

文章编号 1672-6634(2022)06-0011-08

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2022040005

基于矩阵半张量积求解分裂四元数矩阵方程

袁沂蒙,李莹,刘志红,樊学玲

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘要 研究分裂四元数矩阵方程的箭形 Hermitian 解。首先,利用矩阵半张量积提出了分裂四元数的实表示方法,将分裂四元数矩阵方程转化为实矩阵方程,然后,根据解的特殊结构,利用 H-表示方法提取其有效元素,降低问题的复杂度,给出了四元数矩阵方程存在箭形 Hermitian 解的充分必要条件及通解表达式,并给出相应的算法,最后利用数值算例验证了算法的有效性。

关键词 分裂四元数矩阵方程;箭型矩阵;矩阵半张量积;实表示方法;H-表示方法

中图分类号 O151.21

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Solving Split Quaternion Matrix Equation Based on Semi-Tensor Product of Matrices

XI Yimeng, LI Ying, LIU Zhihong, FAN Xueling

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract In this paper, we study the arrow Hermitian solution of split quaternion matrix equation. Firstly, the split quaternion matrix equation is transformed into a real matrix equation by using real representation method based on semi-tensor product of matrices. Then, according to the special structure of the solution, the effective elements are extracted by the H-representation method to reduce the complexity of the problem, the expression of the general solution and the necessary and sufficient conditions for the existence of arrow Hermitian solution of the split quaternion matrix equation are given, and the corresponding algorithm is given. Numerical examples are used to illustrate the effectiveness of the algorithm.

Key words split quaternion matrix equation; arrow matrix; semi-tensor product of matrices; real representation method; H-representation method

0 引言

本文所使用的符号, $\mathbf{R}/\mathbf{SQ}$:实数集合/分裂四元数集合, $\mathbf{R}^m$: m 维实列向量集合, $\mathbf{R}^{n \times n}/\mathbf{SQ}^{n \times n}$: $n \times n$ 阶实矩阵集合/分裂四元数矩阵集合, $\mathbf{X}_H^{n \times n}$: $n \times n$ 阶分裂四元数箭形 Hermitian 矩阵集合, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$: 矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的 Kronecker 积, $\triangleright$: 矩阵半张量积, $\mathbf{A}^\dagger/\mathbf{A}^\top$: $\mathbf{A}$ 的 Moore-Penrose 逆/转置, $\mathbf{I}_n$: n 阶单位矩阵, $\mathbf{V}_c(\mathbf{X})$: 对矩阵 $\mathbf{X}$ 按列拉直, δ_n^i : 单位矩阵 $\mathbf{I}_n$ 的第 i 列。

收稿日期:2022-04-05

基金项目:国家自然科学基金项目(62176112);山东省自然科学基金项目(ZR2020MA053)资助

通讯作者:李莹,女,汉族,博士,教授,研究方向:线性系统理论,E-mail:liyings@lccu.edu.cn。

众所周知,矩阵方程被广泛应用于计算机科学、量子物理、统计、控制理论、信号与彩色图像处理、自动控制等诸多领域^[1-6]。因而,矩阵方程是矩阵理论及计算中非常重要的研究课题。许多学者对矩阵方程进行了深入的研究:Gong 研究了实数域上子矩阵约束下矩阵方程 $A^T X A = B$ 的实矩阵解及其最佳逼近^[7];Zhang 研究了复矩阵方程 $AXB + CXD = E$ 的极小范数 Hermitian 解^[8];Yuan 利用四元数矩阵的复表示研究了四元数矩阵方程 $AX = B$ 的几类特殊的极小范数最小二乘解,并将极小范数纯虚最小二乘解应用到彩色图像处理中^[9]。本文考虑了较上述几类矩阵方程更一般形式的分裂四元数方程

$$A_1 X_1 + B_1 X_2 + C_3 X_3 D_3 + C_4 X_4 D_4 = E. \quad (1)$$

分裂四元数作为一类特殊的四元数,于 1849 年由 James Cockle 提出。分裂四元数及其矩阵理论因其在物理应用和数学研究中占有重要地位而得到学者们的广泛研究。在物理上,分裂四元数为解决量子力学、量子场论、空间几何学等提供了新的研究工具^[10];在数学上,分裂四元数是对复数的一种推广,是 Clifford algebra 的重要组成部分^[11]。分裂四元数 x 和分裂四元数矩阵 X 有以下形式:

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k, x_t \in \mathbf{R}, (t=1,2,3,4),$$

$$X = X_1 + X_2 i + X_3 j + X_4 k, X_t \in SQ^{n \times n}, (t=1,2,3,4),$$

式中 i, j, k 满足 $i^2 = -j^2 = -k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = -i, ki = -ik = j$ 。分裂四元数矩阵在实际应用中用途广泛,使得分裂四元数矩阵方程的求解问题得到学者们的关注,例如, Liu 利用实表示研究了分裂四元数矩阵方程 $AX = B$ 的解^[12];Yuan 利用复表示给出分裂四元数矩阵方程 $AXB + CXD = E$ 存在 Hermitian 解的必要条件及通解表达式^[13]。

