

文章编号 1672-6634(2024)05-0018-11

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2024010009

线性时变时滞切换系统的区间指数稳定/镇定

戴玉真, 张化生

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 研究了线性时变时滞切换系统的区间指数稳定与镇定问题, 重点研究了收敛速度的反映与调整。首先, 基于系统矩阵与线性时变时滞切换系统稳定性的关系, 提出区间指数稳定性的定义。基于平均驻留时间法, 给出了区间指数稳定性的一个新判据。然后, 通过新的控制器设计方法, 使控制器既能保证系统指数稳定又能约束系统的收敛速度。最后, 通过数值算例和RLC电路验证了所提方法的有效性。

关键词 收敛速度约束; 区间指数稳定; 线性时变时滞切换系统; 任意切换; 区间指数镇定

中图分类号 O231

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Interval Exponential Stability/Stabilization for Linear Time-Varying Delay Switched Systems

DAI Yuzhen, ZHANG Huasheng

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract The problem of the interval exponential stability and stabilization for linear switched time-varying delay systems is examined, which is focus on the reflection and adjustment of convergence rates. Firstly, based on the relationship between system matrices and linear time-varying delay switched systems stability, the definition of interval exponential stability is proposed. A new criterion for the stability of the interval exponential based on the average dwell time method is provided. Then, by the new controller design method, the controller can not only ensure exponential stabilization but also constrain the convergence rate of the system. Finally, the validation of the mentioned method is checked by two examples.

Key words convergent speed constraints; interval exponential stability; linear time-varying delay switched systems; arbitrary switching signal; interval exponential stabilization

0 引言

切换系统是混杂系统的一个基本子类, 通常由切换律建模的动态子系统组成, 依赖于时间、状态或其他

收稿日期: 2024-01-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(62373178); 山东省自然科学基金项目(ZR2022MF293)资助

通信作者: 张化生, 男, 汉族, 博士, 副教授, 研究方向: 随机系统高阶矩稳定性分析与精确控制、时滞系统区域稳定性与精确控制、滑模控制、非线性系统自适应控制等, E-mail: zhsh0510@163.com。

外部逻辑规则。由于其强大的动态过程建模能力,切换系统可以应用于现实的许多方面。近年来,实际工程越来越依赖于切换策略来提高系统性能。切换策略在网络控制系统^[1]、飞机控制系统^[2]、通信信道系统^[3]等领域得到了广泛应用。因此,切换系统已经成为混合动力系统的主流方向,并有大量的基础理论研究和实际应用研究^[4-6]。

众所周知,时间延迟在实际系统中是普遍存在的,并且会显著降低系统性能,潜在地导致系统不稳定^[7,8]。系统中的时间延迟通常会导致目标系统的不稳定和期望的行为,这使得具有时间延迟的切换系统的研究变得复杂化,见文献^[9,10]。需要指出的是,线性时变时滞切换系统在实际工程中有着广泛的应用。例如,文献^[11]研究了时间延迟对系统跟踪性能的影响,重点研究了线性切换磁阻电机系统的稳定性分析和位置跟踪的协调控制问题。参考文献^[12],通过构造一组随时间趋近无穷而收敛于零的严格递减函数,对线性正时滞切换系统进行了稳定性分析,但普通的稳定性,并不能精确的反映系统的收敛速度,而区间指数稳定性既能够判断系统是否趋于区间稳定,又能够对收敛速度的上下界进行揭示。因此,研究线性时变时滞切换系统具有重要意义^[13-15]。文献^[16]证明了线性时变时滞切换系统的稳定性,即时延在一定的时延界下。通常的时变切换信号包括平均驻留时间切换信号和驻留时间切换信号。在实践中,平均驻留时间方法比驻留时间方法更适用,以下文章反映了平均驻留时间方法在切换系统中的应用^[17,18]。在文献^[19]中,通过结合顶层函数法和平均驻留时间法,采用积分法提出了两种稳定性条件。异步 H_∞ 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函 (LKF) 研究了平均驻留时间方法下的时滞切换系统控制问题^[20]。

