

文章编号 1672-6634(2023)04-0028-07

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2023010002

基于状态反馈求解布尔控制网络的可重构问题

刘 洋,宣子禹

(浙江师范大学 数学科学学院,浙江 金华 321000)

摘 要 主要从图的角度研究了布尔控制网络(Boolean Control Network, BCN)可重构的条件。首先,从状态可区分的角度给出了BCN可重构的定义,为后续从状态转移图的角度来研究可重构问题奠定了基础。其次,给出了BCN中完美顶点划分的概念及其相关推论。随后,提出了可重构的一些充分和必要的条件。其中一个结果表明,当处理大型逻辑网络系统时,只需要考虑更少的节点来避免维数诅咒。最后,通过一个具体的生物学实例和一个具体的例子说明所得到的结果。

关键词 布尔网络;顶点划分条件;矩阵的半张量积

中图分类号 O231

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Reconstruction of Boolean Control Networks via State Feedback

LIU Yang, XUAN Ziyu

(College of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua 321000, China)

Abstract This paper mainly studies the conditions under Boolean control networks(BCN) are reconstructable from the view of graph. Firstly, the reconstructable definition of BCN is given from the point of view of state distinguish. It lays a foundation for the subsequent study of reconstructable problem from the view of state transition graph. Secondly, perfect vertex partitions in BCN and its correlative corollaries are given. Thirdly, we give some sufficient and necessary conditions for reconstruction. One of the results shows when dealing with large logical network systems, we can only consider fewer nodes to avoid the curse of dimension. Finally, the biological example is given to illustrate the results obtained.

Key words Boolean control networks; vertex partition condition; semi-tensor product of matrices

1 引言

因为与自然系统和人工系统有着密不可分的关系,布尔网络(Boolean Networks, BN)引起了人们极大的研究兴趣。比如,神经网络已被证明适用于描述和模拟遗传调控网络的行为。细胞内的调节基因对应布尔网络中的二值化配置,1和0(分别为“开”和“关”的状态)。1969年,考夫曼引入随机布尔网络作为遗传网络的模型^[1]。只要给定初始条件, BN中的动态变化是唯一确定。显然,人们更需要能被人为影响的网络。

收稿日期:2023-01-02

基金项目:国家自然科学基金项目(62173308);浙江省自然科学基金项目(LR20F030001, LD19A010001)资助

通讯作者:刘洋,男,汉族,博士,教授,研究方向:逻辑系统、分布式优化和混杂系统, E-mail:liuyang@zjnu.edu.cn.

所以,布尔网络的定义就自然延伸到了布尔控制网络(Boolean Control Network, BCN)。在过去的十五年中,程代展和他的同事从代数框架的角度来处理 BN 和 BCN^[2-4],并研究了一些相关的理论问题,比如:可稳定性、可控性、干扰解耦^[5]和最优控制问题。与此同时,他们的研究激发了更多人对 BCN 的研究兴趣。大量的应用领域也进一步证实了这种网络是有效的建模工具。 n 个状态节点的 BN 拥有 2^n 种可能的状态配置。如果将所有的状态配置用长度为 2^n 的非负向量表示,那么所有逻辑映射可以等效地用 $2^n \times 2^n$ 的 BN 来描述状态更新。基于这种思想,一个 BCN 可以对应成一个离散时间的双线性系统。根据这一结论,基于矩阵表达形式产生了许多性质和控制问题,如:稳定性^[6,7]、渐进稳定性^[8,9]、可控性^[10,11]、牵制控制^[12,13]、最优控制^[14]、可观性^[15,16]、干扰解耦^[17-19]和故障诊断^[20-22]。

BCN 是否能够从输入和输出测量中推导出内部逻辑状态是非常关键的。在过去的几年中, FORNASINI 和 VALCHER^[23], ZHANG^[24]和 XU, HONG^[25]已经考虑了 BCN 的可重构问题。他们的方法是找到具有相同最小周期的所有不同的周期状态输入轨迹。然而,要找到所有的周期状态输入轨迹有时比较困难。ZHANG 等人应用形式化语言并基于有限自动机理论给出了一种新的方法。此外, XU 和 HONG 给出了一种基于矩阵半张量积(Semi-Tensor Product of matrices, STP)的方法进行可重构性分析。虽然,使用该方法需要考虑的输入和输出轨迹的长度必须是先验的并且还需要计算两个高维矩阵,但是在计算机科学中利用 STP 引入递归矩阵的方法进行可重构性分析,仍然是一种常用的方法。可重构性作为系统的重要特性之一,它反映了状态观测器对真实状态的收敛性。在故障检测问题上,输出测量通常用于检测和识别系统故障,可重构性和故障检测问题的可解决性之间的联系已经有了一定的结论^[26]。在医学和生物应用中^[27],系统的可重构性意味着能够通过使用测试输入和测量相应的输出来执行正确的诊断。尤其是用 BN 对基因调控网络建模时,了解基因调控网络是否处于健康状态依赖于是否能从输出测量中重构 BN 的状态。例如,从输出测量中检测氧化应激反应水平可以预防心血管疾病、神经退行性疾病、癌症和慢性炎症等主要副作用^[28]。在输入上,一般分为自由逻辑序列、状态反馈控制(控制取决于状态变量)、输入网络(控制满足某种逻辑规则的逻辑变量)三种情况。近些年,随着研究的深入,也产生了输出反馈控制问题的讨论^[29]。除了布尔网络,反馈控制还在许多系统中发挥着重要作用,比如马尔科夫跳变系统^[30,31]。