矩阵半张量积作为一种新的矩阵乘法,突破了普通矩阵乘法受维数限制的壁垒,同时保留了普通矩阵乘法的重要性质^[14],这使其应用越来越广泛,在代数方面,向量场、线性多元映射的泰勒展式、有限维代数和函数等运算都可通过矩阵半张量积进行^[15-18],同时矩阵半张量积作为一个简单方便的数学工具,在布尔网络、有限博弈、非线性鲁棒稳定控制、系统控制器设计、有限值动态系统分析、模糊逻辑、模糊关系模型、数据挖掘等领域中有重要的应用^[19-26]。本文借助矩阵半张量积给出分裂四元数的一种实表示方法,并以此表示方法和 H-表示方法为工具研究了分裂四元数矩阵方程(1)的箭型 Hermitian 解问题。

文章内容安排如下:第二部分利用矩阵半张量积提出分裂四元数的实表示;第三部分给出实箭型对称矩阵/实箭型反对称矩阵的 H-表示;第四部分给出分裂四元数矩阵方程(1)存在箭型 Hermitian 解的充要条件及通解表达式;第五部分给出问题的数值算法并利用数值例子检验上述算法的有效性;最后对结论进行了总结。

1 基于矩阵半张量积的分裂四元数实表示

本节首先介绍矩阵半张量积的相关内容。

定义 1^[27] 设 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}, B \in \mathbf{R}^{p \times q}$, 则矩阵半张量积定义为 $A \bowtie B = (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p})$, 式中 $t = lcm(n, p)$ 表示 n 和 p 的最小公倍数,当 $n = p$ 时即为普通矩阵乘法。

定义 2^[27] 设 $W_i (i=0,1,\dots,n)$ 为一组向量空间,映射 $F: \Pi_{i=1}^n W_i \rightarrow W_0$ 称为多线性映射,如果对任意 $1 \leq i \leq n, x_i, y_i \in W_i, (1 \leq i \leq n), \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ 有 $F(x_1, \dots, \alpha x_i + \beta y_i, \dots, x_n) = \alpha F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \beta F(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$ 。若 $\dim(W_i) = k_i, (i=0,1,\dots,n), W_i$ 的基底为 $(\delta_{k_i}^1, \delta_{k_i}^2, \dots, \delta_{k_i}^{k_i})$ 记

$$F(\delta_{k_1}^{j_1}, \delta_{k_2}^{j_2}, \dots, \delta_{k_n}^{j_n}) = \sum_{s=1}^{k_0} c_s^{j_1, j_2, \dots, j_n} \delta_{k_0}^s, j_t = 1, \dots, k_t, t = 1, \dots, n,$$

那么

$$\{c_s^{j_1, j_2, \dots, j_n} \mid j_t = 1, \dots, k_t, t = 1, \dots, n; s = 1, \dots, k_0\},$$

称为 F 的结构常数,矩阵 $\mathbf{M}_F$ 称为 F 的结构矩阵

$$\mathbf{M}_F = \begin{bmatrix} c_1^{11\dots 1} & \dots & c_1^{11\dots k_n} & \dots & c_1^{k_1 k_2 \dots k_n} \\ c_2^{11\dots 1} & \dots & c_2^{11\dots k_n} & \dots & c_2^{k_1 k_2 \dots k_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{k_0}^{11\dots 1} & \dots & c_{k_0}^{11\dots k_n} & \dots & c_{k_0}^{k_1 k_2 \dots k_n} \end{bmatrix} \circ$$

将分裂四元数的基底向量化,即 $1 \sim \delta_1^1, i \sim \delta_2^1, j \sim \delta_3^1, k \sim \delta_4^1$, 根据定义 1 可以得到分裂四元数乘法的结构矩阵

$$\mathbf{M}_{SQ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ$$

利用分裂四元数乘法的结构矩阵,我们给出分裂四元数的一种等价的实表示矩阵形式。

定义 3 设 $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \in SQ, q_t \in \mathbf{R} (t=1,2,3,4)$, q 的基于矩阵半张量积的实表示矩阵定义如

$$q^{\mathbf{R}} = \mathbf{M}_{SQ} \triangleright \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & q_3 & q_4 \\ q_2 & q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix} \circ$$

按照分裂四元数的实表示矩阵,相仿地,给出分裂四元数矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 的实表示矩阵

$$\mathbf{A}^{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_4 & -\mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_4 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{4m \times 4n},$$

