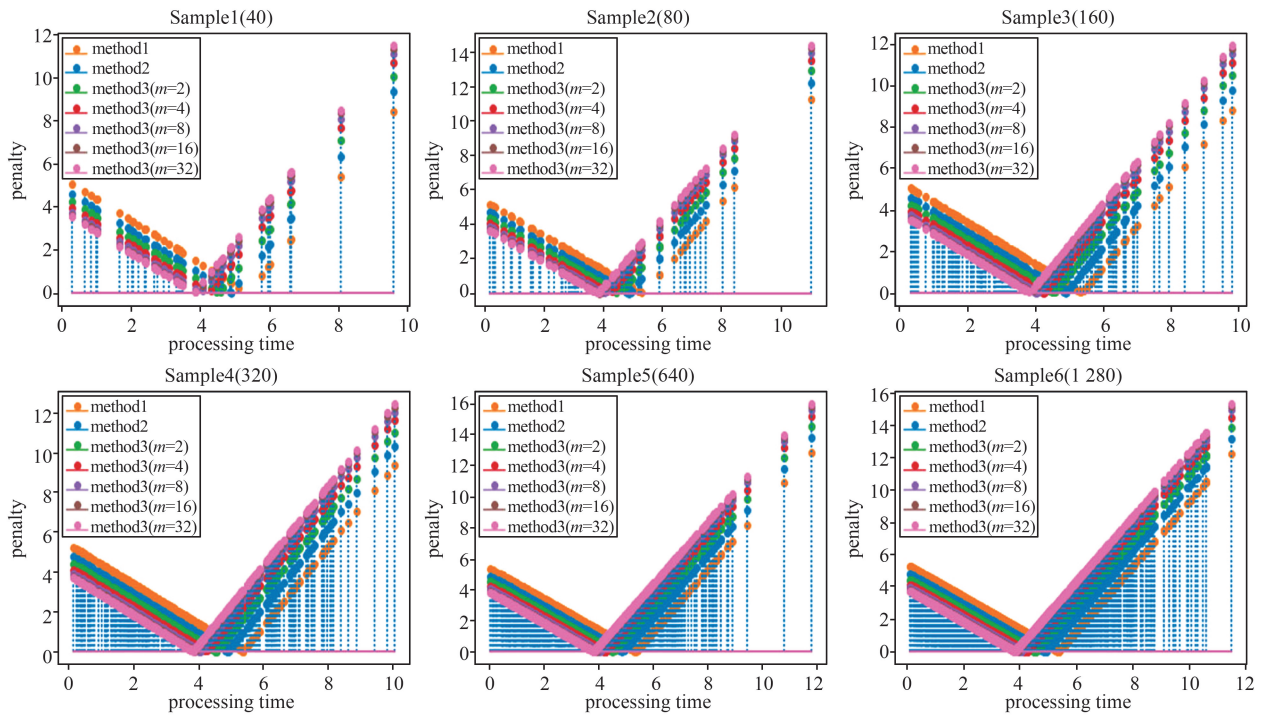
图 7 瑞利分布时 m 与拖期完工/提前完工惩罚值的关系图像

Fig. 7 Earliness-tardiness penalties for jobs in samples 1~6 with Rayleigh distribution

对于上述 6 个样本,由方法 A、方法 B、方法 C 确定的工期而产生的平均惩罚和参见表 4 的 2 到 6 列。

表 4 抽样数据服从瑞利分布的数值实验

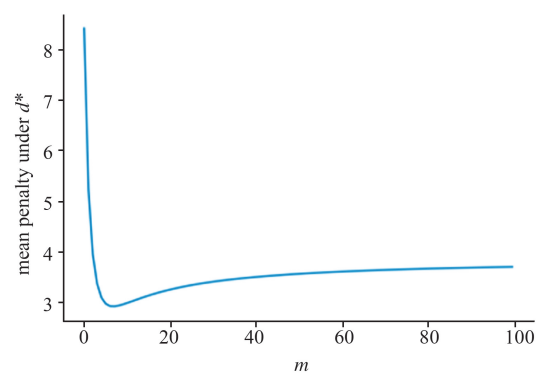
Table 4 Numerical experiments on sampling data following Rayleigh distribution

