

文章编号 1672-6634(2023)04-0001-13

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2022120002

随机状态触发脉冲布尔控制网络的渐近反馈能控性

卢剑权, 汪洋, 丁雪莹

(东南大学 数学学院, 江苏 南京 210096)

摘要 基于矩阵半张量积方法, 利用混杂指标模型, 研究了随机状态触发脉冲布尔控制网络的渐近反馈能控性。首先针对这类网络提出了四种能控性定义, 为避免 Zeno 现象, 又给出了前向完备性的概念, 并进一步推导了网络前向完备的充要条件。基于最大不变子集的性质, 推导了随机状态触发脉冲布尔控制网络两个状态之间渐近反馈可达性的充要条件。通过引入可达性矩阵, 进一步得到了网络特定状态渐近反馈可达性以及网络渐近反馈能控性的充要条件。最后, 结合例子讨论了渐近反馈能控性与其它能控性之间的关系。

关键词 布尔控制网络; 混杂指标模型; 随机脉冲; 矩阵半张量积; 状态反馈控制; 渐近能控性

中图分类号 O233

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Asymptotical Feedback Controllability of Boolean Networks with State-dependent Random Impulses

LU Jianquan, WANG Yang, DING Xueying

(School of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract Based on the semi-tensor product of matrices, the asymptotical feedback controllability(AFC) of state triggered random impulsive Boolean control networks(SRIBCNs) is studied by utilizing a hybrid index model. Firstly, four kinds of definitions of controllability are proposed for SRIBCNs. In order to avoid Zeno phenomenon, we give the concept of forward completeness and further derive a necessary and sufficient condition for the forward completeness of SRIBCNs. Based on the properties of the largest control invariant subset, a necessary and sufficient condition for the asymptotical feedback reachability(AFR) between two states of SRIBCN is derived. By introducing the reachability matrix, the necessary and sufficient conditions for the AFR of the specific state and the AFC of SRIBCN are obtained. Finally, the relationship between AFC and other controllability is discussed with examples.

Key words Boolean control networks; hybrid index model; random impulses; semi-tensor product of matrices; state feedback control; asymptotical controllability

收稿日期: 2022-12-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(61973078)资助

通讯作者: 卢剑权, 男, 汉族, 博士, 教授, 研究方向: 复杂网络、多智能体系统、逻辑网络与混杂系统, E-mail: jqluma@seu.edu.cn。

1 引言

1969年,Stuart Kauffman首次提出了布尔网络这一概念,最初的目的是为了模拟基因调控网络^[1]。由于它的简洁性和实用性,迅速吸引了一大批学者的注意,很大程度上促进了基因调控网络的建模与分析。在这类网络中,每个基因的状态都被量化为了逻辑值(0和1),其中0代表基因未表达,1代表基因表达。由于基因与基因之间存在相互作用,基因的状态也会在每个离散时刻进行更新。值得一提的是,网络中单个节点的更新过程是由相应的逻辑函数所调控,并且这个逻辑函数只与该节点相邻的入度节点状态有关。在矩阵半张量积这一概念提出之前,人们缺乏有效的数学工具来对布尔网络进行建模分析,大多数的研究都还是针对具有单一性质的网络而言,并没有形成完整的理论框架。最早是在研究控制系统的Morgan问题时,程代展研究员及其团队首次提出了矩阵半张量积的概念^[2],它作为传统矩阵乘积的推广,保留了传统矩阵乘积的相关性质,渐渐地得到了人们的广泛应用。布尔网络便是其中一个重要的应用领域,在所提出的代数状态空间表示法的框架下,布尔(控制)网络可以等价地用离散时间(多)线性系统来表示。因此,一些经典的控制理论研究方法才成功在布尔网络研究领域中得到运用。在过去的十年里,矩阵半张量积方法的提出,使得关于逻辑动力系统的研究方向也不断得到丰富,其中包括能观测性^[3]、稳定性和镇定^[4-6]、集合镇定^[7,8]、干扰解耦^[9]、同步^[10]以及输出跟踪^[11]等。

能控性是现代控制理论中的一个基础且重要的概念,它刻画了外部控制输入影响系统自身状态的能力,因此它在布尔网络研究与分析中担任着不可或缺的角色。目前,关于布尔网络能控性问题的研究已经有了许多的研究成果^[12-15]。文献[12]首次在矩阵半张量积的框架下,对布尔控制网络的能控性与能观测性问题进行了探究。赵寅等人在文献[13]中提出了输入状态关联矩阵的概念,并利用它得到了布尔控制网络能控的一个容易验证的充要条件,这也一定程度上推动了后续关于布尔控制网络能控性的研究。另外利用牵制控制器,布尔控制网络的可达性与能控性问题在文献[15]中得到了很好地解决。

在现实世界中,外界环境的突然变化可能导致生物网络中的节点状态在进化过程中发生突变。例如,基因调控网络的细胞分裂过程包括 G_1 、S、 G_2 、M四个时期,除了S期,DNA数量在细胞生长过程中是恒定的。在S期中,DNA数量会增加一倍,但在每个子细胞分裂后,DNA数量立即减半。文献[16]中将这种DNA数量的突变建模为一个脉冲。作为布尔网络的热门研究领域,脉冲布尔网络的研究与分析也取得了长足的进步。例如李芳菲等人针对脉冲布尔网络的稳定性和镇定问题进行了研究^[17],同时又在文献[18]中分析了其能观测性;在主从网络的框架下,文献[19]对耦合脉冲布尔网络的同步问题进行了研究;陈浩等人针对有状态约束的脉冲布尔网络也进行了研究,其中就包括了镇定、能控性以及最优控制等问题^[20];相类似地,刘洋等人也在禁止状态存在的情况下,研究了脉冲布尔网络的能控性问题^[21]。然而,这些研究大多是与时间触发脉冲系统有关。在现实问题中,许多系统的脉冲不是在固定时间发生的,如人口控制系统、储蓄率控制系统、一些细胞神经网络等。这些类型的系统在特定的状态或事件下,才会发生状态的突变。针对这类状态/事件触发脉冲下布尔网络的研究目前处于尝试阶段。文献[22]研究了具有状态触发脉冲的布尔网络在有限时间内的稳定性。随后,沈雅雯等人在文献[23]中研究了具有随机状态触发脉冲的布尔网络的稳定性。与以往研究中所使用的模型不同,他们都使用了脉冲布尔网络的混杂指标模型^[22],该模型能够很好的刻画复杂的脉冲行为和理想脉冲的瞬时性。

正如前面提到的,能控性作为刻画外部控制输入影响系统自身状态能力的一个重要性质,其在脉冲影响下布尔网络的研究与分析中起到重要作用。遗憾的是,关于随机状态触发脉冲布尔控制网络的能控性问题还尚未得到解决。特别地,从转移概率矩阵的角度来看,随机状态触发脉冲布尔控制网络还可以被视为一种特殊的概率布尔控制网络。两者能控性的最本质区别在于,随机状态触发脉冲布尔控制网络的能控性要求系统本身是前向完备的。

状态反馈控制作为一种简单有效的控制策略,近年来在概率布尔控制网络镇定的相关研究中得到了广泛应用。按照文献[24]中采用的思路,李睿等人在文献[25]中利用状态反馈控制研究了概率布尔控制网络的镇定问题,之后又将研究扩展到了概率布尔控制网络的集合镇定问题^[26]。文献[27]基于马尔科夫链理论,讨论得出了概率布尔控制网络实现渐近反馈集合镇定的一个充要条件。

基于上述讨论,本文致力于利用状态反馈控制来解决随机状态触发脉冲布尔控制网络的渐近反馈能控

性问题,主要贡献如:(1) 针对随机状态触发脉冲布尔控制网络,引入前向完备性的概念,并给出验证网络前向完备性的判据。(2) 通过引入可达性矩阵,得到网络渐近反馈能控性的充要条件。(3) 讨论渐近反馈能控性与其它能控性之间的关系。

2 预备知识

如无特殊说明,本文出现的符号注记如下。

N : 自然数集; N^+ : 正整数集; $D := \{1, 0\}$; $D^n := \underbrace{D \times \cdots \times D}_n$; δ_n^i : n 阶单位矩阵 I_n 的第 i 列; $\text{Col}(A)$ 和 $\text{Row}(A)$ 分别表示矩阵 A 所有列的集合以及所有行的集合; $\text{Col}_i(A)$ 和 $\text{Row}_i(A)$ 分别表示矩阵 A 的第 i 列以及第 i 行; $\Delta_n := \{\delta_n^i \mid i=1, 2, \dots, n\}$; $[A]_{i,j}$: 矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素; $A > 0$: 矩阵(向量) A 的所有元素均大于 0; $R_{r \times s}$: $r \times s$ 阶实矩阵集合; $L_{r \times s}$: $r \times s$ 阶逻辑矩阵集合; $\delta_r[k_1 k_2 \cdots k_s] := [\delta_r^{k_1} \delta_r^{k_2} \cdots \delta_r^{k_s}]$; $[N : M]$: 集合 $\{m \in N \mid N \leq m \leq M\}$; M^c : 集合 M 的补集; $|M|$: 集合 M 的基数; $\delta_n^{i-} := \Delta_n \setminus \{\delta_n^i\}$ 。下面将简要地介绍矩阵半张量积的定义以及部分重要的性质。

定义 1^[28,29] 给定矩阵 $A \in R_{r \times s}$, $B \in R_{m \times n}$, 它们的半张量积定义为 $A \ltimes B = (A \otimes I_{w/s})(B \otimes I_{w/m})$, 式中 $\otimes$ 表示矩阵的 Kronecker 积, 而 w 是 s 和 m 的最小公倍数。