不难看出, $\mathbf{A}^{\mathbf{R}}$ 可以由其任意一列块表示,这里将第一列块记为

$$\mathbf{A}_c^{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \circ$$

下面给出上述定义的分裂四元数矩阵实表示矩阵的性质。

引理 1^[28] 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in SQ^{m \times n}, \mathbf{C} \in SQ^{n \times s}, k \in \mathbf{R}$, 则

$$(a) \mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{R}} = \mathbf{B}^{\mathbf{R}},$$

$$(b) (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathbf{R}} = \mathbf{A}^{\mathbf{R}} + \mathbf{B}^{\mathbf{R}}, (k\mathbf{A})^{\mathbf{R}} = k\mathbf{A}^{\mathbf{R}}, (\mathbf{AC})^{\mathbf{R}} = \mathbf{A}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^{\mathbf{R}}.$$

定理 1 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in SQ^{m \times n}, \mathbf{C} \in SQ^{n \times s}, k \in \mathbf{R}$, 则

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_c^{\mathbf{R}} = \mathbf{A}_c^{\mathbf{R}} + \mathbf{B}_c^{\mathbf{R}}, (k\mathbf{A})_c^{\mathbf{R}} = k\mathbf{A}_c^{\mathbf{R}}, (\mathbf{AC})_c^{\mathbf{R}} = \mathbf{A}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}_c^{\mathbf{R}}.$$

证明 我们仅证明定理中的 $(\mathbf{AC})_c^{\mathbf{R}} = \mathbf{A}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}_c^{\mathbf{R}}$, 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{AC} &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 i + \mathbf{A}_3 j + \mathbf{A}_4 k)(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 i + \mathbf{C}_3 j + \mathbf{C}_4 k) \\ &= (\mathbf{A}_1 \mathbf{C}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_3 + \mathbf{A}_4 \mathbf{C}_4) + (\mathbf{A}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_1 - \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_4 + \mathbf{A}_4 \mathbf{C}_3)i + (\mathbf{A}_1 \mathbf{C}_3 - \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_4 \\ &\quad + \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_4 \mathbf{C}_2)j + (\mathbf{A}_1 \mathbf{C}_4 + \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_3 - \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_4 \mathbf{C}_1)k, \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}_c^{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_4 & -\mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_4 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_3 + \mathbf{A}_4 \mathbf{C}_4 \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_1 - \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_4 + \mathbf{A}_4 \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_3 - \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_4 + \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_4 \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_4 + \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_3 - \mathbf{A}_3 \mathbf{C}_2 + \mathbf{A}_4 \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{AC})_c^{\mathbf{R}},$$

故 $(\mathbf{AC})_c^{\mathbf{R}} = \mathbf{A}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}_c^{\mathbf{R}}$, 得证。

将分裂四元数矩阵的实表示矩阵的与实表示矩阵第一列块按列拉直具有下述关系。

定理 2 设 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 i + \mathbf{A}_3 j + \mathbf{A}_4 k \in \mathbf{SQ}^{n \times n}$, 可得 $V_c(\mathbf{A}^{\mathbf{R}}) = \tau V_c(\mathbf{A}_c^{\mathbf{R}})$, 式中

$$\tau = \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{I}_{4n}, \mathbf{I}_{4n}, \dots, \mathbf{I}_{4n}) \\ \text{diag}(\mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_n, \dots, \mathbf{Q}_n) \\ \text{diag}(\mathbf{T}_n, \mathbf{T}_n, \dots, \mathbf{T}_n) \\ \text{diag}(\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_n, \dots, \mathbf{S}_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I}_n & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_n \\ 0 & 0 & -\mathbf{I}_n & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_n \\ 0 & 0 & -\mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_n & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

进一步, 分裂四元数实表示第一列块的按列拉直与矩阵 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ 分别按列拉直之间有下列关系。

定理 3 设 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 i + \mathbf{A}_3 j + \mathbf{A}_4 k \in \mathbf{SQ}^{n \times n}$, 则

$$V_c(\mathbf{A}_c^{\mathbf{R}}) = \Upsilon \begin{bmatrix} V_c(\mathbf{A}_1) \\ V_c(\mathbf{A}_2) \\ V_c(\mathbf{A}_3) \\ V_c(\mathbf{A}_4) \end{bmatrix},$$

式中 $\Upsilon = [\delta_{4n}^1 \otimes \mathbf{I}_n, \delta_{4n}^5 \otimes \mathbf{I}_n, \dots, \delta_{4n}^{4n-3} \otimes \mathbf{I}_n, \delta_{4n}^2 \otimes \mathbf{I}_n, \delta_{4n}^6 \otimes \mathbf{I}_n, \dots, \delta_{4n}^{4n-2} \otimes \mathbf{I}_n, \delta_{4n}^3 \otimes \mathbf{I}_n, \delta_{4n}^7 \otimes \mathbf{I}_n, \dots, \delta_{4n}^{4n-1} \otimes \mathbf{I}_n, \delta_{4n}^4 \otimes \mathbf{I}_n, \delta_{4n}^8 \otimes \mathbf{I}_n, \dots, \delta_{4n}^{4n} \otimes \mathbf{I}_n]$ 。