为了研究 BCN 在什么条件下是可重构的,结合完美顶点划分的概念,从状态转移图的角度直接判断 BCN 是否是可重构的。首先,给出了外邻域、顶点划分、连通类以及相关的概念介绍。虽然并不是首次提出这些概念,但将他们与 BCN 的可重构性相结合,进一步给出了更加直观、便捷的充分条件和必要条件。外邻域与最终连通类相结合,对 BCN 的可重构的判断大有帮助。其次,提出了一个充分必要条件,只要判断 BCN 对应的最终连通类里面的状态节点是否满足完美划分后的集合要求。这在处理一些较大规模的逻辑控制网络的时候,通过进行维数处理可以显著减少问题的规模。而且,从图形的角度进行节点的划分,有时会比计算矩阵更加简单。最后,通过两个具体的生物实例和具体的例子来说明得到的推导结果。

1 预备知识

为方便下文表述,首先介绍本文所用符号。 $\wedge, \vee, \neg$ 分别表示逻辑运算符与、或和非。取值范围是 $D = \{0, 1\}$ 。 D^n 和 $\mathbf{R}^n$ 分别表示 n 维布尔向量集和 n 维实列向量集。 $R_{m \times n}$ 表示所有 $m \times n$ 维矩阵的集合, $L_{m \times n} = \{L \in R_{m \times n} \mid \text{Col}(L) \subset \Delta_m\}$ 。 $L \in L_{m \times n}$ 表示逻辑矩阵。 $k \times k$ 的单位矩阵记为 I_k 。每个元素都为 1 的 k 维列向量用 $\mathbf{1}_k$ 表示。 $\Phi_n = \text{diag}\{\delta_n^1, \delta_n^2, \dots, \delta_n^n\}$ 表示 $n^2 \times n$ 维的降维矩阵。在 BCN 中,我们使用符号 $\Delta_k = \{\delta_k^i : i = 1, 2, \dots, k\}$ 。特别地, $\Delta_2 = \{\delta_2^1, \delta_2^2\}$ 简记为 Δ 。为了语言表达的简洁,用 $[a, b]$ 来表示 $\{a, a+1, \dots, b\}$, $a, b \in \mathbf{Z}$ 。 $\delta_m[j_1 j_2 \dots j_n] = [\delta_m^{j_1} \delta_m^{j_2} \dots \delta_m^{j_n}]$, 其中 $j_1, j_2, \dots, j_n \in [1, m]$ 。 $\text{Col}_i(I_k)$ 表示 k 维逻辑向量 δ_k^i , $\text{Col}_i(Q)$ 表示矩阵 Q 的第 i 列, $\text{Col}(Q)$ 表示矩阵 Q 的所有列的集合, 矩阵 Q 的转置表示为 Q^T , $|Q|$ 表示集合 Q 的基数。

定义 1^[32] 设 $Q \in R_{m \times n}$, $P \in R_{p \times q}$, 则 STP 运算定义为 $Q \ltimes P = (Q \otimes I_{l/p})(P \otimes I_{l/p})$, 其中 $\ltimes, \otimes$ 分别表示矩阵的半张量积运算符和克罗内克积运算符。 $l = \text{lcm}\{n, p\}$ 表示 n 和 p 的最小公倍数。为了方便起见,通常符号 $\ltimes$ 在不引起歧义的情况下会被省略。

BCN 的状态空间模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)), \end{cases}$$

$t \in \mathbf{Z}^+$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_p]^T$ 分别为在 t 时刻的 n 维状态变量、 m 维输入变量和 p 维输出变量。函数 $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T: D^{n+m} \rightarrow D^n$, 输出函数 $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_p]^T: D^n \rightarrow D^p$ 。使用 STP, 我们可以得到 BCN 的代数表达形式为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{L}\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t), \end{cases}$$

$\mathbf{L} \in L_{2^n \times 2^m}$, $\mathbf{H} \in L_{2^p \times 2^n}$, $\mathbf{x} = \bigotimes_{i=1}^n \mathbf{x}_i$, $\mathbf{u} = \bigotimes_{i=1}^m \mathbf{u}_i$, $\mathbf{y} = \bigotimes_{i=1}^p \mathbf{y}_i$ 。