注 1 特别地, 当 $s=m$ 时, 有 $A \ltimes B = AB$, 即普通矩阵乘法可以看作是矩阵半张量积的一种特殊情形。在后续的章节中, 如无特殊的说明, 符号 $\ltimes$ 将会被省略。

定义 2^[30] 给定矩阵 $A \in R_{r \times s}$, $B \in R_{m \times n}$, 它们的 Khatri-Rao 积定义为

$$A * B = [\text{Col}_1(A) \ltimes \text{Col}_1(B) \cdots \text{Col}_s(A) \ltimes \text{Col}_s(B)]。$$

对于任何逻辑变量 $X \in D$, 可以将双射 $\varphi: D \rightarrow \Delta_2$ 定义为 $x = \varphi(X) = \delta_2^{2-X}$, 其中 $x \in \Delta_2$ 是 X 的矢量形式。此外, 对于一个 n 维逻辑向量 $X = [X_1 X_2 \cdots X_n]^T \in D^n$, 它相应的矢量形式可以定义为 $x := \ltimes_{i=1}^n x_i = x_1 \ltimes x_2 \ltimes \cdots \ltimes x_n$, 式中 $x_i = \varphi(X_i) \in \Delta_2, i=1, 2, \dots, n$ 。

引理 1^[29] 分别用 $W_{[m,n]}$, Φ_n 表示换位矩阵和降阶矩阵, 可以得到

(1) 对于任意矩阵 $X \in R_{r \times 1}, Y \in R_{m \times n}$, 都有等式 $X \ltimes Y = (I_r \otimes Y) \ltimes X$ 成立,

(2) 对于任意矩阵 $X \in R_{m \times 1}, Y \in R_{n \times 1}$, 都有等式 $W_{[m,n]}XY = YX$ 成立,

(3) 对于任意列向量 $X \in \Delta_{2^n}$, 都有等式 $X \ltimes X = \Phi_n X$ 成立,

式中 $W_{[m,n]} = [I_n \otimes \delta_m^1, I_n \otimes \delta_m^2, \dots, I_n \otimes \delta_m^m] \in L_{mn \times mn}$, $\Phi_n = \text{diag}\{\delta_{2^n}^1, \delta_{2^n}^2, \dots, \delta_{2^n}^{2^n}\}$ 。

引理 2^[29] 令 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Delta_2$, $\psi: (\Delta_2)^n \rightarrow \Delta_2$ 为一个 n 值逻辑函数, 则存在唯一的逻辑矩 $M_\psi \in L_{2 \times 2^n}$, 使得 ψ 的矢量表达式为 $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = M_\psi \ltimes_{i=1}^n x_i(t)$, 式中 M_ψ 称为 ψ 的结构矩阵, 由 ψ 唯一确定。

3 问题描述

3.1 混杂指标模型

状态的触发可以看作是瞬时状态跳跃的理想脉冲扰动, 在宏观时间尺度上, 这个瞬时状态跳跃可以假定在零时间内发生。混杂指标模型就是从数学上描述跳跃的瞬时性, 它将系统状态 $x(t)$ 用 $x(t, j)$ 重新表示, 其中指数 t 和 j 分别表示时间步长和脉冲数, 系统在非脉冲时刻向前移动到下一个时刻 $t+1$, 一个步进过程脉冲数 j 保持不变; 系统在脉冲时刻向前跳跃, 在跳跃过程中, 时刻 t 保持不变, 一个跳变过程使脉冲数变为 $j+1$, 这就表示着脉冲在零时间内发生。混杂指标模型能够很好地刻画复杂的脉冲行为以及理想脉冲的瞬时性。

首先, 考虑一个具有 n 个节点的布尔控制网络: $X(t+1) = f(X(t), U(t))$, $t=0, 1, \dots$, 式中 $X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]^T \in D^n$, $U(t) = [U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)]^T \in D^m$ 分别表示网络在 t 时刻的状态和控制输入, $f: D^{n+m} \rightarrow D^n$ 是一逻辑映射。

假设 X_i 和 U_i 的矢量形式分别为 $x_i := \varphi(X_i) \in \Delta_2$ 和 $u_i := \varphi(U_i) \in \Delta_2$ 。基于引理 2, 上述布尔控制

网络可以改写成如下代数形式

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{L}\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t), \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x}(t) := \bigvee_{i=1}^n \mathbf{x}_i(t) \in \Delta_{2^n}$, $\mathbf{u}(t) := \bigvee_{i=1}^m \mathbf{u}_i(t) \in \Delta_{2^m}$, $\mathbf{L} \in L_{2^n \times 2^{n+m}}$ 。此外,在下文中称(1)式描述的过程为“步进过程”。

本文将研究具有随机状态触发脉冲的布尔控制网络。当系统中存在脉冲扰动时,它的状态会发生瞬间跳变,而这种“跳变过程”可以描述为

$$\mathbf{x}^+(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

式中 $\mathbf{x}^+(t)$ 表示跳变后的状态,并且满足 $\mathbf{G} \in L_{2^n \times 2^n}$ 。另一方面,当系统没有受到脉冲的影响时,它的状态将会根据(1)式进行更新。考虑到脉冲是依状态触发的,因此,假设步进子集及跳变子集分别为 S 和 J ,当系统状态属于跳变子集 $J \subset \Delta_{2^n}$ 时,脉冲便会触发。相反,当状态属于步进子集 $S \subset \Delta_{2^n}$ 时,系统会进入“步进过程”。注意到系统的状态只能通过跳变过程或步进过程来进行更新。这相当于说,状态空间 Δ_{2^n} 是被 S 和 J 的并集所覆盖的,即 $S \cup J = \Delta_{2^n}$ 。此处,假设 S 和 J 之间存在着重叠部分,即 $S \cap J \neq \emptyset$ 。本文考虑的是,当状态属于这个重叠部分时,系统将会随机地进入跳变过程或步进过程。

根据(2)式和上述假设,当跳变后的状态仍然属于跳变子集 J 时,脉冲干扰可能在单一时刻触发不止一次。显然,利用脉冲布尔网络的传统模型是无法描述这种动力学行为的。因此,可以利用文献[21]和[22]中介绍的混杂指标模型来刻画跳变过程的瞬时性。针对混杂指标模型,新添加的指标 j 是用于表示脉冲已发生的次数,状态表达式改用 $\mathbf{x}(t, j)$ 来表示。本文中所研究的随机状态触发脉冲布尔控制网络可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1, j) = \mathbf{L}\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t, j), v(t, j) = 0, \\ \mathbf{x}(t, j+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t, j), v(t, j) = 1, \end{cases} \quad (3)$$

式中 $v(t, j)$ 是在集合 $\{1, 0\}$ 中进行取值的一个随机变量,它服从如下的概率分布 $p_i = \Pr\{v(t, j) = 1 \mid \mathbf{x}(t, j) = \delta_{2^n}^i\}$, $\forall i \in [1 : 2^n]$, 当 $\mathbf{x}(t, j)$ 属于集合 $J \setminus S$ 时,有 $p_i = 1$ 成立;当 $\mathbf{x}(t, j)$ 属于集合 $S \setminus J$ 时,有 $p_i = 0$ 成立;当 $\mathbf{x}(t, j)$ 属于集合 $S \cap J$ 时,有 $0 < p_i < 1$ 成立,相应地,它的跳变概率为 p_i ,步进概率为 $1 - p_i$ 。此外,当 $v(t, j) = 0$ 时,则表示系统将会进入步进过程,它的状态将会根据(3)式中第一个方程进行更新,且状态表达式中的第一个指标 t 将会变为 $t+1$,而第二个指标 j 保持不变。当 $v(t, j) = 1$ 时,则表示系统将会受到脉冲的干扰,从而进入跳变过程,它的状态将会根据(3)式中第二个方程进行更新。由于跳变过程中花费的时间可以忽略不计,假设在这一过程中,时间指标 t 不发生变化,但指标 j 会变为 $j+1$ 。

注2 除了能够方便地描述系统跳变的瞬时性外,我们还可以列出混杂指标模型的其它优点。对于文献[20]和[31]中介绍的传统脉冲布尔网络,其跳变过程的时间步长同步步进过程一致。因此,我们也可以将这些模型视为一类特殊的离散时间切换系统。本文通过引入混杂指标模型,能够从本质上区分离散时间脉冲系统和离散时间切换系统。此外,它还可以用于描述复杂的脉冲行为,例如单位时间内的连续跳变。

3.2 前向完备性

本节将在随机状态触发脉冲布尔控制网络的代数表达式(3),即

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1, j) = \mathbf{L}\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t, j), v(t, j) = 0, \\ \mathbf{x}(t, j+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t, j), v(t, j) = 1, \end{cases}$$

的形式下,先给出随机状态触发脉冲布尔控制网络的相关定义,再对网络的前向完备性进行分析。

定义3 状态序列 $\mathbf{x}(t_k, j_k), k \in \mathbf{N}$ 如果满足

(1) 当 $v(t, j) = 0$ 时,有 $\mathbf{x}(t_{k+1}, j_{k+1}) = \mathbf{L}\mathbf{u}(t_k)\mathbf{x}(t_k, j_k)$ 成立,其中 $t_{k+1} = t_k + 1, j_{k+1} = j_k$;

(2) 当 $v(t, j) = 1$ 时,有 $\mathbf{x}(t_{k+1}, j_{k+1}) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t_k, j_k)$ 成立,其中 $t_{k+1} = t_k, j_{k+1} = j_k + 1$,