近年来,精确控制在实际工程中发挥了至关重要的作用^[21-23]。极点配置能精确控制系统的动态性能,但存在要求严格、计算复杂的缺点。因此,学者们提出了广义极点配置法来实现系统的精确控制。区间稳定作为一种通用的极点配置方法,提供了一个相对直接的计算过程,同时达到精确控制的目标。值得注意的是,该领域已经取得了一些卓越的成就。例如在文献^[24]提出了一种保证系统控制精度的方案,但没有考虑线性时变时滞切换系统的收敛速度约束问题,本文通过设计的控制器对收敛速度进行约束,可以使可以对收敛速度的上下界进行控制,从而达到对控制成本进行控制的目的。在实际工程中,通过约束收敛速度可以实现更精确的控制。受上述文献启发,重点研究控制器的设计,通过定义线性时变时滞切换系统的区间指数稳定性,解决系统收敛速度约束问题,旨在实现更精确的控制。本文的创新点有(1) 通过分析系统矩阵与线性时变时滞切换系统稳定性之间的关系,得到了线性时变时滞切换系统的区间指数稳定性判据。该准则能够判断线性时变时滞切换系统是否趋于区间指数稳定,并揭示了线性时变时滞切换系统收敛速度的上下界。(2) 根据稳定性判据,设计了基于平均驻留时间方法的控制器。该控制器能够保证线性时变时滞切换系统的稳定性,并抑制收敛速度的上下界。区间指数镇定方法有效地控制了线性时变时滞切换系统的收敛速度,从而达到精确控制的目的。

1 基础知识问题表述

考虑如下线性时变时滞切换系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + A_{ds(t)}x(t-l(t)), t \geq 0, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-\hat{l}, 0], \end{cases} \quad (1)$$

对于任意切换序列 $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ 是左连续的,并且 $x(t)$ 是状态向量。 $A_{ds(t)}$ 和 $A_{\sigma(t)}$ 是具有合适维数的常数矩阵。 $\sigma(t): [0, \infty) \rightarrow S = 1, \dots, m$ 是关于时间的分段常数函数,被称为切换信号。如果 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 则第 $\sigma(t_k)$ 个子系统活跃。第 s 个切换时间用 t_s 来表示。 $l(t)$ 是一个连续函数,满足 $\dot{l}(t) \leq l \leq 1$, $0 \leq l(t) \leq \hat{l}$, 其中常数 l 是 $\dot{l}(t)$ 的上界, $\hat{l}$ 是 $l(t)$ 的上界。 $\varphi(\theta)$ 是 $[-\hat{l}, 0]$ 上的初始条件。

定义 1^[26] 如果存在常数 $\zeta > 0, \beta$, 使得在切换律 $\sigma(t)$ 下, $x(t)$ 满足 $\|x(t)\| \leq \zeta e^{-\beta(t-t_0)} \|x_{t_0}\|$, $\forall t \geq t_0$, 则称系统(1)为指数稳定。

定义 2 在切换律 $\sigma(t)$ 下, $t_0 \in [-\hat{l}, 0]$, 对于 $r \in \{1, 2\}$, 如果存在常数 $\xi_r > 0, \rho_r > 0$, 对 $\forall t \geq t_0$

使得 $x(t)$ 满足 $\xi_2 e^{-\rho_2(t-t_0)} \|x_{t_0}\| \leq \|x(t)\| \leq \xi_1 e^{-\rho_1(t-t_0)} \|x_{t_0}\|$, 则称系统(1)在区间 $(-\rho_2, -\rho_1)$ 上指数稳定。

定义 3 ^[17] 在切换律 $\sigma(t)$ 下, $N_\sigma(\theta_2, \theta_1)$ 表示切换律 $\sigma(t)$ 在时间 $[\theta_1, \theta_2)$ 中的切换次数。如果存在两个正数 ν_a 和 N_0 使 $N_\sigma(\theta_2, \theta_1) \leq N_0 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{\nu_a}$, $\forall \theta_2 \geq \theta_1 \geq 0$, 则 $\sigma(t)$ 有平均驻留时间 ν_a , 其中 N_0 被称为抖振界。