将矩阵 $\mathbf{L}$ 和对应的有向图 $G(\mathbf{L}) = (V, E)$ 联系起来。 $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 表示顶点的集合, E 表示边的集合。有一条从 l_1 到 l_{r+1} 长度为 r 的路径 $l_1 \rightarrow l_2 \rightarrow \dots \rightarrow l_r \rightarrow l_{r+1}$ 记作 $G(\mathbf{L})$ 中的边 $(l_1, l_2), (l_2, l_3), \dots, (l_r, l_{r+1})$ 。一个环表示一段闭合路径。特别地, 如果环中的所有顶点互不重复, 把这个环叫做基本环。环的长度等于它所包含的顶点个数。如果存在一条从 a 到 b 的路径, a 和 b 称为是连通的, 反之亦然。假设所有的顶点都与自身相连通, 利用顶点连通的思路, 可以将顶点集 V 划分为一些连通类。顶点之间彼此连通的最多的顶点个数所构成的集合称为一个连通类。满足没有任何出边的连通类称为最终连通类^[33]。如果一个有向图有且仅有一个连通类, 它一定是强连通的。

定义 2 在 BCN 中, 任意两个状态 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 是可以区分的, 如果存在控制序列 $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t+1), \dots\}$, 满足两个状态对应的输出序列 $\{\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t+1), \dots\} \neq \{\bar{\mathbf{y}}(t), \bar{\mathbf{y}}(t+1), \dots\}$ 。如果不满足, 两个状态称为不可区分的。

定义 3^[32] BCN 是可重构的当且仅当如果存在一个输入序列 $\{\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(r)\}$, 使得对任意不同的初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 和 $\bar{\mathbf{x}}(0)$, 有 $\mathbf{x}(r) \neq \bar{\mathbf{x}}(r)$, $r \in \mathbf{N}$, 即 $\{\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(r)\} \neq \{\bar{\mathbf{y}}(0), \bar{\mathbf{y}}(1), \dots, \bar{\mathbf{y}}(r)\}$ 。

推论 1 设 $\mathbf{x} \in D^n$ 表示 $n \times 1$ 维向量。自然地, 我们有如下结论 $\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} = \Phi_n \otimes \mathbf{x}$, 基于状态反馈的可重构问题^[33]: 在 BCN 中, 确定一个状态反馈规则为 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, 使得 BN $\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{L}\mathbf{K}\Phi_n \mathbf{x}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t), \end{cases}$ $t \in \mathbf{Z}^+$, 是可重构的。换句话说, 存在 $t^* \in \mathbf{Z}^+$ 满足在已知输出轨迹 $\mathbf{y}(t), t \in [0, t^*]$ 的信息下, 可以唯一确定 $\mathbf{x}(t^*)$ 。

在 BCN 中, 逻辑矩阵可以按照输入变量的个数进行分块, $\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_m]$ 。状态反馈控制序列的作用是通过将每个状态变量 $\mathbf{x} = \delta_n^j$ 与一个特定的输入值 $\mathbf{u} = \delta_m^i$ 相关联, 从而下一个时刻的状态 $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{L}_i \delta_n^j$ 。状态反馈控制器则是可以通过构造矩阵 $\mathbf{K}$ 来确定输入序列, 从而将 BCN 演化成理想的 BN。

2 主要结果

基于图的视角, 给出一些关于可重构判断的充分条件和必要条件。首先, 介绍关于顶点划分和有向图的基本概念。 $G = (V, E)$ 是有顶点集 V 和有向边集 E 的一个有向图。非负矩阵 $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ 被称为邻接矩阵。从 i 到 j 的有向边 $(i, j) \in E$ 当且仅当 $q_{ji} > 0$, j 叫做 i 的外邻域点。设 P_n 表示顶点集 V 的一些子集, 如果 $\bigcup_{n=1}^s P_n = V$ 且 $P_n, n \in [1, s]$ 是两两不交的子集, 则 $\{P_n\}_{n=1}^s$ 是有向图 G 的一种顶点划分。 $N(*)$ 表示某个顶点的外邻域集。如果对任意的 n 都存在 $\bar{n}$, 使得 $N(P_n) \subset P_{\bar{n}}$, 则 $\{P_n\}_{n=1}^s$ 称为完美顶点划分 (Perfect Vertex Partition, PVP)。为每个顶点按照一定的规则分配颜色, 我们就得到了一个顶点有色有向图。如果在同一个 P_n 中的所有顶点均为同一种颜色, 则 $\{P_n\}_{n=1}^s$ 称为同色顶点划分 (Concolorous Vertex Partition, CVP)。如果既是完美顶点划分, 又是同色顶点划分, 则 $\{P_n\}_{n=1}^s$ 称为同色-完美顶点划分 (Concolorous and Perfect Vertex Partition, CPVP)。如果满足 $|P_n| = 1, n \in [1, s]$, 则 $\{P_n\}_{n=1}^s$ 称为单点划分。