则可将它称作是随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的解。

假设随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的初始状态为 $\mathbf{x}(0, 0) = \mathbf{x}(t_0, j_0) = \mathbf{x}_0 \in \Delta_{2^n}$, 控制序列为 $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_{t,s}\}, s \in \mathbf{N}$, 式中 $\mathbf{u}_{t,s} \in \Delta_{2^m}$ 表示在 s 时刻的控制输入,则随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的解可以用 $\mathbf{x}(t_k, j_k; \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ 表示。此外,它对应的时间指标序列可以用 $t_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ 表示。

将随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的一步跳变概率矩阵 $\mathbf{P}_j$ 定义为

$$[\mathbf{P}_j]_{i,j} = \Pr\{v(t_k, j_k) = 1, \mathbf{x}(t_{k+1}, j_{k+1}) = \delta_{2^n}^i \mid \mathbf{x}(t_k, j_k) = \delta_{2^n}^j\}, \forall k \in \mathbf{N}, \forall i, j \in [1 : 2^n]。$$

类似地,可将一步输入步进概率矩阵 $\mathbf{P}_s^u$ 定义为 $\mathbf{P}_s^u = [\mathbf{P}_s^{u,1} \mathbf{P}_s^{u,2} \cdots \mathbf{P}_s^{u,2^m}]$, 式中 $\mathbf{P}_s^{u,q}$ 为 $2^n \times 2^n$ 维的实矩

阵, $\mathbf{P}_S^{u,q} \in \mathbf{R}_{2^n \times 2^n}$, $q \in [1:2^m]$, 表示矩阵 $\mathbf{P}_S^u$ 的第 q 个矩阵块, 且其中元素满足 $[\mathbf{P}_S^{u,q}]_{i,j} = \Pr\{v(t_k, j_k) = 0, \mathbf{x}(t_{k+1}, j_{k+1}) = \delta_{2^n}^i \mid \mathbf{x}(t_k, j_k) = \delta_{2^n}^j, \mathbf{u}(t_k) = \delta_{2^m}^q\}$, $\forall k \in \mathbf{N}, \forall i, j \in [1:2^n]$ 。于是, 可以直接得到

$$\begin{cases} \mathbf{P}_J = \mathbf{G} \cdot \text{diag}(\mathbf{p}_J), \\ \mathbf{P}_S^{u,q} = \mathbf{L} \cdot \delta_{2^m}^q \cdot \text{diag}(\mathbf{p}_S), \end{cases}$$

式中 $\mathbf{p}_J = [p_1, p_2, \dots, p_{2^n}]$, $\mathbf{p}_S = [1 - p_1, 1 - p_2, \dots, 1 - p_{2^n}]$ 。

随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的一步输入状态概率转移矩阵可表示为 $\mathbf{P}^u = [\mathbf{P}^{u,1} \mathbf{P}^{u,2} \dots \mathbf{P}^{u,2^m}]$, 式中 $\mathbf{P}^{u,q} = \mathbf{P}_J + \mathbf{P}_S^{u,q} \in \mathbf{R}_{2^n \times 2^n}$, $q \in [1:2^m]$, 表示矩阵 $\mathbf{P}^u$ 的第 q 个矩阵块, 且其中元素满足

$$[\mathbf{P}^{u,q}]_{i,j} = \Pr\{\mathbf{x}(t_{k+1}, j_{k+1}) = \delta_{2^n}^i \mid \mathbf{x}(t_k, j_k) = \delta_{2^n}^j, \mathbf{u}(t_k) = \delta_{2^m}^q\}, \forall k \in \mathbf{N}, \forall i, j \in [1:2^n]。$$

考虑随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的状态反馈控制

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t, j), v(t, j) = 0, \quad (4)$$

式中 $\mathbf{H} \in L_{2^m \times 2^n}$, 不妨设 $\mathbf{H} = \delta_{2^m} [h_1 h_2 \dots h_{2^n}]$, 于是得到闭环随机状态触发脉冲布尔控制网络

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1, j) = \mathbf{LH}\Phi_n \mathbf{x}(t, j), v(t, j) = 0, \\ \mathbf{x}(t, j+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t, j), v(t, j) = 1. \end{cases} \quad (5)$$

注意到连续的跳变过程可能会导致 Zeno 现象, 即脉冲在非常短的时间间隔内发生无数次。因此, 为了避免这种现象, 下面将给出随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的前向完备性的定义。

定义4 若对于任意初始状态 $\mathbf{x}_0$ 以及非负整数 T , 都存在一个非负整数 K 和一个控制序列 $\mathbf{u}$ 使得

$$\Pr\{t_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \geq T\} = 1, \forall k \geq K, \quad (6)$$

成立, 则称随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)是前向完备的。

命题1 状态反馈控制(4)下的随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)是前向完备的当且仅当 $(\mathbf{P}_J)^{2^n} = \mathbf{0}$ 。

证 必要性 假设状态反馈控制(4)下的随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)是前向完备的。显然当 $T=1$ 时, 有等式(6)成立。因此, 存在一个非负整数 K 和一个控制序列 $\mathbf{u}_H$ 使得 $\Pr\{t_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_H) \geq 1\} = 1, \forall \mathbf{x}_0 \in \Delta_{2^n}, \forall k \geq K$, 式中 $\mathbf{u}_H$ 是由状态反馈控制器生成的控制序列。对于任意的 $j \in [1:2^n]$ 和 $k \geq K$ 有

$$\Pr\{t_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_H) = 0\} = 1 - \Pr\{t_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_H) \geq 1\}$$

$$= \sum_{i=1}^{2^n} \Pr\{t_k = 0, \mathbf{x}(t_k, j_k) = \delta_{2^n}^i \mid \mathbf{x}_0 = \delta_{2^n}^j, \mathbf{u}_H\} = \sum_{i=1}^{2^n} [(\mathbf{P}_J)^k]_{i,j} = 0,$$

这就意味着 $(\mathbf{P}_J)^k = \mathbf{0}, \forall k \geq K$ 。因为 $\mathbf{P}_J$ 是一个 $2^n \times 2^n$ 的幂零矩阵, 所以存在一个非负整数 $s \leq 2^n$ 使得等式 $(\mathbf{P}_J)^s = \mathbf{0}$ 成立。因此,

$$(\mathbf{P}_J)^{2^n} = (\mathbf{P}_J)^s \cdot (\mathbf{P}_J)^{2^n-s} = \mathbf{0}。$$

充分性 假设等式 $(\mathbf{P}_J)^{2^n} = \mathbf{0}$ 成立, 证明下式

$$\Pr\{t_{rk}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_H) \geq r\} = 1, \forall k \geq K, \forall \mathbf{x}_0 \in \Delta_{2^n}, \quad (7)$$

对于任意的整数 $r \geq 1$ 都成立。显然, 对于任意的整数 $k \geq 2^n$ 都有

$$(\mathbf{P}_J)^k = (\mathbf{P}_J)^{2^n} \cdot (\mathbf{P}_J)^{k-2^n} = \mathbf{0} \cdot (\mathbf{P}_J)^{k-2^n} = \mathbf{0},$$

即存在一个非负整数 K 使得等式 $(\mathbf{P}_J)^k = \mathbf{0}, \forall k \geq K$ 成立, 这也意味着

$$\Pr\{t_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_H) \geq 1\} = 1, \forall k \geq K, \forall \mathbf{x}_0 \in \Delta_{2^n}。$$

令 $r > 1$, 并假设等式(7)在 $r-1$ 处成立, 即 $\Pr\{t_{(r-1)k}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_H) \geq r-1\} = 1$, 因此,

$$\Pr\{t_{rk}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_H) \geq r\} \geq \sum_{i=1}^{2^n} \Pr\{t_{(r-1)k} \geq r-1, \mathbf{x}(t_{(r-1)k}, j_{(r-1)k}) = \delta_{2^n}^i \mid \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_H\} \times$$

$$\Pr\{t_{rk} \geq t_{(r-1)k} + 1 \mid \mathbf{x}(t_{(r-1)k}, j_{(r-1)k}) = \delta_{2^n}^i, \mathbf{u}_H\} = \Pr\{t_{(r-1)k} \geq r-1 \mid \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_H\} = 1。$$

这说明等式(7)在 r 处也成立。从而, 等式(7)对于任意的整数 $r \geq 1$ 都成立, 可以直接得到

$$\Pr\{t_{k'}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_H) \geq r\} = 1, \forall k' \geq rk, \forall \mathbf{x}_0 \in \Delta_{2^n},$$

这就证明了状态反馈控制(4)下的随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)是前向完备的。证毕。

注3 要判断随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)是否是前向完备的, 也可以通过它的状态转移图来确定^[32]。由此, 可以进一步得出, 状态反馈控制(4)下的随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)是前向完备的,

当且仅当它的状态转移子图 $G=(V, \epsilon)$ 是非循环的, 其中 $V=J$ 表示顶点集, $\epsilon \subseteq J \times J$ 是由跳变过程生成的与控制无关的边组成的。

3.3 渐近反馈能控性定义

对于给定的状态反馈控制(4), 假设闭环随机状态触发脉冲布尔控制网络(5)的初始状态为 $x_0 \in \Delta_{2^n}$, 则该网络的解可以用 $x(t_k, j_k; x_0, u_H)$ 来表示。实际上, 这个解是一个齐次马尔科夫链, 并且它的一步状态概率转移矩阵为 P_H 。因此, 用 P_H^k 表示网络的 k 步状态概率转移矩阵, 满足 $P_H^k = (P_H)^k, k \in \mathbb{N}^+$ 。特别地, $P_H^1 = P_H$ 。