Samples	Penalties (method A)	Penalties (method B)	Penalties (method C1)	Penalties (method C2)	Penalties (method C3)	Penalties (method C4)
sample 1	3.138	6.497	4.741 9	3.518 8	3.129	3.357
sample 2	3.084 4	6.646	4.850 9	3.521	3.084	3.265
sample 3	3.066	6.585	4.793	3.477	3.062	3.252
sample 4	2.973	6.609	4.792	3.424	2.972	3.148
sample 5	3.046	6.622	4.824	3.470	3.045	3.223
sample 6	2.994	6.622	4.808	3.441	2.993	3.170

由表中数据,在瑞利分布中,方案 C 要优于方案 A 与方案 B。事实上我们仍有类似对数正态分布和伽马分布的规律(图 8)。

4 总结

本文对于工件加工时间统计样本较少无法得出具体分布且分布不对称的情形,构建了针对单工件工期指派调度优化问题的 m 次加权模型,给出了 m 确定下最优 d^* 的解析形式,基于这个解析形式与一些性质进一步优化了工件加工时间具有相同宽度比时的多项式求解算法。但对工件间具有优先加工顺序约束等复杂约束条件下工期指派调度加权模型如何建立和求解仍没解决,是这类问题的难点,也是未来研究的方向。

图 8 瑞利分布时 m 与拖期完工/提前完工惩罚值的关系图Fig. 8 The relationship between m and earliness-tardiness penalties under Rayleigh distribution

5 附录

关于对数正态分布的详细求法可见文献[12]。本部分展示当工件的完工时间 ξ 服从伽马分布和瑞利分布时,如何得到工期 d 使得拖期完工和提前完工费用均值最小。设分布的密度函数为 $f(x)$, 令 $E = \max\{d - \xi, 0\}$, $T = \max\{\xi - d, 0\}$, 则 E, T 的分布函数分别如

$$\begin{aligned} F_E(y) &= P(E \leq y) \\ &= P(\max\{d - \xi, 0\} \leq y) \\ &= \begin{cases} 0, & y < 0, \\ P(d - \xi \leq y), & y \geq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - P(\xi < d - y), & y \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

对 y 求导便可得到结果从而, E 的概率密度函数为

$$f_E(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \text{ 或 } y \geq d, \\ f(d - y), & 0 \leq y < d. \end{cases} \quad (6)$$

同理 $T = \max\{\xi - d, 0\}$ 的分布函数和密度函数如

$$\begin{aligned} F_T(z) &= P(T \leq z) \\ &= P(\max\{\xi - d, 0\} \leq z) \\ &= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ P(\max\{\xi - d, 0\} \leq z), & z \geq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ P(\xi \leq z + d), & z \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

因此, T 的概率密度函数为

$$f_T(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ f(z + d), & z \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

令提前完工和拖期完工费用的数学期望为 $E(eE + tT) \triangleq g(d)$ 。进一步有

$$\begin{aligned} g(d) &= e \int_{-\infty}^{+\infty} y f_E(y) dy + t \int_{-\infty}^{+\infty} z f_T(z) dz \\ &= e \int_0^d y f(d - y) dy + t \int_0^{+\infty} y f(d + y) dy \\ &= e \int_0^d (d - x) f(x) dx + t \int_d^{+\infty} (x - d) f(x) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

接下来将分布的密度函数带入后,再对 $g(d)$ 做优化便可。伽马分布时: $f(x) = \frac{1}{24} x^4 e^{-x}$,

$$g(d) = \frac{e}{24} (d \int_0^d x^4 e^{-x} dx - \int_0^d x^5 e^{-x} dx) + \frac{t}{24} (\int_d^{+\infty} x^5 e^{-x} dx - d \int_d^{+\infty} x^4 e^{-x} dx), \quad (10)$$

$$\text{则有 } g'(d) = \frac{e}{24} \int_0^d x^4 e^{-x} dx + \frac{t}{24} \int_d^{+\infty} x^4 e^{-x} dx, g''(d) = \frac{t+e}{24} d^4 e^{-d}.$$