注 1 对于线性时变时滞切换系统, 系统收敛速度的上下界可以通过区间指数稳定得到。区间指数稳定通过有效地揭示收敛速度的范围, 为实现精确控制奠定了基础。由于实际工程中对精确控制的需要, 区间指数稳定具有理论价值和实际需要。

定义 4 ^[25] 对于一个矩阵 $X = \{x_{ik}\} \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 矩阵测度 $\mu_g(X)$ ($g = 1, 2, \infty$) 计算如

$$\mu_1(X) = \max_k (\operatorname{Re}(x_{kk}) + \sum_{i=1 \neq k}^n |x_{ik}|), \mu_2(X) = \frac{1}{2} \max_i \lambda_i(X^* + X), \mu_\infty(X) = \max_i (\operatorname{Re}(x_{ii}) + \sum_{k=1 \neq i}^n |x_{ik}|),$$

式中 $(*)$ 被称为共轭转置符号, 本文中 $\mu(X)$ 被定义为 $\mu_2(X)$ 。

引理 1 ^[25] 对于系统的矩阵, $\mu(A)$ 为矩阵 A 的测度, 如果 $\mu(A) + \|A_d\| < 0$ 成立, 则系统(1)是稳定的。

引理 2 ^[25] 假设 X 为一任意维数的矩阵, $\lambda(X)$ 表示矩阵 X 的特征值, 则矩阵测度 $\mu(X)$ 具有以下性质 $\lambda(X) \leq \mu(X) \leq \|X\|$ 。

引理 3 ^[26] 设矩阵 $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 矩阵 $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为一正定矩阵, 则有 $-L^T M^{-1} L \leq M - L - L^T$ 。

2 区间指数稳定性分析

本节重点对线性时变时滞切换系统的区间指数稳定进行了分析, 给出了区间指数稳定性的判据, 其能够反映线性时变时滞切换系统的收敛速度。

定理 1 对于线性时变时滞切换系统(1), 对于给定的常数 $l, \hat{l}, \tau > 0, \epsilon > 0$ 。如果存在任意具有合适维数的矩阵 N_i , 矩阵 $R_i > 0, Q_i > 0, P_i > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} & -N_i & -(A_i + \tau I)^T R_i \\ * & \hat{F}_{22} & -N_i & e^{\tau \hat{l}} A_{di}^T R_i \\ * & * & -R_i & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\hat{l}} R_i \end{bmatrix} < 0, \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{T}_{11} & \hat{T}_{12} & -N_i & -(-A_i - \epsilon I)^T R_i \\ * & \hat{T}_{22} & -N_i & e^{\epsilon \hat{l}} A_{di}^T R_i \\ * & * & -R_i & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\hat{l}} R_i \end{bmatrix} < 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{sym}\{(-A_i - \epsilon I + \| -A_{di} \| I)^T P_i\} < 0. \quad (4)$$

这里 $\hat{F}_{11} = \operatorname{sym}\{P_i(A_i + \tau I)\} + Q_i + N_i + N_i^T$, $\hat{F}_{12} = e^{\tau \hat{l}} P_i A_{di} - N_i + N_i^T$, $\hat{F}_{22} = -(1-l)Q_i - N_i + N_i^T$, $\hat{T}_{11} = \operatorname{sym}\{P_i(-A_i - \epsilon I)\} + Q_i + N_i + N_i^T$, $\hat{T}_{12} = -e^{\epsilon \hat{l}} P_i A_{di} - N_i + N_i^T$, $\hat{T}_{22} = -(1-l)Q_i - N_i + N_i^T$ 。

在切换信号满足以下平均驻留时间的条件下

$$\nu_a \geq \nu_a^* = \frac{\ln \theta}{2\tau}, \quad (5)$$

式中 $\theta \geq 1$, 对于 $\forall i, j \in S$, 下列式子成立

$$\frac{1}{\theta} P_j \leq P_i \leq \theta P_j, \frac{1}{\theta} Q_j \leq Q_i \leq \theta Q_j, \frac{1}{\theta} R_j \leq R_i \leq \theta R_j, \quad (6)$$