定义5 (有限时间能控性)考察随机状态触发脉冲布尔控制网络(3), (1) 状态 $x_d \in \Delta_{2^n}$ 被称作是从 $x_0 \in \Delta_{2^n}$ 出发以概率1有限时间可达的, 若存在一个 $k \in \mathbb{N}^+$ 和一个控制序列 u 使得 $\Pr\{x(t_k, j_k; x_0, u) = x_d\} = 1$; (2) 网络被称作是以概率1有限时间能控的, 若对于任意的 $x_0, x_d \in \Delta_{2^n}$, 状态 x_d 都是从 x_0 出发以概率1有限时间可达的。

定义6 (有限时间反馈能控性): 考察随机状态触发脉冲布尔控制网络(3), (1) 状态 $x_d \in \Delta_{2^n}$ 被称作是从 $x_0 \in \Delta_{2^n}$ 出发以概率1有限时间反馈可达的, 若存在一个 $k \in \mathbb{N}^+$ 和一个状态反馈控制(4)使得 $\Pr\{x(t_k, j_k; x_0, u_H) = x_d\} = 1$; (2) 网络被称作是以概率1有限时间反馈能控的, 若对于任意的 $x_0, x_d \in \Delta_{2^n}$, 状态 x_d 都是从 x_0 出发以概率1有限时间反馈可达的。

定义7 (渐近能控性)考察随机状态触发脉冲布尔控制网络(3), (1) 状态 $x_d \in \Delta_{2^n}$ 被称作是从 $x_0 \in \Delta_{2^n}$ 出发渐近可达的, 若存在一个控制序列 u 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr\{x(t_k, j_k; x_0, u) = x_d\} = 1$; (2) 状态 $x_d \in \Delta_{2^n}$ 被称作是渐近可达的, 若对于任意的 $x_0 \in \Delta_{2^n}$, 状态 x_d 都是从 x_0 出发渐近可达的; (3) 网络被称作是渐近能控的, 如果每个 $x_d \in \Delta_{2^n} \setminus J$ 都是渐近可达的。

定义8 (渐近反馈能控性)考察随机状态触发脉冲布尔控制网络(3), (1) 状态 $x_d \in \Delta_{2^n}$ 被称作是从 $x_0 \in \Delta_{2^n}$ 出发渐近反馈可达的, 若存在一个状态反馈控制(4)使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr\{x(t_k, j_k; x_0, u_H) = x_d\} = 1$; (2) 状态 $x_d \in \Delta_{2^n}$ 被称作是渐近反馈可达的, 若对于任意的 $x_0 \in \Delta_{2^n}$, 状态 x_d 都是从 x_0 出发渐近反馈可达的; (3) 网络被称作是渐近反馈能控的, 如果每个 $x_d \in \Delta_{2^n} \setminus J$ 都是渐近反馈可达的。

注4 值得一提的是, 在随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的渐近(反馈)能控性的定义中, 状态 x_d 的取值集合并不是 Δ_{2^n} 。这是因为, 当 $x_d \in J$ 是渐近(反馈)可达时, 会发生 Zeno 现象。但这与网络前向完备性的条件 $(P_J)^{2^n} = 0$ 相矛盾, 所以将定义中 x_d 的取值集合选取为 $\Delta_{2^n} \setminus J$ 。

4 主要内容

4.1 最大控制不变集合

定义9 子集 $C \subseteq \Delta_{2^n}$ 被称作是随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的一个控制不变子集, 若对于任意的初始状态 $x_0 \in C$, 存在一个控制输入 $u_{t,0} \in \Delta_{2^m}$ 使得 $\Pr\{x(t_1, j_1; x_0, u_{t,0}) \in C\} = 1$ 。此外, 随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的任意两个控制不变子集的并集仍是它的一个控制不变子集。将包含于非空子集 $M \subseteq \Delta_{2^n}$ 中的所有控制不变子集的并集称为 M 的最大控制不变子集, 用符号 $I_c(M)$ 来表示。

命题2 假设 P^u 是随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的一步输入状态概率转移矩阵, 并且 $\Lambda_0 = \{i \mid \delta_{2^n}^i \in M_0\}$ 表示 $M_0 := M$ 的指标集。定义一个集合序列 $\Lambda_s, s \geq 0, \Lambda_s = \{j \in \Lambda_{s-1} \mid \exists q, s.t. \sum_{i \in \Lambda_{s-1}} [P^{u,q}]_{i,j} = 1\}$, 式中 q 的取值范围为 $[1: 2^m]$, 则必定存在一个非负整数 $\eta \leq |\Lambda_0|$ 使得等式 $\Lambda_\eta = \Lambda_{\eta+1}$ 成立, 并且有 $I_c(M_0) = \{\delta_{2^n}^i \mid i \in \Lambda_\eta\}$ 。

证 令 $M_s = \{\delta_{2^n}^i \mid i \in \Lambda_s\}$ 。根据之前的定义, $\Lambda_{s+1} \subseteq \Lambda_s$ 和 $M_{s+1} \subseteq M_s$ 显然对于任意的整数 $s \geq 0$ 都成立。因为 M_0 是一个有限集, 所以必定存在一个非负整数 $\eta \leq |\Lambda_0|$ 使得等式 $\Lambda_\eta = \Lambda_{\eta+1}$ 成立。

首先证明 $I_c(M_0) \subseteq M_\eta$ 。根据定义, 显然有

$$\sum_{i \in \Lambda_s} [P^{u,q}]_{i,j} = \Pr\{x(t_{k+1}, j_{k+1}) \in M_s \mid x(t_k, j_k) = \delta_{2^n}^j, u(t_k) = \delta_{2^m}^q\}。$$

假设 $\Lambda_0 \neq \Lambda_1$, 对于任意的 $j \in (\Lambda_0 \setminus \Lambda_1)$ 都有

$$\sum_{i \in \Lambda_0} [\mathbf{P}^{u,q}]_{i,j} = \Pr\{\mathbf{x}(t_{k+1}, j_{k+1}) \in M_0 \mid \mathbf{x}(t_k, j_k) = \delta_{2^n}^j, u(t_k) = \delta_{2^m}^q\} < 1, \forall q \in [1:2^m],$$

这就表明 $\delta_{2^n}^j \notin I_c(M_0)$, $\forall j \in (\Lambda_0 \setminus \Lambda_1)$ 。从而, $I_c(M_0) \cap (M_0 \setminus M_1) = \emptyset$ 。此外,由以下式子成立

$$I_c(M_0) \subseteq M_0 = M_1 \cup (M_0 \setminus M_1),$$

可以直接得出 $I_c(M_0) \subseteq M_1$, 即 $I_c(M_0)$ 是 M_1 的一个控制不变子集。由最大控制不变子集的定义, 可得 $I_c(M_0) \subseteq I_c(M_1) \subseteq M_1$ 。由数学归纳法可知关系式 $I_c(M_0) \subseteq M_s$ 对于任意的 $s \geq 0$ 都成立。于是有 $I_c(M_0) \subseteq M_\eta$ 。

其次证明 $I_c(M_0) \supseteq M_\eta$ 。假设 $\Lambda_\eta = \Lambda_{\eta+1}$, 基于指标集 Λ_s 的定义, 可以找到一个正整数 $q \in [1:2^m]$ 满足 $\sum_{i \in \Lambda_0} [\mathbf{P}^{u,q}]_{i,j} = \Pr\{\mathbf{x}(t_{k+1}, j_{k+1}) \in M_\eta \mid \mathbf{x}(t_k, j_k) = \delta_{2^n}^j, u(t_k) = \delta_{2^m}^q\} = 1, \forall j \in \Lambda_\eta$ 。

显然, M_η 是 M_0 的一个控制不变子集。因此有 $I_c(M_0) \supseteq M_\eta$ 。证毕。

注5 进一步总结命题2中给出的算法。

第一步: 删去每个矩阵块中的第 i 行和第 j 列, 其中 $i, j \in \Lambda_0^c$;

第二步: 对于每个矩阵块的剩余部分, 删去列和小于1的列以及它所对应的行。随后, 将 Λ_0 的值更新为剩余列指标的并集;

第三步: 反复进行第二步的操作, 直到集合 Λ_0 保持不变。可以得到 $I_c(M_0) = \{\delta_{2^n}^i \mid i \in \Lambda_0\}$ 。

4.2 渐近反馈能控性分析

针对闭环随机状态触发脉冲布尔控制网络(5), 它的一步状态概率转移矩阵为

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{P}_J + \mathbf{P}_S,$$

式中 $\mathbf{P}_J = \mathbf{G} \cdot \text{diag}(\mathbf{p}_J)$ 表示一步跳变概率矩阵, 而 $\mathbf{P}_S = \mathbf{LH}\Phi_n \cdot \text{diag}(\mathbf{p}_S)$ 表示一步步进概率矩阵。

与定义9类似, 子集 $C \subseteq \Delta_{2^n}$ 被称作是闭环随机状态触发脉冲布尔控制网络(5)的一个不变子集, 若等式 $\Pr\{\mathbf{x}(t_1, j_1; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_H) \in C\} = 1$ 对于任意的状态 $\mathbf{x}_0 \in C$ 都成立。同样, 将包含于非空子集 $M \subseteq \Delta_{2^n}$ 中的所有不变子集的并集称为 M 的最大不变子集, 记作 $I_H(M)$ 。下面提供一个计算最大不变子集的算法。

引理3^[33] 假设 $\mathbf{P}_H$ 是闭环随机状态触发脉冲布尔控制网络(5)的一步状态概率转移矩阵, $\Lambda_0 = \{i \mid \delta_{2^n}^i \in M_0\}$ 表示 $M_0 := M$ 的指标集。可以定义一个集合序列 $\Lambda_s, \Lambda_s = \{j \in \Lambda_{s-1} \mid \sum_{i \in \Lambda_{s-1}} [\mathbf{P}_H]_{i,j} = 1\}, s \geq 0$, 此时, 必定存在一个非负整数 $\eta \leq |\Lambda_0|$ 使得等式 $\Lambda_\eta = \Lambda_{\eta+1}$ 成立, 并且有 $I_H(M) = \{\delta_{2^n}^i \mid i \in \Lambda_\eta\}$ 。