2 实箭型对称矩阵、实箭型反对称矩阵的 H- 表示

定义 4 [29] 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 形如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的矩阵称为箭型矩阵。

定义 5 [30] 设 $\mathbf{A}$ 为实箭型矩阵, 则

- (1) 当 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, 称 $\mathbf{A}$ 为实箭型对称矩阵, 记所有 $n \times n$ 阶实箭型对称矩阵集合为 $\mathbf{A}_{\mathbf{RS}}^{n \times n}$,
- (2) 当 $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, 称 $\mathbf{A}$ 为实箭型反对称矩阵, 记所有 $n \times n$ 阶实箭型反对称矩阵集合为 $\mathbf{A}_{\mathbf{RA}}^{n \times n}$ 。

当具有特殊结构的矩阵在按列拉成向量后, 此向量可以由矩阵中的部分元素排成的列向量进行表示, 从而可以消除矩阵中的多余元素, 降低问题的计算复杂程度, 部分元素这里被记为矩阵的有效元素。接下来对 H- 表示方法进行介绍。

定义 6^[31] 考虑 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 的一个 q 维子空间 L , 对于任意的 $\mathbf{X} = (x_{ij})_{n \times n} \in L$, 总存在一个映射 $\psi: \mathbf{X} \in L \mapsto V_c(\mathbf{X})$, 假设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_q$ 组成 L 的基, 则可以得到 $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^q x_i \mathbf{e}_i$, 定义 $H = [V_c(\mathbf{e}_1) \ V_c(\mathbf{e}_2) \ \cdots \ V_c(\mathbf{e}_q)]$, 对于任意的 $\mathbf{X} \in L$, 有 $\psi(\mathbf{X}) = H\tilde{\mathbf{X}}$, 这里 $\tilde{\mathbf{X}}$ 为矩阵 $\mathbf{X}$ 的有效元素排列成的 q 维列向量, 即 $\tilde{\mathbf{X}} = [x_1 x_2 x_3 \cdots x_q]^T$, 并且称 $H\tilde{\mathbf{X}}$ 为 $\psi(\mathbf{X})$ 的 H-表示, H 为 $\psi(\mathbf{X})$ 的 H-表示矩阵。

例 1 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{A}_{\text{RS}}^{3 \times 3}$, 选取 $\mathbf{A}$ 的一组标准基底,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = [V_c(\mathbf{e}_1) \ V_c(\mathbf{e}_2) \ \cdots \ V_c(\mathbf{e}_5)], \tilde{\mathbf{A}} = [1 \ 2 \ 5 \ 3 \ 7]^T \in \mathbf{R}^5,$$

则 $\mathbf{A}$ 的 H-表示为 $\psi(\mathbf{A}) = H\tilde{\mathbf{A}}$ 。

下面研究 $n \times n$ 阶实箭型对称矩阵、实箭形反对称矩阵的 H-表示。

定理 4 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{A}_{\text{RS}}^{n \times n}$, 选取 $\mathbf{A}$ 一组基底为 $\{\mathbf{W}_{ii}: 1 \leq i \leq n\} \cup \{\mathbf{W}_{i1}: 2 \leq i \leq n\}$, 这里 $\mathbf{W}_{ij} = (\omega_{ij})_{n \times n}$ 且满足 $\omega_{ij} = \omega_{ji} = 1$, 其余元素均为 0, $\mathbf{H}_{\text{RS}}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的 H-表示矩阵,

$$\mathbf{H}_{\text{RS}} = [V_c(\mathbf{W}_{11}) \ \cdots \ V_c(\mathbf{W}_{nn}) \ V_c(\mathbf{W}_{21}) \ \cdots \ V_c(\mathbf{W}_{n1})], \tilde{\mathbf{A}} = [a_{11}, \dots, a_{nn}, a_{21}, \dots, a_{n1}]^T,$$

$$\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{H}_{\text{RS}} \tilde{\mathbf{A}}.$$

定理 5 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{A}_{\text{RA}}^{n \times n}$, 选取 $\mathbf{A}$ 的一组基底为 $\{\mathbf{Q}_{i1}: 2 \leq i \leq n\}$, 这里 $\mathbf{Q}_{ij} = (q_{ij})_{n \times n}$ 且满足 $q_{ij} = -q_{ji} = 1$, 其余元素均为 0, $\mathbf{H}_{\text{RA}}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的 H-表示矩阵,

$$\mathbf{H}_{\text{RA}} = [V_c(\mathbf{Q}_{21}) \ \cdots \ V_c(\mathbf{Q}_{n1})], \tilde{\mathbf{A}} = [a_{21}, \dots, a_{n1}]^T,$$

$$\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{H}_{\text{RA}} \tilde{\mathbf{A}}.$$