并且

$$\rho_1 = 2\tau - \frac{\ln\theta}{\nu_a}, \rho_2 = 2\epsilon + \frac{\ln\theta}{\nu_a}, \quad (7)$$

则线性时变时滞切换系统在区间 $(-\rho_2, -\rho_1)$ 内区间指数稳定。

证 首先,通过在区间 $(-\rho_2, -\rho_1)$ 内区间指数稳定的定义,可以得知线性时变时滞切换系统(1)满足 $\|x(t)\| \leq \xi_1 e^{-\rho_1(t-t_0)} \|x_{t_0}\|$ 。将 $x(t)$ 进行转换使得 $x(t) = e^{-\tau(t-t_0)} m(t)$, 则线性时变时滞切换系统(1)转换为

$$\dot{m}(t) = (A_{\sigma(t)} + \tau I)m(t) + e^{\tau \hat{l}} A_{di} m(t-l(t)). \quad (8)$$

选择以下分段李雅普诺夫函数

$$Z_{\sigma(t)}(t, m_t) = m^T(t) P_{\sigma(t)} m(t) + \int_{t-l(t)}^t m^T(s) Q_{\sigma(t)} m(s) ds + \int_{-\hat{l}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{m}(s) R_{\sigma(t)} \dot{m}(s) ds d\theta. \quad (9)$$

对于 $\sigma(t) = i$, 根据系统(8)可以得到(9)的导数如下

$$\begin{aligned} \dot{Z}_i(t, m(t)) &= 2m^T(t) P_i [(A_i + \tau I)m(t) + e^{\tau \hat{l}} A_{di} m(t-l(t))] + m^T(t) Q_i m(t) \\ &\quad + \hat{l} \dot{m}^T(t) R_i \dot{m}(t) - (1-l(t)) m^T(t-l(t)) Q_i m(t-l(t)) - \int_{t-l(t)}^t \dot{m}(s) R_i \dot{m}(s) ds \\ &\leq 2m^T(t) P_i [(A_i + \tau I)m(t) + e^{\tau \hat{l}} A_{di} m(t-\hat{l})] + m^T(t) Q_i m(t) + \hat{l} \dot{m}^T(t) R_i \dot{m}(t) \\ &\quad - (1-l) m^T(t-\hat{l}) Q_i m(t-\hat{l}) - \int_{t-l(t)}^t \dot{m}^T(s) R_i \dot{m}(s) ds \\ &\quad + 2[m^T(t) N_i + m^T(t-l(t)) N_i] \times [m(t) - m(t-l(t)) - \int_{t-l(t)}^t \dot{m}(s) ds] \\ &= \zeta^T(t) \Lambda_i \zeta(t), \end{aligned}$$

$$\text{式中 } \zeta(t) = \begin{bmatrix} m^T(t) & m^T(t-\hat{l}) & \int_{t-l(t)}^t \dot{m}^T(s) ds & m^T(t) \end{bmatrix}^T, \Lambda_i = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & -N_i & -(A_i + \tau I)^T R_i \\ * & \hat{C}_{22} & -N_i & -e^{\tau \hat{l}} A_{di}^T R_i \\ * & * & -R_i & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\hat{l}} R_i \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_{11} = \text{sym}\{P_i(A_i + \tau I)\} + Q_i + N_i + N_i^T, \hat{C}_{12} = e^{\tau \hat{l}} P_i A_{di} - N_i + N_i^T, \hat{C}_{22} = -(1-l)Q_i - N_i + N_i^T.$$