不难发现, 对于任意给定的状态反馈控制(4), 都有 $I_H(M) \subseteq I_c(M)$ 成立。

引理4 考察状态反馈控制(4)下的随机状态触发脉冲布尔控制网络(3), 假设 $I_H(M)$ 是包含于状态集合 M 中的最大不变子集。对于每个 $j \in [1:2^n]$, 概率 $\sum_{i \in \Lambda_H} [\mathbf{P}_H^k]_{i,j}$ 不会随着 $k \in \mathbf{N}^+$ 的增大而减小, 其中 Λ_H 是 $I_H(M)$ 的指标集。

针对闭环随机状态触发脉冲布尔控制网络(5), 若有 $[\mathbf{P}_H]_{i_{s+1}, i_s} > 0, \forall s \in [0:k-1]$, 就称状态链 $\mathbf{x}_0 = \delta_{2^n}^{i_0} \rightarrow \delta_{2^n}^{i_1} \rightarrow \cdots \rightarrow \delta_{2^n}^{i_k} = \mathbf{x}_d$ 为从状态 $\mathbf{x}_0$ 到 $\mathbf{x}_d$ 长度为 k 的允许路径。

基于上述分析, 有下述结果成立。

命题3 考察随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)。状态 $\mathbf{x}_d = \delta_{2^n}^r$ 是从 $\mathbf{x}_0 = \delta_{2^n}^j$ 出发渐近反馈可达的, 当且仅当存在一个状态反馈控制(4)使得(1) $(\mathbf{P}_J)^{2^n} = \mathbf{0}$; (2) $[\mathbf{P}^{u,h_r}]_{r,r} = 1$; (3) 该闭环网络不存在从状态 $\delta_{2^n}^j$ 到 $I_H(\delta_{2^n}^r)$ 的允许路径。

证 必要性。假设状态 $\delta_{2^n}^r$ 是从 $\delta_{2^n}^j$ 出发渐近反馈可达的。根据命题2, 显然有条件(1)成立。再由定义8可知, 存在一个状态反馈控制(4)使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr\{\mathbf{x}(t_k, j_k; \delta_{2^n}^j, \mathbf{u}_H) = \delta_{2^n}^r\} = 1$, 即有

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{P}_H^k]_{r,j} = 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{P}_H^k]_{s,j} = 0, \forall s \in [1:2^n] \setminus \{r\}. \end{cases} \quad (8)$$

不难发现, 对于任意的 $k \in \mathbf{N}^+$, 都有

$$[\mathbf{P}_H^k]_{r,j} = \sum_{s=1}^{2^n} [\mathbf{P}_H^1]_{r,s} [\mathbf{P}_H^{k-1}]_{s,j} = [\mathbf{P}_H^1]_{r,r} [\mathbf{P}_H^{k-1}]_{r,j} = \sum_{s=1, s \neq r}^{2^n} \mathbf{P}_{r,s} [\mathbf{P}_H^{k-1}]_{s,j}。$$

令上述方程两端的 k 趋向于无穷, 则有 $[\mathbf{P}_H^1]_{r,r} = 1$, 由此可知条件(2)成立。

下面证明条件(3)也成立。当 $I_H(\delta_{2^n}^-) = \emptyset$ 时, 条件(3)显然成立。假设 $I_H(\delta_{2^n}^-) \neq \emptyset$, 并且存在一条从状态 $\delta_{2^n}^j$ 到 $I_H(\delta_{2^n}^-)$ 的允许路径, 则存在一个正整数 k_1 使得 $\sum_{s \in \Delta_H^*} [\mathbf{P}_H^k]_{s,j} = \zeta > 0$, 其中 Δ_H^* 表示 $I_H(\delta_{2^n}^-)$ 的指标集。根据引理 4 可知 $\sum_{s \in \Delta_H^*} [\mathbf{P}_H^k]_{s,j} \geq \zeta > 0, \forall k \geq k_1$ 。

从而对于任意的 $k \geq k_1$, 都有 $[\mathbf{P}_H^k]_{r,j} \leq 1 - \sum_{s \in \Delta_H^*} [\mathbf{P}_H^k]_{s,j} \leq 1 - \zeta < 1$, 令 $k \rightarrow \infty$, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{P}_H^k]_{r,j} \leq 1 - \zeta < 1,$$

这与(8)式相矛盾。所以并不存在从状态 $\delta_{2^n}^j$ 到 $I_H(\delta_{2^n}^-)$ 的允许路径。

充分性。假设条件(1)-(3)都成立。条件(1)确保了网络的前向完备性。定义 $M := I_H(\delta_{2^n}^-) \cup \{\delta_{2^n}^r\}$, $M^c := \Delta_{2^n} \setminus M$ 。结合条件(2), 可得 $I_H(M) = M$ 。由最大不变子集的定义可知, 对于任意的 $\delta_{2^n}^i \in M^c$, 都存在一条从 $\delta_{2^n}^i$ 到 $\delta_{2^n}^r$ 的允许路径。由文献[33]中的定理 3 可得, 对于任意的 $x_0 \in \Delta_{2^n}$ 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr\{x(t_k, j_k; x_0, u_H) \in M\} = 1.$$

令 $x_0 = \delta_{2^n}^j$, 再结合条件(3)可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr\{x(t_k, j_k; \delta_{2^n}^j, u_H) = \delta_{2^n}^r\} = 1$ 。因此, 状态 $\delta_{2^n}^r$ 是从 $\delta_{2^n}^j$ 出发渐近反馈可达的。证毕。

注 6 命题 3 中的条件(3)可以等价地替换为

$$\sum_{s \in \Delta_H^*} [\mathbf{P}_H^{2^n-1-|I_H(\delta_{2^n}^-)|}]_{s,j} = 0, \quad (9)$$

式中 Δ_H^* 表示 $I_H(\delta_{2^n}^-)$ 的指标集。显然, 条件(3)可推导出(9)式。相反, 若由(9)式推导出条件(3), 只需要考虑 $j \neq r$ 的情况。根据引理 4, 可得对于任意的 $k' \in [1: 2^n - 1 - |I_H(\delta_{2^n}^-)|]$ 都有 $\sum_{s \in \Delta_H^*} [\mathbf{P}_H^{k'}]_{s,j} = 0$, 从而可知 $\delta_{2^n}^j \notin I_H(\delta_{2^n}^-)$ 。不难发现, $\delta_{2^n}^r$ 是网络的一个不动点, 并且 $\delta_{2^n}^- \setminus I_H(\delta_{2^n}^-)$ 中只包含了 $2^n - 1 - |I_H(\delta_{2^n}^-)|$ 个不同的状态, 因此(9)式可推导出条件(3)成立。

命题 4 考察随机状态触发脉冲布尔控制网络(3), 状态 $x_d = \delta_{2^n}^r$ 是渐近反馈可达的, 当且仅当下列条件成立(1) $(\mathbf{P}_J)^{2^n} = 0$; (2) 存在一个正整数 $q \in [1: 2^n]$ 使得 $[\mathbf{P}^{u,q}]_{r,r} = 1$; (3) 对于任意的 $j \in [1: 2^n]$, 都存在一条从状态 $\delta_{2^n}^j$ 到 $\delta_{2^n}^r$ 的允许路径。

证 必要性 假设状态 $x_d = \delta_{2^n}^r$ 是渐近反馈可达的。根据命题 2, 可得条件(1)成立。此外, 由命题 4.2 可知, 对于任意的 $j \in [1: 2^n]$, 都存在一个相应的状态反馈控制 $u(t) = H_j x(t, j), v(t, j) = 0$ 使得 $[\mathbf{P}^{u, h_j^i}]_{r,r} = 1$, 其中 $H_j = \delta_{2^n} [h_1^i h_2^i \cdots h_{2^n}^i]$ 。

因此, 只需令 $q \in \{h_j^i \mid j \in [1: 2^n]\}$, 此时有条件(2)成立。此外, 对于任意的 $j \in [1: 2^n]$, 都存在一个正整数 k^* , 使得 $[\mathbf{P}_{H_j}^{k^*}]_{r,j} > 0$, 即存在一条从状态 $\delta_{2^n}^j$ 到 $\delta_{2^n}^r$ 长度为 k^* 的允许路径。从而可知条件(3)也成立。

充分性。假设条件(1)-(3)都成立。条件(1)确保了网络的前向完备性。另一方面, 条件(2)和条件(3)意味着 $\delta_{2^n}^r$ 是从任意状态 x_0 出发可达的, 即存在一个状态反馈控制(4)使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr\{x(t_k, j_k; \delta_{2^n}^j, u_H) = \delta_{2^n}^r\} = 1, \forall j \in [1: 2^n].$$

因此, 根据定义可知, 状态 $x_d = \delta_{2^n}^r$ 是渐近反馈可达的。证毕。

随后, 针对随机状态触发脉冲布尔控制网络(3), 引入 k 步可达性矩阵

$$R(k) := \sum_{s=1}^k \left(\sum_{q=1}^{2^n} \mathbf{P}^{u,q} \right)^s.$$

引理 5 对于任意给定的 $i, j \in [1: 2^n]$, $[R(s)]_{i,j} > 0$ 对于部分的 $s \in \mathbf{N}^+$ 都成立, 当且仅当存在一