注 1 对于 PVP 有一种直观的理解。有向图的顶点划分为 $\{P_n\}_{n=1}^s$ 。在相同子集 P_n 中的所有顶点只能在下一个时刻进入到另一个相同的子集 $P_{\bar{n}}$ 中。通过图像来更形象的理解完美顶点划分的定义 (图 1)。

对于 BCN, $\mathbf{B} = (b_{ij}) = \sum_{i=1}^{2^m} \mathbf{L}_i$, $\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \dots \mathbf{L}_{2^m}]$, $\mathbf{L}_i \in L_{2^n \times 2^n}$ 。 $\mathbf{B}$ 表示有向图 G 的加权邻接矩阵, 同

时也是非负方阵。接下来,给出 BCN 的诱导有向图和状态转移图。 $b_{ij} > 0$ 当且仅当存在 $k \in [1, 2^m]$ 使得 $\delta_{2^n}^i = L \delta_{2^m}^k \delta_{2^n}^j$ 。在这种情况下,诱导有向图 G 被称为状态转移图(State Transition Graph, STG)。按照相同输出的顶点分配同种颜色的规则,即顶点 a 和 b 的颜色相同当且仅当 $H \delta_{2^n}^a = H \delta_{2^n}^b$,为 STG 中的每个顶点选择一种颜色。为了方便后续使用,我们将带颜色的顶点 STG 图用 $G_i, i \in [1, 2^m], G = \bigcup_{i=1}^{2^m} G_i$ 表示。

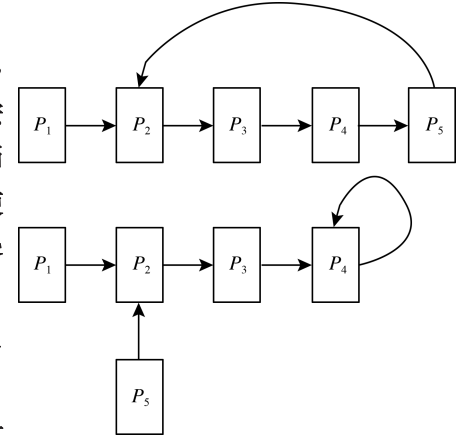


图1 两种完美顶点划分的类型

定义4 BCN 中,基于不可区分的关系对顶点集 $V = \{1, 2, \dots, 2^n\}$ 进行划分,得到顶点划分集 $P = \{P_n\}_{n=1}^s$ 。

定义5^[34] 假设 A 和 B 是同一个顶点集 V 的两个划分。如果对任意 $A_i \in A$,都存在 $B_i \in B$,满足 $A_i \subset B_i$,则划分 A 比划分 B 更精细,也可说划分 B 比划分 A 更粗糙。

推论2 BCN 中,顶点划分 $P = \{P_n\}_{n=1}^s$ 是关于 $G_1, \dots, G_{2^m}$ 的共同的 CPVP。

证明 首先,证明 P 是 CVP。对任意的 $P_n, n = [1, s]$,因为在 P_n 中的所有顶点都是不可区分的。根据前文对分配颜色规则的描述可知,在同一个 P_n 中的所有顶点是相同的颜色,即 P 是一个 CVP。接下来,证明 P 是 PVP。

假设存在一个子有向图 G_i 使得 P 不是 PVP。因此,一定存在 $n, n_1, n_2 (n_1 \neq n_2)$ 满足 $N_i(P_n) \cap P_{n_1} \neq \emptyset, N_i(P_n) \cap P_{n_2} \neq \emptyset$ 。即存在 $a, b \in P_n, \bar{a} = N_i(a), \bar{b} = N_i(b)$,使得 $\bar{a} \in N_i(P_n) \cap P_{n_1}, \bar{b} \in N_i(P_n) \cap P_{n_2}$ 。因为 $n_1 \neq n_2$,两个不同的子集对应着不同的输出,所以 $\bar{a} \in P_{n_1}, \bar{b} \in P_{n_2}$ 是可以区分的。因此, $a, b \in P_n$ 也是可以区分的。这与 $a, b \in P_n$ 是不可区分的相矛盾。因此, $P = \{P_n\}_{n=1}^s$ 是关于 $G_1, \dots, G_{2^m}$ 的共同的 CPVP。

推论3 BCN 中,顶点划分 $P = \{P_n\}_{n=1}^s$ 。如果顶点划分 $R = \{R_m\}_{m=1}^a$ 也是关于 $G_1, \dots, G_{2^m}$ 的共同的 CPVP,则 P 比 R 更粗糙。