将方程两边同时乘以 $\text{diag}(I, e^{k\hat{l}} I)$, 可以得到 $\Lambda_i < 0$, 则 $\dot{Z}_i(t, m_t) < 0$ 。对于 $\forall t \in [t_j, t_{j+1})$, 有

$$Z_{\sigma(t)}(t, m_t) \leq Z_{\sigma(t_j)}(t_j, m_{t_j}), \quad (10)$$

以及

$$V_{\sigma(t)}(t, x_t) = e^{-2\tau(t-t_0)} Z_{\sigma(t)}(t, m(t)). \quad (11)$$

利用式(10)和(11)得到以下不等式

$$V_{\sigma(t)}(t, x_t) \leq e^{-2\tau(t-t_j)} V_{\sigma(t_j)}(t_j, x_{t_j}). \quad (12)$$

将不等式(6)代入(12), 可得

$$V_{\sigma(t_j)}(t_j, x_{t_j}) \leq \theta V_{\sigma(t_j^-)}(t_j^-, x_{t_j^-}). \quad (13)$$

结合(12)和(13), 可以进一步得到

$$V_{\sigma(t)}(t, x_t) \leq e^{-2\tau(t-t_j)} V_{\sigma(t_j)}(t_j, x_{t_j}) \leq \theta e^{-2\tau(t-t_j)} V_{\sigma(t_j^-)}(t_j^-, x_{t_j^-}) \leq \theta^k e^{-2\tau(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0, x_{t_0}).$$

结合 $j \leq \frac{t-t_0}{\nu_a}$ 和(14), 可得 $V_{\sigma(t)}(t, x_t) \leq e^{-(2\tau - \frac{\ln\theta}{\nu_a})(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0, x_{t_0})$ 。

根据 $V_{\sigma(t)}(t, x_t)$, 可以推导出下列式子

$$\|x(t)\| \leq \xi_1 e^{-\rho_1(t-t_0)} \|x(t_0)\|, \quad (14)$$

$$\text{式中 } \xi_1 = \sqrt{\frac{\max_{i \in S} \lambda_{\max}(P_i) + \hat{l} \max_{i \in S} \lambda_{\max}(Q_i)}{\min_{i \in S} \lambda_{\min}(P_i)}}, \rho_1 = 2\tau - \frac{\ln\theta}{\nu_a}.$$

下面证明线性时变时滞切换系统(1)满足 $\xi_2 e^{-\xi_2(t-t_0)} \|x_{t_0}\| \leq \|x(t)\|$ 。

将 $x(t) = e^{-\varepsilon(t-t_0)} h(t)$ 代入(2)式,以下式子成立

$$\dot{h}(t) = (A_{\sigma(t)} + \varepsilon I)h(t) + e^{\varepsilon \hat{l}} A_{d\sigma(t)} h(t-l(t))。 \quad (15)$$

根据微分方程解的性质出发,对系统进行如下分析:

$$\dot{h}(t) = (A_{\sigma(t)} + \varepsilon I)h(t) + e^{\varepsilon \hat{l}} A_{d\sigma(t)} h(t-l(t))。 \quad (16)$$

对于(16),得到

$$H_{\sigma(t)}(t, H_t) = h^T(t) P_{\sigma(t)} h(t) + \int_{t-l(t)}^t h^T(s) Q_{\sigma(t)} h(s) ds + \int_{-\hat{l}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{h}(s) R_{\sigma(t)} \dot{h}(s) ds d\theta, \quad (17)$$

对于 $\sigma(t) = i$, 根据系统(16)可以得到(17)的导数如

$$\begin{aligned} \dot{H}_i(t, h(t)) &= 2h^T(t) P_i [(-A_i - \varepsilon I)h(t) - e^{\varepsilon \hat{l}} A_{di} h(t-l(t))] + h^T(t) Q_i h(t) + \hat{l} \dot{h}^T(t) R_i \dot{h}(t) \\ &\quad - (1-l(t)) h^T(t-l(t)) Q_i h(t-l(t)) - \int_{t-l(t)}^t \dot{h}(s) R_i \dot{h}(s) ds \\ &\leq 2h^T(t) P_i [(-A_i - \varepsilon I)h(t) - e^{\varepsilon \hat{l}} A_{di} h(t-l(t))] + h^T(t) Q_i h(t) + \hat{l} \dot{h}^T(t) R_i \dot{h}(t) \\ &\quad - (1-l) h^T(t-l(t)) Q_i h(t-l(t)) - \int_{t-l(t)}^t \dot{h}^T(s) R_i \dot{h}(s) ds + 2[h^T(t) N_i + h^T(t-l(t)) N_i] \\ &\quad \times [h(t) - h(t-l(t)) - \int_{t-l(t)}^t \dot{h}(s) ds] \\ &= G^T(t) \Omega_i G(t), \end{aligned}$$