条从状态 $\delta_{2^n}^j$ 到 $\delta_{2^n}^i$ 长度为 $t \in [1:s]$ 的允许路径。

证 显然, $[R(s)]_{i,j} > 0$ 成立, 当且仅当存在一个 $t \in [1:s]$ 使得 $[(\sum_{q=1}^{2^m} P^{u,q})^t]_{i,j} > 0$ 。当然它也等价于存在一个指标序列 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t \in [1:2^m]$ 使得 $[P^{u,\rho_t} P^{u,\rho_{t-1}} \dots P^{u,\rho_1}]_{i,j} > 0$ 。于是, 就存在一条从状态 $\delta_{2^n}^j$ 到 $\delta_{2^n}^i$ 长度为 t 的允许路径。

定理1 考察随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)。状态 $x_d = \delta_{2^n}^r$ 是渐近反馈可达的, 当且仅当下列条件成立(1) $(P_J)^{2^n} = \mathbf{0}$; (2) 存在一个正整数 $q \in [1:2^m]$ 使得 $[P^{u,q}]_{r,r} = 1$; (3) $\text{Row}_r(\mathbf{R}(2^n - 1)) > 0$ 。

证 根据命题4和引理5, 可知充分性显然成立。下面证明必要性。同理, 由命题4可知, 条件(1)-(2)都成立, 并且对于任意的 $j \in [1:2^n]$, 都存在一条从状态 $\delta_{2^n}^j$ 到 $\delta_{2^n}^r$ 的允许路径。不难发现, 当 $j \neq r$ 时, 它也等价于存在一条从状态 $\delta_{2^n}^j$ 到 $\delta_{2^n}^r$ 长度为 $s \in [1:2^n - 1]$ 的允许路径。

由引理5可得 $[\mathbf{R}(2^n - 1)]_{r,j} > 0, \forall j \neq r$ 。又因为条件(2)保证了 $[\mathbf{R}(2^n - 1)]_{r,r} > 0$ 必定成立, 所以可得条件(3)也成立。证毕。

结合定理1以及相关定义, 可以直接得出下面的这个定理。

定理2 随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)是渐近反馈能控的, 当且仅当下列条件成立: (1) $(P_J)^{2^n} = \mathbf{0}$; (2) 对于任意的 $r \in \Delta_J$, 都存在一个正整数 $q \in [1:2^m]$ 使得 $[P^{u,q}]_{r,r} = 1$; (3) $\text{Row}_i(\mathbf{R}(2^n - 1)) > 0, \forall i \in \Delta_J$, 其中 Δ_J 表示 $\Delta_{2^n} \setminus J$ 的指标集。

注7 若随机状态触发脉冲布尔控制网络是渐近反馈能控的, 其状态反馈控制器的设计如下

对于给定末端状态 $x_d = \delta_{2^n}^d$, 定义一个集合序列 $\Gamma_k(x_d)$, $k \in \mathbf{N}$, 满足下列条件: $\Gamma_0(x_d) = \{x_d\}$, $\Gamma_{k+1}(x_d) = \{\delta_{2^n}^j \mid \exists q \in [1:2^m] \text{ s.t. } \sum_{\delta_{2^n}^i \in \Gamma_k(x_d)} [P^{u,q}]_{i,j} > 0\}$ 。此时, 我们将状态空间 Δ_{2^n} 划分为 $T+1$ 层, 并且第 k 层表示为

$$\Xi_k = \begin{cases} \{x_d\}, k=0, \\ \Gamma_k(x_d) \setminus \Gamma_{k-1}(x_d), k \in [1:T]. \end{cases}$$

因此, 对于初始状态 $x_0 = \delta_{2^n}^j$, 我们定义如下的允许控制集

$$\Pi_j = \begin{cases} \{\delta_{2^n}^q \mid [P^{u,q}]_{d,j} = 1\}, \text{若 } x_0 \in \Xi_0, \\ \{\delta_{2^n}^q \mid \sum_{\delta_{2^n}^i \in \Gamma_{k-1}(x_d)} [P^{u,q}]_{i,j} > 0\}, \text{若 } x_0 \in \Xi_k, \end{cases}$$

由此可得, 状态反馈控制器 $u(t) = Hx(t, j), v(t, j) = 0$ 可通过以下关系式得到

$$\text{Col}_j(H) \in \Pi_j, \forall j \in [1:2^n].$$

下面, 我们通过一个实际的生物例子来说明结果的有效性。

例1 生物学案例分析—— λ 噬菌体: 它是一种病毒, 在细菌感染后生长在细菌上, 并将其染色体注入细菌细胞。此时, 病毒可以遵循两种不同的途径之一: 溶源性或裂解性。这两种可能的途径是表达不同基因组的结果。温度、生长速率和感染的多样性等环境条件会影响基因的表达。负责溶源/裂解决定的分子机制被称为 λ 切换, 下面是以 λ 为切换的 BCN 模型, 即“步进过程”

$$\begin{cases} x_1(t+1, j) = [-x_2(t, j)] \wedge [-x_5(t, j)], \\ x_2(t+1, j) = [-x_5(t, j)] \wedge [x_2(t, j) \vee x_3(t, j)], \\ x_3(t+1, j) = [-x_2(t, j)] \wedge u(t, j) \wedge [x_1(t, j) \vee x_4(t, j)], \\ x_4(t+1, j) = [-x_2(t, j)] \wedge u(t, j) \wedge x_1(t, j), \\ x_5(t+1, j) = [-x_2(t, j)] \wedge [-x_3(t, j)], \end{cases}$$

式中 $x_1, x_2, \dots, x_5$ 表示噬菌体基因, u 表示环境条件合适与否的二值控制输入, 经计算得到状态转移矩阵

$$\begin{aligned} L = & \delta_{32} [32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 26 \ 2 \ 26 \ 2 \ 25 \ 9 \ 25 \ 9 \\ & 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 28 \ 4 \ 32 \ 8 \ 27 \ 11 \ 31 \ 15 \\ & 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 8 \ 32 \ 8 \ 31 \ 15 \ 31 \ 15 \\ & 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 8 \ 32 \ 8 \ 31 \ 15 \ 31 \ 15]. \end{aligned}$$

但是在细菌的基因表达过程中,许多基因由于 X 射线、激光、紫外线等物理因素的影响,可能会瞬间经历状态的突变。这些突然而急剧的变化通常持续的时间很短,并且被认为是以脉冲的形式瞬间发生的,我们将基因的状态突然或随机地跳变称为“跳变过程”,并用以下模型进行描述:

$$\begin{cases} x_1(t, j) = [x_1(t, j) \vee x_3(t, j)] \leftrightarrow x_5(t, j), \\ x_2(t, j) = [-x_1(t, j)] \vee x_3(t, j), \\ x_3(t, j) = -x_4(t, j), \\ x_4(t, j) = [x_1(t, j) \wedge x_2(t, j)] \vee x_3(t, j), \\ x_5(t, j) = x_1(t, j) \leftrightarrow [x_3(t, j) \vee x_4(t, j)], \end{cases}$$

经计算得到其状态转移矩阵

$$\mathbf{G} = \delta_{32} [5 \ 21 \ 1 \ 17 \ 13 \ 29 \ 10 \ 26 \ 5 \ 21 \ 1 \ 17 \ 15 \ 31 \ 12 \ 28 \\ 6 \ 22 \ 2 \ 18 \ 24 \ 8 \ 19 \ 3 \ 6 \ 22 \ 2 \ 18 \ 24 \ 8 \ 19 \ 3].$$

假设步进子集和跳变子集分别为

$$S = \{\delta_{32}^1, \delta_{32}^2, \delta_{32}^3, \delta_{32}^4, \delta_{32}^5, \delta_{32}^6, \delta_{32}^7, \delta_{32}^8, \delta_{32}^9, \delta_{32}^{10}, \delta_{32}^{11}, \delta_{32}^{12}, \delta_{32}^{13}, \delta_{32}^{14}, \delta_{32}^{15}, \delta_{32}^{16}, \delta_{32}^{17}, \\ \delta_{32}^{18}, \delta_{32}^{19}, \delta_{32}^{20}, \delta_{32}^{21}, \delta_{32}^{22}, \delta_{32}^{23}, \delta_{32}^{24}, \delta_{32}^{25}, \delta_{32}^{26}, \delta_{32}^{27}, \delta_{32}^{28}, \delta_{32}^{29}, \delta_{32}^{30}, \delta_{32}^{31}, \delta_{32}^{32}\},$$

$J = \{\delta_{32}^2\}$, 并且 $p_2 = 0.5$ 。

通过计算得到 $S \cap J = \{\delta_{32}^2\}$, $J \setminus S = \emptyset$, $(P_J)^{32} = 0$ 以及

$$S \setminus J = \{\delta_{32}^1, \delta_{32}^3, \delta_{32}^4, \delta_{32}^5, \delta_{32}^6, \delta_{32}^7, \delta_{32}^8, \delta_{32}^9, \delta_{32}^{10}, \delta_{32}^{11}, \delta_{32}^{12}, \delta_{32}^{13}, \delta_{32}^{14}, \delta_{32}^{15}, \delta_{32}^{16}, \delta_{32}^{17}, \\ \delta_{32}^{18}, \delta_{32}^{19}, \delta_{32}^{20}, \delta_{32}^{21}, \delta_{32}^{22}, \delta_{32}^{23}, \delta_{32}^{24}, \delta_{32}^{25}, \delta_{32}^{26}, \delta_{32}^{27}, \delta_{32}^{28}, \delta_{32}^{29}, \delta_{32}^{30}, \delta_{32}^{31}, \delta_{32}^{32}\}.$$