证明 因为 $R = \{R_m\}_{m=1}^a$ 是关于 $G_1, \dots, G_{2^m}$ 的共同的 PVP,所以对任意 $m_0 \in [1, a]$,任意 $i_s \in [1, 2^m], s = 0, 1, \dots$,都存在 $m_1, m_2, \dots, m_t, \dots$ 使得 $N_{i_0}(R_{m_0}) \subset R_{m_0 i_0} := R_{m_1}, N_{i_1}(R_{m_1}) \subset R_{m_1 i_1} := R_{m_2}, N_{i_2}(R_{m_2}) \subset R_{m_2 i_2} := R_{m_3}, \dots, N_{i_{t-1}}(R_{m_{t-1}}) \subset R_{m_{t-1} i_{t-1}} := R_{m_t}, \dots$,因为 $R = \{R_m\}_{m=1}^a$ 是关于 $G_1, \dots, G_{2^m}$ 的共同的 CVP,所以在每个 R_{m_k} 中的所有顶点具有相同的输出,即每个给定的 R_{m_k} ,都存在 c_{m_k} ,使得 $H \delta_{2^n}^j = \delta_{2^n}^{c_{m_k}}, j \in R_{m_k}$ 。进而对任意 $b_0 \in R_{m_0}$,不妨设 $x(0) = \delta_{2^n}^{b_0}$,任意给定的输入序列 $\{u_0, u_1, \dots\}, u(t) = \delta_{2^n}^{i_t}$,初始状态经过 t 时刻后到达 $x(t) = \delta_{2^n}^{b_t}, t \geq 0$ 。根据外邻域的包含关系可知, $b_t \in R_{m_t}$ 和 $H \delta_{2^n}^{b_t} = \delta_{2^n}^{c_{m_t}}$ 。这意味着任意 $p, q \in R_{m_0}, p, q$ 都是不可区分的。因此,存在 β_{m_0} 使得 $p, q \in P_{\beta_{m_0}}$,即,划分 P 比划分 R 更粗糙。

通过推论2和推论3,可以得出如下结论。在 BCN 中,基于不可区分的关系对顶点集 $V = \{1, 2, \dots, 2^n\}$ 进行划分,得到顶点划分集 $P = \{P_n\}_{n=1}^s$ 是关于 $G_1, \dots, G_{2^m}$ 的最粗糙的共同的 CPVP。通过定义3,我们可以获得如下定理。

定理1 BCN 是可重构的,如果满足关于 $G_1, \dots, G_{2^m}$ 的最粗糙的共同的 CPVP 是单点划分。

证明 证明 BCN 是可重构的就是证明每个初始状态所到达的最终状态可以被唯一确定。对于任意 G_i ,任意 $x(0)$,都存在 $P_n \subset P$ 使得 $x(0)$ 所对应的最终状态 $x(T) \in P_n$ 。因为 $P = \{P_n\}_{n=1}^s$ 共同的 CPVP 是单点划分,即, $|P_n| = 1, n \in [1, s]$ 且 P 是同色的,这表明每个顶点都对应着互不相同的输出。所以,存在输入序列使得最终状态是可以区分的,BCN 是可重构的。

不难发现定理1的条件非常强,它要求每个 $P_n, n \in [1, s]$ 只有一个顶点。分析可重构的定义可以发现,只要关心在同一个输入序列下最终状态是否可以区分就可以了。故如果把有向图分割成一些互不连通的连通类,基于状态反馈可重构的问题就被转换成仅需考虑属于最终类的状态集,基于此进一步推导出以下

定理。

定理 2 BCN 是可重构的,当且仅当属于最终连通类里的状态集关于 $G_1, \dots, G_{2^m}$ 最粗糙的共同的 CPVP, $P_n \subset P = \{P_n\}_{n=1}^s$, 是单点划分。

证明 (必要性)BCN 是可重构的,即已知输出序列的信息下,最终状态可以被唯一确定。所以在最终连通类里的顶点不可能对应相同的输出序列。根据以上分析, $P_n \subset P = \{P_n\}_{n=1}^s$ 是单点划分。

(充分性)假设存在 $G_i, i \in [1, 2^m]$ 使得最终状态不是唯一确定的,那么至少存在两个环或者自环对应着相同的输出序列。如果存在两个环对应着相同的输出序列。不失一般性,假设两个环的长度均为 2,那么存在 $\delta_{2^n}^{a_1}, \delta_{2^n}^{a_2} \in P_{n_1}, \delta_{2^n}^{b_1}, \delta_{2^n}^{b_2} \in P_{n_2}, H \delta_{2^n}^{a_1} = H \delta_{2^n}^{b_1} = \delta_{2^p}^a, H \delta_{2^n}^{a_2} = H \delta_{2^n}^{b_2} = \delta_{2^p}^b, n_1, n_2 \in [1, s]$, 它们对应的输出序列是 $\{\delta_{2^p}^a, \delta_{2^p}^b, \dots\}$ 。