3 分裂四元数矩阵方程的箭型 Hermitian 解

本节将给出分裂四元数矩阵方程的箭型 Hermitian 解的表达式。

设 $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4, \mathbf{E} \in \mathbf{SQ}^{n \times n}, (t=1, 2, 3, 4)$, 记

$$\mathbf{Q}_H = \{\mathbf{X}_t \in \mathbf{X}_H^{n \times n} \mid \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{X}_2 + \mathbf{C}_3 \mathbf{X}_3 \mathbf{D}_3 + \mathbf{C}_4 \mathbf{X}_4 \mathbf{D}_4 = \mathbf{E}\}.$$

定理 6 设 $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_m, \mathbf{D}_m, \mathbf{E} \in \mathbf{SQ}^{n \times n}, \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t1} + \mathbf{X}_{t2}i + \mathbf{X}_{t3}j + \mathbf{X}_{t4}k \in \mathbf{X}_H^{n \times n}, (m=3, 4, t=1, 2, 3, 4)$, 则问题中的 $\mathbf{Q}_H$ 可以记为

$$\mathbf{Q}_H = \{\mathbf{X}_t \in \mathbf{X}_H^{n \times n} \mid \mathbf{X}_S = \boldsymbol{\mu}^\dagger V_c(\mathbf{E}_c^{\mathbf{R}}) + \mathbf{Z}\mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{20n-16}\}, \quad (2)$$

式中 $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_{20n-16} - \boldsymbol{\mu}^\dagger \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} = \mathbf{G}\mathbf{S}, \mathbf{X}_S = [\overline{\mathbf{X}_1}^T \ \overline{\mathbf{X}_2}^T \ \overline{\mathbf{X}_3}^T \ \overline{\mathbf{X}_4}^T]^T, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{Y}$ 分别由定理 2, 3 给出

$$\mathbf{G} = [(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}) \ (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_1^{\mathbf{R}}) \ (\mathbf{D}_{3c}^{\mathbf{R}^T} \otimes \mathbf{C}_3^{\mathbf{R}})\boldsymbol{\tau} \ (\mathbf{D}_{4c}^{\mathbf{R}^T} \otimes \mathbf{C}_4^{\mathbf{R}})\boldsymbol{\tau}],$$

$$\overline{\mathbf{X}_t} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{X}_{t1}} \\ \widetilde{\mathbf{X}_{t2}} \\ \widetilde{\mathbf{X}_{t3}} \\ \widetilde{\mathbf{X}_{t4}} \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{YH}_H & & & \\ & \mathbf{YH}_H & & \\ & & \mathbf{YH}_H & \\ & & & \mathbf{YH}_H \end{bmatrix}, \mathbf{H}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\text{RS}} & & & \\ & \mathbf{H}_{\text{RA}} & & \\ & & \mathbf{H}_{\text{RA}} & \\ & & & \mathbf{H}_{\text{RA}} \end{bmatrix},$$

且分裂四元数矩阵方程(1)的唯一分裂四元数箭型 Hermitian 解满足

$$[\overline{\mathbf{X}_1}^T \quad \overline{\mathbf{X}_2}^T \quad \overline{\mathbf{X}_3}^T \quad \overline{\mathbf{X}_4}^T]^T = \boldsymbol{\mu}^\dagger V_c(\mathbf{E}_c^R). \quad (3)$$