从而可得 $g''(d) > 0$, $\lim_{d \rightarrow +\infty} g'(d) > 0$, $\lim_{d \rightarrow 0} g'(d) \leq 0$ 从而 $g'(d) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的根 d^* , 并且根据凸函数的性质 d^* 恰好使得 $g(d) = E(eE + tT)$ 取得最小值。带入 t 和 e 的值,化简得 d^* 即为 $e^{-x}(24 + 24x + 12x^2 + 4x^3 + x^4) - 2.4 = 0$ 的解。由数值解法可得 $x = 7.99$ 。

对于瑞利分布也同理,带入 $f(x) = \frac{x}{9} e^{-x^2/18}$, $t = 2, e = 1$ 。可得

$$g(d) = -3de^{-d^2/18} + d + 2\int_d^{+\infty} xf(x)dx - \int_0^d xf(x)dx,$$

求导可得 $g'(d) = -3de^{-d^2/18} + 1$ 。

易知, $g''(d) > 0$ 且 $g'(d)$ 在 $(0, +\infty)$ 有唯一根 d^* , 根据凸函数的性质 d^* 恰好使得 $g(d) = E(eE + tT)$ 取得最小值, $d^* = 3\sqrt{2\ln 3}$, $d^* \approx 5.38$ 。

参 考 文 献

- [1] GORDON V, PORTH J M, CHU C B. A survey of the state-of-the-art of common due date assignment and scheduling research[J]. European Journal of Operational Research, 2002, 139(1): 1-25.
- [2] ZHAO C L, HSU C J, CHENG S R, et al. Due date assignment and single machine scheduling with deteriorating jobs to minimize the weighted number of tardy jobs[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 248(1): 503-510.
- [3] JANI A K, KWIATKOWSKI T, LICHTENSTEIN M. Scheduling problems with a common due window assignment: a survey[J]. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 2013, 23(1): 231-241.
- [4] SHABTAY D, STEINER G. Two due date assignment problems in scheduling a single machine[J]. Operations Research Letters, 2006, 34(6): 683-691.
- [5] YIN Y Q, Cheng T C, HSU C J, et al. Single machine batch delivery scheduling with an assignable common due window[J]. Omega, 2013, 41(2): 16-225.
- [6] MOSHEIOV G, SARIG A. Scheduling with a common due-window: polynomially solvable cases[J]. Information Sciences, 2010, 180(8): 1492-1505.
- [7] PORTOUGAL V, TRIETSCH D. Setting due dates in a stochastic single machine environment[J]. Computers & Operations Research, 2006, 33(6): 1681-1694.
- [8] BAKER K. Minimizing earliness and tardiness costs in stochastic scheduling[J]. European Journal of Operational Research, 2014, 236(2): 445-452.
- [9] LI J, SUN K, XU D, et al. Single machine due date assignment scheduling problem with customer service level in fuzzy environment[J]. Applied Soft Computing, 2010, 10(3): 849-858.
- [10] LI J, YUAN X, LEE E, et al. Setting due dates to minimize the total weighted possibilistic mean value of the weighted earliness/tardiness costs on a single machine[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(11): 4126-4139.
- [11] 李金权, 曾文艺, 王群智. 非对称模糊加工时间工期指派调度优化问题的一类多项式求解算法[J]. 北京师范大学学报, 2017, 53(2): 127-132.
- [12] 李金权, 吴雨豪. 具有非对称模糊加工时间工期指派调度优化问题的一类加权模型及其求解算法[J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(1): 170-180.
- [13] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [14] HANSS M. Applied fuzzy arithmetic: an introduction with engineering applications[M]. Berlin: Springer, 2005.
- [15] CARLSSON C, FULLER R. On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(2): 315-326.

(责任编辑: 刘庆松)