易见,它们对应的最粗糙的划分应该是 $\{\delta_{2^n}^{a_1}, \delta_{2^n}^{a_2}\} \subseteq \{\delta_{2^n}^{b_1}, \delta_{2^n}^{b_2}\}$, 这与 $|P_n| = 1$ 相矛盾。如果存在两个自环对应着相同的输出序列,不失一般性,假设 $\delta_{2^n}^a, \delta_{2^n}^b$ 满足 $\delta_{2^n}^a = L \delta_{2^m}^i \delta_{2^n}^a, \delta_{2^n}^b = L \delta_{2^m}^i \delta_{2^n}^b, H \delta_{2^n}^a = H \delta_{2^n}^b$ 。则存在 $n \in [1, s]$ 使得 $\delta_{2^n}^a, \delta_{2^n}^b \in P_n$ 。这与 $|P_n| = 1$ 相矛盾。综上所述,BCN 是可重构的。

推论 4 在 BCN 中,它是基于状态反馈下的可重构当且仅当至少存在一个子图所对应的完美顶点划分是满足定理 2 的。

注 2 上述推论是显然的。BCN 通过输入序列转变成 BN,本质上是每个顶点筛选路径的过程。如果至少存在一个子图满足条件,就一定存在基于状态反馈 $u(t) = Kx(t)$,使得 BCN 演化成满足条件的子图,进而是可重构的。注意到,自由控制序列没有办法进行人为干涉,而状态反馈控制可以人为设计,只需设计反馈矩阵 K 。

BCN 是不可重构的,但它是基于状态反馈可重构的。即 $G = \bigcup_{i=1}^{2^m} G_i$ 是不可重构的,但在 $G_1, \dots, G_{2^m}$ 中,存在 $G_{i_1}, \dots, G_{i_n}, 1 \leq |\{G_{i_1}, \dots, G_{i_n}\}| < 2^m$, 是可重构的。状态反馈控制中反馈矩阵 K 可以通过以下步骤设计。

(1) 因为 $G = \bigcup_{i=1}^{2^m} G_i$ 是不可重构的,所以属于最终连通类里的状态集对应的最粗糙的共同的 CPVP 中一定存在 $P_M = \{\delta_{2^n}^{j_1}, \dots, \delta_{2^n}^{j_k}\}, |P_M| > 1$ 。

(2) 从左到右依次判断 P_M 中的状态。不失一般性,选出 $\delta_{2^n}^{j_1}$, 要满足 $\exists p, q, L \delta_{2^m}^p \delta_{2^n}^{j_1} \neq L \delta_{2^m}^q \delta_{2^n}^{j_1}, p \in \{i_1, \dots, i_n\}, q \in \{1, \dots, i_1 - 1, i_n + 1, \dots, 2^m\}$ 。从而反馈矩阵 K 的第 j_1 列更新为 $K = [* , \dots, \delta_{2^m}^p, \dots, *]$ 。

(3) 经过步骤(2), $\delta_{2^n}^{j_1}$ 只有两种情况。第一,属于 G_p 中最终连通类里对应的最粗糙的 CPVP 中的状态。此时,因为 G_p 是可重构的,所以 $\delta_{2^n}^{j_1}$ 一定满足单点划分,故 $P_M \rightarrow \{\{\delta_{2^n}^{j_1}\}, \{\delta_{2^n}^{j_2}, \dots, \delta_{2^n}^{j_k}\}\}$ 。第二,不属于 G_p 中最终连通类里对应的最粗糙的 CPVP 中的状态。此时,该状态不影响判断是否可重构,故 $P_M \rightarrow \{\delta_{2^n}^{j_2}, \dots, \delta_{2^n}^{j_k}\}$ 。

(4) $|\{\delta_{2^n}^{j_2}, \dots, \delta_{2^n}^{j_k}\}| > 1$, 回到步骤(2)。 $|\{\delta_{2^n}^{j_2}, \dots, \delta_{2^n}^{j_k}\}| = 1$, 得到最终的反馈矩阵 K 。

注 3 步骤(3)中 P_M 的更新可能会更快,因为状态之间往往互相影响,从而迅速减少 P_M 中状态个数。 $|\{\delta_{2^n}^{j_2}, \dots, \delta_{2^n}^{j_k}\}| > 1$ 且对 $\forall p, q, L \delta_{2^m}^p \delta_{2^n}^{j_1} = L \delta_{2^m}^q \delta_{2^n}^{j_1}$ 的情况不会发生。因为 $G_{i_1}, \dots, G_{i_n}$ 中至少存在一个是可重构的,而 G_q 均不可重构。

现在,通过两个实例来阐明获得的结果。

例 1^[35] 一个简单的细胞凋亡布尔模型如下所示 $x_1(t+1) = \neg x_2(t) \wedge u(t), x_2(t+1) = \neg x_1(t) \wedge x_3(t), x_3(t+1) = x_2(t) \vee u(t), x_1, x_2, x_3, u \in D$ 分别代表抑制剂凋亡蛋白(IAP),活性 caspase-3(C3a),活性 caspase-8(C8a)和肿瘤坏死因子(TNF)。它的输出方程为 $y(t) = [\neg x_2(t) \wedge x_1(t)] \vee [\neg x_1(t) \wedge (x_2(t) \leftrightarrow x_3(t))], y \in D$ 。通过 STP,将逻辑表达形式转换成 BCN 的代数表达形式。 $L = \delta_8[7733571377885768], H = \delta_2[22111221], x \in \Delta_8, u \in \Delta_2, y \in \Delta_2, L = [L_1 L_2]$ 。