证明 由定理 1,2 可以得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{X}_2 + \mathbf{C}_3 \mathbf{X}_3 \mathbf{D}_3 + \mathbf{C}_4 \mathbf{X}_4 \mathbf{D}_4 = \mathbf{E} \\ & \Leftrightarrow \mathbf{A}_1^R \mathbf{X}_{1c}^R + \mathbf{B}_1^R \mathbf{X}_{2c}^R + \mathbf{C}_3^R \mathbf{X}_3^R \mathbf{D}_{3c}^R + \mathbf{C}_4^R \mathbf{X}_4^R \mathbf{D}_{4c}^R = \mathbf{E}_c^R \\ & \Leftrightarrow [\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}_1^R] V_c(\mathbf{X}_{1c}^R) + [\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_1^R] V_c(\mathbf{X}_{2c}^R) + [\mathbf{D}_{3c}^{R^T} \otimes \mathbf{C}_3^R] V_c(\mathbf{X}_3^R) + [\mathbf{D}_{4c}^{R^T} \otimes \mathbf{C}_4^R] V_c(\mathbf{X}_4^R) = V_c(\mathbf{E}_c^R) \\ & \Leftrightarrow [[\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}_1^R] [\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}_1^R] [\mathbf{D}_{3c}^{R^T} \otimes \mathbf{C}_3^R] \boldsymbol{\tau} [\mathbf{D}_{4c}^{R^T} \otimes \mathbf{C}_4^R] \boldsymbol{\tau}] \begin{bmatrix} V_c(\mathbf{X}_{1c}^R) \\ V_c(\mathbf{X}_{2c}^R) \\ V_c(\mathbf{X}_{3c}^R) \\ V_c(\mathbf{X}_{4c}^R) \end{bmatrix} = V_c(\mathbf{E}_c^R) \\ & \Leftrightarrow \mathbf{G} \begin{bmatrix} V_c(\mathbf{X}_{1c}^R) \\ V_c(\mathbf{X}_{2c}^R) \\ V_c(\mathbf{X}_{3c}^R) \\ V_c(\mathbf{X}_{4c}^R) \end{bmatrix} = V_c(\mathbf{E}_c^R). \end{aligned}$$

又因为 $\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t1} + \mathbf{X}_{t2}i + \mathbf{X}_{t3}j + \mathbf{X}_{t4}k \in \mathbf{X}_H^{n \times n}$, ($t=1,2,3,4$), 借助 H-表示, 可以得到

$$\begin{aligned} V_c(\mathbf{X}_{tc}^R) = \Upsilon \begin{bmatrix} V_c(\mathbf{X}_{t1}) \\ V_c(\mathbf{X}_{t2}) \\ V_c(\mathbf{X}_{t3}) \\ V_c(\mathbf{X}_{t4}) \end{bmatrix} &= \Upsilon \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{RS} & & & \\ & \mathbf{H}_{RA} & & \\ & & \mathbf{H}_{RA} & \\ & & & \mathbf{H}_{RA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{X}}_{t1} \\ \widetilde{\mathbf{X}}_{t2} \\ \widetilde{\mathbf{X}}_{t3} \\ \widetilde{\mathbf{X}}_{t4} \end{bmatrix} = \Upsilon \mathbf{H}_H \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{X}}_{t1} \\ \widetilde{\mathbf{X}}_{t2} \\ \widetilde{\mathbf{X}}_{t3} \\ \widetilde{\mathbf{X}}_{t4} \end{bmatrix} = \Upsilon \mathbf{H}_H \overline{\mathbf{X}_t}, \text{ 因此} \\ \mathbf{G} \begin{bmatrix} V_c(\mathbf{X}_{1c}^R) \\ V_c(\mathbf{X}_{2c}^R) \\ V_c(\mathbf{X}_{3c}^R) \\ V_c(\mathbf{X}_{4c}^R) \end{bmatrix} &= V_c(\mathbf{E}_c^R) \Leftrightarrow \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{YH}_H \overline{\mathbf{X}_1} \\ \mathbf{YH}_H \overline{\mathbf{X}_2} \\ \mathbf{YH}_H \overline{\mathbf{X}_3} \\ \mathbf{YH}_H \overline{\mathbf{X}_4} \end{bmatrix} = V_c(\mathbf{E}_c^R) \Leftrightarrow \mathbf{GS} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{X}_1} \\ \overline{\mathbf{X}_2} \\ \overline{\mathbf{X}_3} \\ \overline{\mathbf{X}_4} \end{bmatrix} = V_c(\mathbf{E}_c^R) \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{\mu} \mathbf{X}_S = V_c(\mathbf{E}_c^R). \end{aligned}$$

对于实矩阵方程 $\boldsymbol{\mu} \mathbf{X}_S = V_c(\mathbf{E}_c^R)$, 根据实矩阵方程的经典结论^[32], 我们可以得到 $\mathbf{X}_S = \boldsymbol{\mu}^\dagger V_c(\mathbf{E}_c^R) + \mathbf{Zy}$,

$\forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{20n-16}$, 故分裂四元数矩阵方程(1)存在唯一 Hermitian 解, 满足 $[\overline{\mathbf{X}_1}^T \quad \overline{\mathbf{X}_2}^T \quad \overline{\mathbf{X}_3}^T \quad \overline{\mathbf{X}_4}^T]^T = \boldsymbol{\mu}^\dagger V_c(\mathbf{E}_c^R)$, 式子(2),(3)得证。

推论 1 设 $\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t1} + \mathbf{X}_{t2}i + \mathbf{X}_{t3}j + \mathbf{X}_{t4}k \in \mathbf{X}_H^{n \times n}$, $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_m, \mathbf{D}_m, \mathbf{E} \in \mathbf{SQ}^{n \times n}$, ($m=3,4$), ($t=1,2,3,4$), 则分裂四元数矩阵方程(1)有解的充要条件是

$$(\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^\dagger - \mathbf{I}_{4n^2}) V_c(\mathbf{E}_c^R) = \mathbf{0},$$