根据上面两个定理,由于 $[P^{u,q}]_{24,24} = [P^{u,q}]_{31,31} = 1, q = 1, 2$, 但是 $\text{Row}_i(\mathbf{R}(31)) > 0, i = 24, 31$, 所以状态 $x_d = \delta_{32}^{24}$ 或 δ_{32}^{31} 不是渐近反馈可达的,同时它也不是渐近反馈能控的。

4.3 渐近反馈能控性与其它能控性之间的关系

针对随机状态触发脉冲布尔控制网络(3),本节就来讨论一下渐近反馈能控性与其它能控性之间的关系。首先,可以给出下面的例子来说明网络的渐近反馈能控性与有限时间能控性之间并不存在蕴含关系。

例 2 考察具有 1 个状态节点和 1 个输入节点的随机状态触发脉冲布尔控制网络(3),且已知 $L = \delta_2[2, 1, 1, 1]$, $G = \delta_2[2, 1]$, 步进子集 $S = \{\delta_2^1, \delta_2^2\}$, 跳变子集 $J = \{\delta_2^2\}$, $p_1 = 0.5$ 。它的状态转移如图 1。

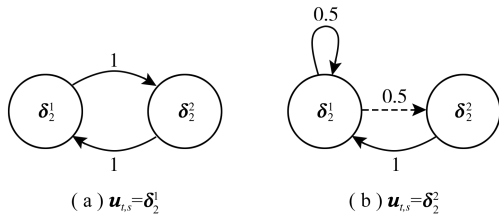


图 1 例 2 中网络在不同控制输入下的状态转移图

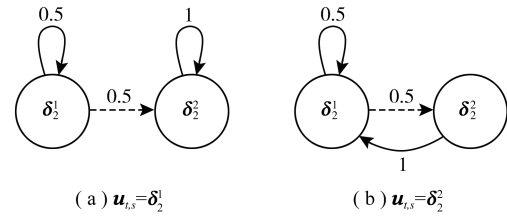


图 2 例 3 中在网络不同控制输入下的状态转移图

通过计算可得 $S \cap J = \{\delta_2^1\}$, $S \setminus J = \{\delta_2^2\}$, $J \setminus S = \emptyset$, $(P_J)^2 = \mathbf{0}$ 。由于 $[P^{u,q}]_{r,r} \neq 1, \forall q, r \in [1:2]$, 所以根据定理 2 可知,该网络不是渐近反馈能控的。另一方面,容易得出(1) $\Pr\{x(t_1, j_1; x_0 = \delta_2^j, u_{t,1} = \delta_2^1) = \delta_2^r\} = 1, \forall r, j \in [1:2], r \neq j$; (2) $\Pr\{x(t_2, j_2; x_0 = \delta_2^r, u_{t,1} = u_{t,2} = \delta_2^1) = \delta_2^r\} = 1, \forall r \in [1:2]$, 因此,该网络是以概率 1 有限时间能控的。

例 3 考察具有 1 个状态节点和 1 个输入节点的随机状态触发脉冲布尔控制网络(3),且已知 $L = \delta_2[1, 2, 1, 1]$, $G = \delta_2[2, 1]$, 步进子集 $S = \{\delta_2^1, \delta_2^2\}$, 跳变子集 $J = \{\delta_2^1\}$, $p_1 = 0.5$ 。它的状态转移如图 2 所示。

计算可得 $S \cap J = \{\delta_2^1\}$, $S \setminus J = \{\delta_2^2\}$, $J \setminus S = \emptyset$, $(P_J)^2 = \mathbf{0}$ 。根据定理 2,容易验证网络是渐近反馈能控的。但另一方面,又无法找到一个控制序列 u 使得网络从状态 $x_0 = \delta_2^1$ 出发在有限时间内以概率 1 到达 $x_d = \delta_2^2$ 。因此,该网络并不是以概率 1 有限时间能控的。

接下来,将探究网络的渐近反馈能控性与有限时间反馈能控性之间的关系。重新考虑例2中的网络,之前已经验证了它并不是渐近反馈能控的,但是当选取反馈增益矩阵 $\mathbf{H}$ 为 $\delta_2[1,1]$ 时,显然有(1) $\Pr\{x(t_1, j_1; x_0 = \delta_2^j, u_H) = \delta_2^r\} = 1, \forall r, j \in [1:2], r \neq j$, (2) $\Pr\{x(t_2, j_2; x_0 = \delta_2^r, u_H) = \delta_2^r\} = 1, \forall r \in [1:2]$, 从而可知该网络是以概率1有限时间反馈能控的。

再回到例3,已知该例中的网络是渐近反馈能控的,但对于任意给定的反馈增益矩阵 $\mathbf{H}$, 都不存在一个控制序列 u_H 使得网络从状态 $x_0 = \delta_2^1$ 出发在有限时间内以概率1到达 $x_d = \delta_2^2$, 这就表明该网络并不是以概率1有限时间反馈能控的。因此,网络的渐近反馈能控性与有限时间反馈能控性之间也不存在蕴含关系。最后,针对随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)再来验证一下它的渐近反馈能控性与渐近能控性之间的关系。

命题5 若随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)是渐近能控的,那么网络也是渐近反馈能控的。

证 假设随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)是渐近能控的。为了确保网络的前向完备性,显然有 $(P_f)^{2^n} = \mathbf{0}$ 成立。因此只需证明定理2中的条件(2),(3)成立。由定义7可知,对于任意的 $x_0 \in \Delta_{2^n}$, 都存在一个控制序列 u^* 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr\{x(t_k, j_k; x_0, u^*) = \delta_{2^n}^r\} = 1$, 式中 $\delta_{2^n}^r \in \Delta_{2^n} \setminus J$ 。从而存在一个整数 $K \geq 0$ 使得

$$\Pr\{x(t_k, j_k; x_0, u^*) \in \delta_{2^n}^r\} < \theta, \forall k \geq K, \quad (10)$$

对于任意的 $\theta > 0$ 都成立。此时假设对于任意的 $\delta_{2^n}^r \in \Delta_{2^n} \setminus J$, 都不存在一个正整数 $q \in [1:2^m]$ 使得 $[P^{u^q}]_{r,r} = 1$ 。对于任意的控制输入 $u^+ \in \Delta_{2^m}$ 都有

$$\Pr\{x(t_1, j_1; \delta_{2^n}^r, u^+) \in \delta_{2^n}^r\} > 0, \quad (11)$$

结合(11)式,对于任意的 $k \geq K$ 有 $\Pr\{x(t_{k+1}, j_{k+1}; x_0, u^*) \in \delta_{2^n}^r\} \geq \Pr\{x(t_k, j_k; x_0, u^*) = \delta_{2^n}^r\} \cdot \Pr\{x(t_1, j_1; \delta_{2^n}^r, u^+) \in \delta_{2^n}^r\} > (1 - \theta) \cdot \Pr\{x(t_1, j_1; \delta_{2^n}^r, u^+) \in \delta_{2^n}^r\} > 0$ 。

显然,这与(10)式相矛盾。从而可知,对于任意的 $\delta_{2^n}^r \in \Delta_{2^n} \setminus J$, 都存在一个正整数 $q \in [1:2^m]$ 使得 $[P^{u^q}]_{r,r} = 1$, 即定理2中的条件(2)是成立的。

由引理5可得,条件(3)也等价于,对于任意的 $\delta_{2^n}^j \in \Delta_{2^n}$, 始终存在一条从状态 $\delta_{2^n}^j$ 到 $\delta_{2^n}^r \in \Delta_{2^n} \setminus J$ 长度为 $s \in [1:2^n - 1]$ 的允许路径。假设从状态 $\delta_{2^n}^j$ 到 $\delta_{2^n}^r$ 的允许路径并不存在。对于任意的控制序列 u , 都有 $\Pr\{x(t_k, j_k; \delta_{2^n}^j, u) = \delta_{2^n}^r\} = 0, \forall k \geq 0$ 。

这显然与随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)是渐近能控的相矛盾,所以这样的允许路径是存在的,即定理2中的条件(3)是成立的。因此,该网络是渐近反馈能控的。证毕。

下面再通过一个例子来说明网络的渐近反馈能控性不能推导出渐近能控性。

例4 考察具有2个状态节点和1个输入节点的随机状态触发脉冲布尔控制网络(3),已知 $L = \delta_4[2,1,3,2,1,3,2,1]$, $G = \delta_4[2,1,3,3]$, 步进子集 $S = \{\delta_4^1, \delta_4^2, \delta_4^3, \delta_4^4\}$, 跳变子集 $J = \{\delta_4^2, \delta_4^4\}$, $p_2 = p_4 = 0.5$ 。它的状态转移如图3所示。

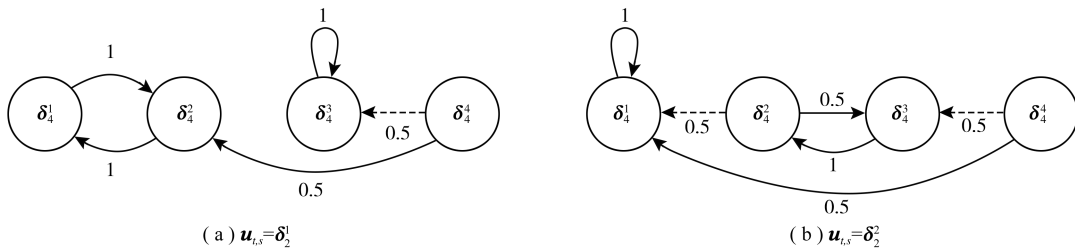


图3 例4中网络在不同控制输入下的状态转移图

然后计算可得 $S \cap J = \{\delta_4^2, \delta_4^4\}$, $S \setminus J = \{\delta_4^1, \delta_4^3\}$, $J \setminus S = \emptyset$, $(P_f)^4 = \mathbf{0}$, 网络的3步可达性矩阵为

$$\mathbf{R}(3) = \begin{bmatrix} 7.5 & 7.5 & 4.5 & 5.25 \\ 5 & 4 & 5 & 4.5 \\ 1.5 & 2.5 & 4.5 & 4.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据定理 2, 很容易验证网络是渐近反馈能控的。但另一方面, 令 $x_d = \delta_4^3$, 当 $x_0 \in \{\delta_4^1, \delta_4^2, \delta_4^4\}$ 时, 显然不存在一个控制序列 u 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr\{x(t_k, j_k; x_0, u) = x_d\} = 1$ 。