通过绘制对应的 STG 图来表示完美顶点划分,相同输出的状态节点颜色相同(如图 2)。关于 G_1, G_2 中最终连通类的最粗糙的共同的 CPVP 是 $P_1 = \{1, 6, 7\}, P_2 = \{3, 5, 8\}$ 。显然,属于最终连通类里的状态集不是单点划分。所以,BCN 是不可重构的。注意到对应于两个子图的属于最终连通类的最粗糙的 CPVP 分别是 $P_1 = \{3, 5\}, P_2 = \{1, 7\}$ 和 $P_1 = \{5, 8\}, P_2 = \{6, 7\}$ 。都不满足单点划分,即不满足推论 4。所以 BCN 基于状态反馈下也是不可重构的。

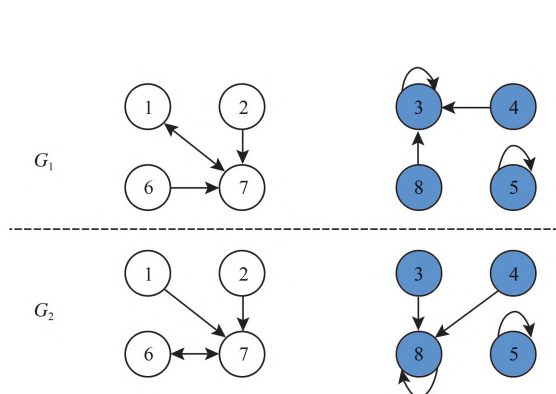


图2 有色顶点状态转移图

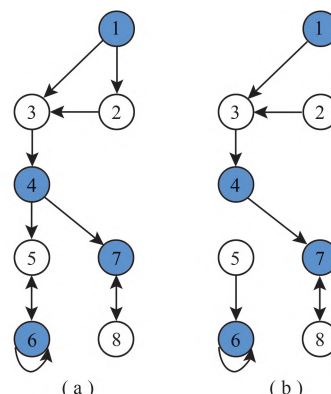


图3 有色顶点状态转移图

例 2 考虑一个有 8 个状态的 BCN。 $L = \delta_8[3345658723476687]$, $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

类似地,画出对应的 STG 图[图 3(a)],相同输出的状态节点拥有相同的颜色。其中,属于最终连通类的状态节点集 $\{5, 6, 7, 8\}$,对应的最粗糙的共同的 CPVP 是 $P_1 = \{5, 8\}, P_2 = \{6, 7\}$,不满足单点划分,所以 BCN 是不可重构的。不过,BCN 是基于状态反馈下可重构的。因为存在一个子图[图 3(b)]可重构,它对应的 CPVP 是 $P_1 = \{6\}, P_2 = \{7\}, P_3 = \{8\}$ 符合单点划分的要求,即满足定理 2。按照反馈矩阵 K 的设计步骤, $P_2 = \{6, 7\}$ 中 δ_6^6 满足, $\exists p = \delta_2^2, q = \delta_2^1, L \delta_2^2 \delta_6^6 \neq L \delta_2^1 \delta_6^6$ 。所以,反馈矩阵 K 的第六列更新为 δ_2^2 。此时, $P_2 \rightarrow \{\{6\}, \{7\}\}$, 状态 δ_8^5 不属于最终连通类里的状态集,故 $P_1 \rightarrow \{8\}$, 均满足单点划分,步骤终止。

$$K = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & 0 & * & * \\ * & * & * & * & * & 1 & * & * \end{bmatrix}。$$

3 结论

本文主要研究了 BCN 的可重构问题。首先,给出了外邻域和完美顶点划分的概念,为判断 BCN 的重构提供了强有力的条件。其次,结合最终连通类的思想来判断最粗糙的完美顶点划分是否为单点划分。它比原来的 BCN 考虑的节点数更少。基于此,对 BCN 的重构问题提出了一些充分条件和必要条件。基于状态反馈下的 BCN 可重构问题实际上是对每个节点进行边的筛选过程。因此,判断是否至少有一个 BN 满足可重构定义,就可以得出 BCN 是基于状态反馈下可重构的。在未来的研究工作中,我们将继续研究与实际重构相关的问题,如故障诊断等;并尝试从图形的视角来思考问题。更进一步,基于现有的工作,考虑概率布尔网络等不同系统下的可重构问题以及推导不同的可重构定义下的必要条件和充分条件。

参 考 文 献

- [1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. Journal of Theoretical Biology, 1969, 22 (3): 437-467.
- [2] CHENG D. Input-state approach to Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2009, 20(3): 512-521.
- [3] CHENG D, QI H, ZHAO Y. Synthesis of Boolean networks via semi-tensor product[C]. // China: Proceedings of the 30th Chinese Control Conference, 2011.
- [4] CHENG D, QI H. State-space analysis of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2010, 21(4): 584-594.
- [5] CHENG D. Disturbance decoupling of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 56(1): 2-10.
- [6] WU J, LIU Y, RUAN Q, et al. Robust stability of switched Boolean networks with function perturbation[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2022, 46: 101216.
- [7] LI H, YANG X, WANG S. Robustness for stability and stabilization of Boolean networks with stochastic function perturbations[J].

- IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 66(3): 1231-1237.
- [8] ZHONG J, PAN Q, XU W, et al. Asymptotical stabilization for probabilistic Boolean control networks under operators and inputs constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, DOI: 10.1109/TAC.2022.3203019.
- [9] LIU Z, ZHONG J, LIU Y, et al. Weak stabilization of Boolean networks under state-flipped control[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2023, 34(5): 2693-2700.
- [10] PAN Q, ZHONG J, TONG S, et al. Structural controllability of Boolean control networks under partial information[J]. Complexity, 2021: 9442358.
- [11] LI H, WANG S, LI X, et al. Perturbation analysis for controllability of logical control networks[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2020, 58(6): 3632-3657.
- [12] ZHONG J, PAN Q, LI B, et al. Minimal pinning control for oscillatority of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3134960.
- [13] WANG Y, YANG Y, LIU Y, et al. Fault detection and pinning control of Boolean networks[J]. Applied Mathematics and Computation, 2022, 429: 127232.
- [14] ZHU Q, LIU Y, LU J, et al. On the optimal control of Boolean control networks[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2018, 56(2): 1321-1341.
- [15] PAN Q, ZHONG J, LIN L, et al. Finite-time observability of probabilistic Boolean control networks[J]. Asian Journal of Control, 2022, 25(1): 325-334.
- [16] ZHANG K, ZHANG L, SU R. A weighted pair graph representation for reconstructibility of Boolean control networks[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2016, 54(6): 3040-3060.
- [17] SARDA K, YERUDKAR A, VECCHIO C D. Disturbance decoupling control design for Boolean control networks; a Boolean algebra approach[J]. IET Control Theory & Applications, 2020, 14(16): 2339-2347.
- [18] CHENG D. Disturbance decoupling of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 56(1): 2-10.
- [19] FENG J, LI Y, FU S, et al. New method for disturbance decoupling of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, DOI: 10.1109/TAC.2022.3161609.
- [20] FORNASINI E, VALCHER M E. Fault detection analysis of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10): 2734-2739.
- [21] ZHANG Z. Observer Design for Control and Fault Diagnosis of Boolean Networks[M]. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2021, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-658-35929-4>.
- [22] CHEN Q, LI H. Robust Weak detectability analysis of Boolean networks subject to function perturbation[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2022, 69(12): 5004-5008.
- [23] FORNASINI E, VALCHER M E. Observability, reconstructibility and state observers of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 58(6): 1390-1401.
- [24] ZHANG K, ZHANG L. Observability of Boolean control networks; A unified approach based on finite automata[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 61(9): 2733-2738.
- [25] XIANGRU X, YIGUANG H. Observability analysis and observer design for finite automata via matrix approach[J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(12): 1609-1615.
- [26] FORNASINI E, VALCHER M E. Fault detection analysis of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10): 2734-2739.
- [27] ZHAO R, WANG B, HAN L, et al. New results on model reconstruction of Boolean networks with application to gene regulatory networks[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2022, 46(4): 3741-3757.
- [28] SRIDHARAN S, LAYEK R, DATTA A, et al. Boolean modeling and fault diagnosis in oxidative stress response[J]. BMC Genomics, 2012, 13(6): 1-16.
- [29] JIA Y, WANG B, FENG J E, et al. Set stabilization of Boolean control networks via output-feedback controllers[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(12): 7527-7536.
- [30] 庄光明, 张化生, 赵军圣, 等. 中立随机马尔科夫跳变系统延迟反馈控制器设计[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2018, 04: 65-71.
- [31] 林玉倩, 尹月霞, 孙梦, 等. 时变时滞随机马尔科夫跳变系统非脆弱 H_∞ 动态输出反馈控制器设计[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2021, 03: 1-11.
- [32] ZHANG K, ZHANG L, SU R. A weighted pair graph representation for reconstructibility of Boolean control networks[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2016, 54(6): 3040-3060.
- [33] FORNASINI E, VALCHER M E. Reconstructing the state of a Boolean control network via state feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, DOI: 10.1109/TAC.2022.3218617.
- [34] POTUCEK R. Construction of the smallest common coarser of two and three set partitions[J]. Analele Stiintifice Ale Universității Ovidius Constanța Seria Matematică, 2014, 22(1): 237-246.
- [35] CHAVES M. Methods for qualitative analysis of genetic networks[C]. //European, ECC, 2009.

(责任编辑:刘庆松)