式中 $\boldsymbol{\mu}$ 在定理 6 中给出。

证明 由定理 6 的证明过程可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{X}_2 + \mathbf{C}_3 \mathbf{X}_3 \mathbf{D}_3 + \mathbf{C}_4 \mathbf{X}_4 \mathbf{D}_4 \Leftrightarrow V_c(\mathbf{E}_c^R) = \boldsymbol{\mu} \mathbf{X}_S \\ &\Leftrightarrow V_c(\mathbf{E}_c^R) = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^\dagger \boldsymbol{\mu} \mathbf{X}_S \Leftrightarrow V_c(\mathbf{E}_c^R) = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^\dagger V_c(\mathbf{E}_c^R) \\ &\Leftrightarrow (\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^\dagger - \mathbf{I}_{4n^2}) V_c(\mathbf{E}_c^R) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

推论1得证。

4 算法和算例

本节将利用第三节的结论给出相应的算法,并通过数值算例检验方法的有效性。

算法 (1) 输入 $A_1, B_1, C_m, D_m, E \in SQ^{n \times n}, (m=3,4), H_{RS}, H_{RA}$; (2) 计算 $A_1^R, B_1^R, C_3^R, C_4^R, D_{3c}^R, D_{4c}^R, E_c^R, G, S, H_H, \mu$; (3) 根据公式(3), 输出分裂四元数矩阵方程(1)的唯一箭型 Hermitian 解。

算例1 在 Matlab 中随机生成分裂四元数矩阵 $A_1, B_1, C_m, D_m \in SQ^{n \times n}, (m=3,4), (n=2K, K=1:15)$ 根据分裂四元数箭型 Hermitian 矩阵的结构特点, 生成 $\hat{X}_t \in X_H^{n \times n}$, 计算 $E = A_1 \hat{X}_1 + B_1 \hat{X}_2 + C_3 \hat{X}_3 D_3 + C_4 \hat{X}_4 D_4$, 利用算法得到 $A_1 X_1 + B_1 X_2 + C_3 X_3 D_3 + C_4 X_4 D_4 = E$ 的数值解 $X_t (t=1,2,3,4)$, 并代入分裂四元数矩阵方程(1)检验, 得到误差如图1所示, 说明此方法有效。

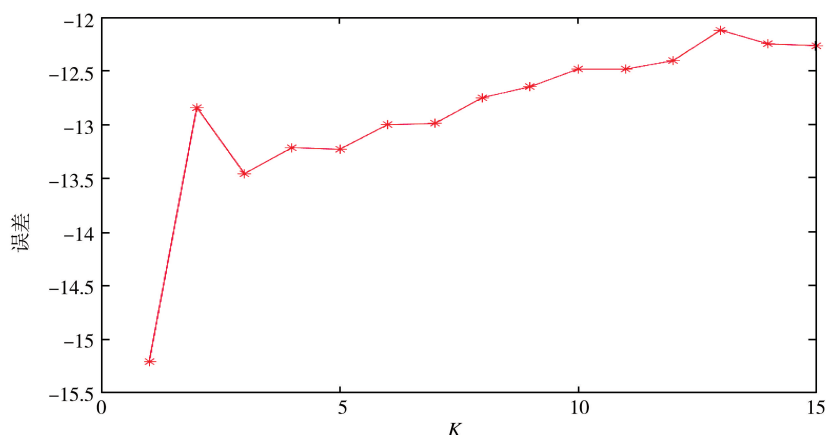


图1 算法误差

5 结论

本文研究了分裂四元数矩阵方程(1)的箭型 Hermitian 解, 利用矩阵半张量积, 得到了分裂四元数矩阵的一种实表示方法, 并与 H-表示方法相结合, 将分裂四元数矩阵方程问题转化为无约束的实矩阵方程问题, 最后给出相应的数值算法, 并利用数值例子检验了此方法的有效性。