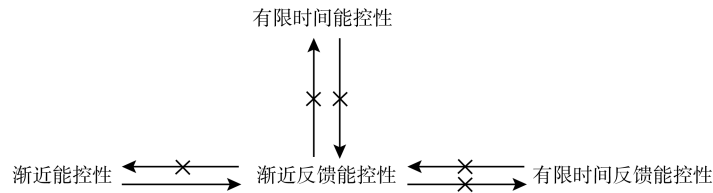


图 4 随机状态触发脉冲布尔控制网络渐近反馈能控性与其它能控性之间的关系

从而可知它不是渐近能控的, 这也表明网络的渐近反馈能控性不能推导出渐近能控性。于是, 随机状态触发脉冲布尔控制网络(3)的渐近反馈能控性与其它能控性之间的关系总结为图 4 所示。

5 数值例子

例 5 考察具有 2 个状态节点和 1 个输入节点的随机状态触发脉冲布尔控制网络(3), 已知 $L = \delta_4[1, 2, 3, 2, 3, 1, 4, 1]$, $G = \delta_4[4, 1, 1, 3]$, 步进子集 $S = \{\delta_4^1, \delta_4^2, \delta_4^3, \delta_4^4\}$, 跳变子集 $J = \{\delta_4^4\}$, $p_4 = 0.5$ 。它的状态转移如图 5 所示。

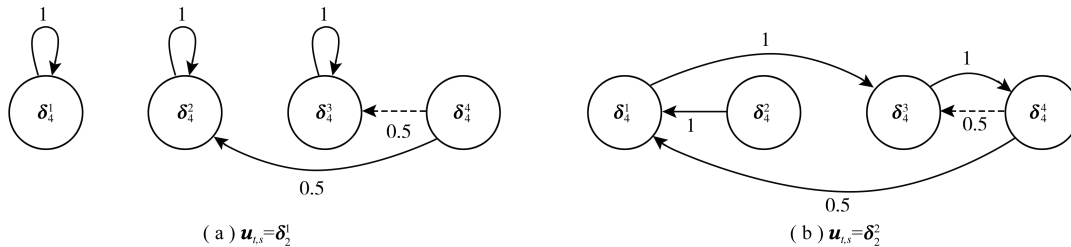


图 5 例 5 中网络在不同控制输入下的状态转移图

然后计算可得 $S \cap J = \{\delta_4^4\}$, $S \setminus J = \{\delta_4^1, \delta_4^2, \delta_4^3\}$, $J \setminus S = \emptyset$, $(P_J)^4 = 0$, 网络的 3 步可达性矩阵为

$$R(3) = \begin{bmatrix} 3.5 & 6 & 2 & 3.5 \\ 0.5 & 3 & 1.5 & 2 \\ 7 & 4 & 6.5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2.5 \end{bmatrix}。$$

根据定理 2, 该网络显然是渐近反馈能控的。实际上, 通过文献[27]中提出的状态空间分层法, 可以得到如下的反馈增益矩阵 $H_1 = \delta_2[1, 2, 2, 1/2]$, $H_2 = \delta_2[2, 1, 2, 1]$, $H_3 = \delta_2[2, 2, 1, 1/2]$, 使得对于任意的 $x_0 \in \Delta_4$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Pr\{x(t_k, j_k; x_0, u_{H_i}) = \delta_4^i\} = 1, \forall i \in [1: 3]$ 。

6 结论

本文利用混杂指标模型主要研究了随机状态触发脉冲布尔控制网络的渐近反馈能控性问题。首先, 给出了四种随机状态触发脉冲布尔控制网络的能控性定义。其次, 为避免 Zeno 现象, 引入了前向完备性的概念, 并给出了判断网络前向完备性的一个充要条件。再次, 基于最大不变子集的性质以及允许路径的定义, 推导了网络两个状态之间渐近反馈可达性的充要条件, 并通过引入可达性矩阵, 进一步得到了网络特定状态渐近反馈可达性以及网络渐近反馈能控性的充要条件。最后, 还结合例子讨论了渐近反馈能控性与其它能控性之间的关系, 通过一个例子验证了本文理论结果的准确性与有效性。

参 考 文 献

- [1] Kauffman S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. Journal of Theoretical Biology, 1969, 22(3): 437-467.
- [2] Cheng D Z. Semi-tensor product of matrices and its application to Morgen's problem[J]. Science China: Information Sciences, 2001, 44(3): 195-212.

- [3] Fornasini E, Valcher M E. Observability, reconstructibility and state observers of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 58(6): 1390-1401.
- [4] Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q, et al. Stability and stabilization of Boolean networks[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(2): 134-156.
- [5] Liu Y, Cao J D, Sun L J, et al. Sampled-data state feedback stabilization of Boolean control networks[J]. Neural Computation, 2016, 28(4): 778-799.
- [6] Acernese A, Yerudkar A, Glielmo L, et al. Reinforcement learning approach to feedback stabilization problem of probabilistic Boolean control networks[J]. IEEE Control Systems Letters, 2020, 5(1): 337-342.
- [7] Li F F, Tang Y. Set stabilization for switched Boolean control networks[J]. Automatica, 2017, 78: 223-230.
- [8] Lin L, Cao J D, Lu G P, et al. Set stabilization of Boolean control networks with impulsive effects: An event-triggered approach[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2019, 67(7): 1244-1248.
- [9] Li B W, Liu Y, Kou K I, et al. Event-triggered control for the disturbance decoupling problem of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 48(9): 2764-2769.
- [10] Li R, Chu T G. Complete synchronization of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(5): 840-846.
- [11] 张安国, 李露露, 黄迟, 等. 基于输出反馈的时滞布尔网络的输出跟踪[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2022, 35(1): 1-8.
- [12] Cheng D Z, Qi H S. Controllability and observability of Boolean control networks[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1659-1667.
- [13] Zhao Y, Qi H S, Cheng D Z. Input-state incidence matrix of Boolean control networks and its applications[J]. Systems & Control Letters, 2010, 59(12): 767-774.
- [14] Laschov D, Margaliot M. Controllability of Boolean control networks via the Perron-Frobenius theory[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1218-1223.
- [15] Lu J Q, Zhong J, Huang C, et al. On pinning controllability of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 61(6): 1658-1663.
- [16] Chen L N, Wang R Q, Kobayashi T J, et al. Dynamics of gene regulatory networks with cell division cycle[J]. Physical Review E, 2004, 70(1): 011909.
- [17] Li F F, Sun J T. Stability and stabilization of Boolean networks with impulsive effects[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(1): 1-5.
- [18] Li F F, Sun J T. Observability analysis of Boolean control networks with impulsive effects[J]. IET Control Theory & Applications, 2011, 5(14): 1609-1616.
- [19] Zhong J, Lu J Q, Huang T W, et al. Synchronization of master-slave Boolean networks with impulsive effects: Necessary and sufficient criteria[J]. Neurocomputing, 2014, 143: 269-274.
- [20] Chen H, Li X D, Sun J T. Stabilization, controllability and optimal control of Boolean networks with impulsive effects and state constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 60(3): 806-811.
- [21] Liu Y, Chen H W, Wu B. Controllability of Boolean control networks with impulsive effects and forbidden states[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2014, 37(1): 1-9.
- [22] Guo Y Q, Shen Y W, Gui W H. Stability analysis of state-triggered impulsive Boolean networks based on a hybrid index model[J]. Asian Journal of Control, 2019, 21(6): 2624-2633.
- [23] Shen Y W, Guo Y Q, Gui W H. Stability of Boolean networks with state-dependent random impulses[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2021, 22(2): 222-231.
- [24] Li R, Yang M, Chu T G. State feedback stabilization for Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(7): 1853-1857.
- [25] Li R, Yang M, Chu T G. State feedback stabilization for probabilistic Boolean networks[J]. Automatica, 2014, 50(4): 1272-1278.
- [26] 李睿, 杨萌, 楚天广. 概率布尔网络的集合镇定控制[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(3): 371-380.
- [27] Zhou R P, Guo Y Q, Wu Y H, et al. Asymptotical feedback set stabilization of probabilistic Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, 31(11): 4524-4537.
- [28] 冯俊娥, 李怡靓, 赵建立. 四种半张量积及其代数关系[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2020, 33(4): 1-7.
- [29] Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q. Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach[M]. London: Springer, 2011.
- [30] 程代展, 夏元清, 马宏宾, 等. 矩阵代数、控制与博弈[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2016.
- [31] Xu X J, Li H T, Li Y L, et al. Output tracking control of Boolean control networks with impulsive effects[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2018, 41(4): 1554-1564.
- [32] Lin L, Cao J D, Zhu S Y, et al. Sampled-data set stabilization of impulsive Boolean networks based on a hybrid index model[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2020, 7(4): 1859-1869.
- [33] Guo Y Q, Zhou R P, Wu Y H, et al. Stability and set stability in distribution of probabilistic Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(2): 736-742.

(责任编辑:刘庆松)