参 考 文 献

- [1] 陈岩, 林中朝, 张玉. 基于超级计算机的矩量法性能分析与优化[J]. 微波学报, 2017, 33(3): 1-5.
- [2] 卢道明. 原子与库场相互作用系统中密度矩阵主方程的解[J]. 激光与光电子学进展, 2016, 53(9): 256-261.
- [3] 王璐, 夏吾才让. 改进的梯度神经网络求解源于 Lyapunov 矩阵方程的一类方程[J]. 西北民族大学学报(自然科学版), 2020, 41(3): 79-83.
- [4] 蔡昭权, 王国胜, 单东升. 振动二阶 Sylvester 矩阵方程鲁棒解法及仿真分析[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(2): 443-447.
- [5] SANGWINE S J. Fourier transforms of colour images using quaternion or hypercomplex numbers[J]. Electronics Letters, 1996, 32(21): 1979-1980.
- [6] 段广仁, 刘湘黔. 线性时滞系统时滞独立稳定的充分条件[J]. 控制与决策, 1996(3): 420-424.
- [7] 龚丽莎, 胡锡炎, 张磊. 子矩阵约束下矩阵方程 $A^T X A = B$ 的实矩阵解及其最佳逼近[J]. 工程数学学报, 2007(5): 913-918.
- [8] ZHANG F X, WEI M S, LI Y, et al. The minimal norm least squares Hermitian solution of the complex matrix equation $AXB + CXD = E$, $AXB + CXD = E$ [J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(3): 1296-1310.
- [9] YUAN S F, WANG Q W, DUAN X F. On solutions of the quaternion matrix equation $AX = B$ and their applications in color image resto-

- ration[J].Applied Mathematics and Computation,2013,221:10-20.
- [10] 倪秋莹.分裂四元数及分裂四元数矩阵性质的研究[D].北京:北京邮电大学,2020.
- [11] 武秀美,李诚举,姜同松.分裂四元数环上的代数结构[J].数学的实践与认识,2018,48(21):297-301.
- [12] LIU X,HE Z H.On the split quaternion matrix equation $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ [J].Banach Journal of Mathematical Analysis,2020,14:228-248.
- [13] YUAN S F,WANG Q W,YU Y B,et al.On hermitian solutions of the split quaternion matrix equation $\mathbf{AXB}+\mathbf{CXD}=\mathbf{E},\mathbf{AXB}+\mathbf{CXD}=\mathbf{E}$ [J].Advances in Applied Clifford Algebras,2017,27(2):1-18.
- [14] 王瑾.矩阵半张量积在代数结构上的应用[D].山东:山东大学,2021.
- [15] 程代展,齐洪胜.矩阵半张量积的基本原理与适用领域[J].系统科学与数学,2012,32(12):1488-1496.
- [16] 韦安丽,李莹,赵建立,等.矩阵半张量积在求解四元数线性系统中的应用[J].华中师范大学学报(自然科学版),2021,12(8):1-9.
- [17] 程代展,齐洪胜,刘挺,等.从矩阵半张量积到逻辑控制系统[J].中国科学:数学,2016,46(10):1401-1424.
- [18] 陈敏,李小朝.基于半张量积的半李代数研究[J].模糊系统与数学,2021,35(3):26-32.
- [19] 程代展,齐洪胜,赵寅.布尔网络的分析与控制—矩阵半张量积方法[J].自动化学报,2011,37(5):529-540.
- [20] 程代展,刘挺,王元华.博弈论中的矩阵方法[J].系统科学与数学,2014,34(11):1291-1305.
- [21] 牛永肖,丁宝苍,孙鹤旭.输入非线性系统的两步法预测控制的鲁棒稳定性[J].控制与决策,2006(4):457-461.
- [22] GUO P,ZHANG H,ALSAADI F E,et al.Semi-tensor product method to a class of event-triggered control for finite evolutionary networked games[J].IET Control Theory & Applications,2017,11(13):2140-2145.
- [23] 李海涛,李雅璐,王淑玲,等.有限值动态系统的分析与控制研究进展[J].山东师范大学学报(自然科学版),2019,34(4):379-392.
- [24] 葛爱冬,王玉振,魏爱荣.基于矩阵半张量积方法的随机模糊系统控制器设计[J].山东大学学报(工学版),2013,43(3):30-37.
- [25] FAN H,FENG J,MENG M,et al.General decomposition of fuzzy relations;Semi-tensor product approach[J].Fuzzy Sets and Systems,2020,384:75-90.
- [26] 罗纯,张应山.多边矩阵的剖面广义交叉乘法和半张量积及其数据挖掘[J].应用技术学报,2018,18(4):360-365.
- [27] 程代展,夏元清,马宏宾,等.矩阵代数、控制与博弈[M].北京:北京理工大学出版社,2016.
- [28] 孔祥强.分裂四元数矩阵的实表示与特征值[J].内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版),2019,48(2):112-116.
- [29] 吴恒飞,张宗标.爪形矩阵约束四元数矩阵方程 $\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$ 的求解[J].西昌学院学报(自然科学版),2021,35(1):58-61.
- [30] 臧正松.对称矩阵与反对称矩阵广义特征值反问题拓广[J].数学研究,2006(1):61-67.
- [31] 盛立,高明,张维海.基于 H 表示的时变随机 Markov 跳跃系统的能观性[J].控制与决策,2015,30(1):181-184.
- [32] 戴华.矩阵论[M].北京:北京科学出版社,2001.

(责任编辑:周相泉)