$$\text{式中 } \zeta(t) = \begin{bmatrix} h^T(t) & h^T(t-l(t)) & \int_{t-l(t)}^t \dot{h}^T(s) ds & h^T(t) \end{bmatrix}^T, \Omega_i = \begin{bmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} & -N_i & -(-A_i - \varepsilon I)^T R_i \\ * & \hat{D}_{22} & -N_i & e^{\varepsilon \hat{l}} A_{di}^T R_i \\ * & * & -R_i & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\hat{l}} R_i \end{bmatrix},$$

$$\hat{D}_{11} = \text{sym}\{P_i(-A_i - \varepsilon I)\} + Q_i + N_i + N_i^T, \hat{D}_{12} = -e^{\varepsilon \hat{l}} P_i A_{di} - N_i + N_i^T, \hat{D}_{22} = -(1-l)Q_i - N_i + N_i^T。$$

将方程两边同时乘以 $\text{diag}(I, e^{\varepsilon \hat{l}} I)$, 可以得到 $\Omega_i < 0$, 则 $\dot{H}_i(t, h_t) < 0$ 。根据

$$\text{sym}\{(-A_i - \varepsilon I + \| -A_{di} \| I)^T P_i\} < 0, \quad (18)$$

可以得到

$$\lambda(-A_i - \varepsilon I + \| -A_{di} \| I) < 0。 \quad (19)$$

由引理 2, 可得

$$\mu(-A_i - \varepsilon I) + \| -A_{di} \| < 0。 \quad (20)$$

基于上述算式和引理 1, 对于系统(16), 可以得到 $\dot{H}_i(t, h_t) > 0$,

$$H_{\sigma(t)}(t, h_t) \geq H_{\sigma(t_k)}(t_k, h_{t_k}), \forall t \in [t_k, t_{k+1})。 \quad (21)$$

与(11)类似, 令

$$V_{\sigma(t)}(t, x_t) = e^{-2\varepsilon(t-t_0)} H_{\sigma(t)}(t, h(t))。 \quad (22)$$

结合(21)和(22), 得到不等式

$$V_{\sigma(t)}(t, x_t) \geq e^{-2\varepsilon(t-t_k)} V_{\sigma(t_k)}(t_k, x_{t_k})。 \quad (23)$$

根据不等式(6)和(12), 有

$$V_{\sigma(t_k)}(t_k, x_{t_k}) \geq \frac{1}{\theta} V_{\sigma(t_k)}(t_k^-, x_{t_k}^-)。 \quad (24)$$

根据(13), (14)相似的计算过程, 可以推导出

$$\|x(t)\| \geq \xi_2 e^{-\rho_2(t-t_0)} \|x(t_0)\|, \quad (25)$$

$$\text{式中 } \xi_2 = \sqrt{\frac{\min_{i \in S} \lambda_{\min}(P_i)}{\max_{i \in S} \lambda_{\max}(P_i) + \hat{l} \max_{i \in S} \lambda_{\max}(Q_i)}}, \rho_2 = 2\varepsilon + \frac{\ln \theta}{\nu_a}。$$

注2 与一般的指数稳定相比,区间指数稳定比指数稳定更精确。它可以通过区间 $(-\epsilon, -\tau)$ 反映系统的收敛速度。收敛速度可以表现为快于某个值,或者慢于另一个值。由于区间指数稳定性能够建立精确控制的理论基础,所以收敛速度的反映在实际工程应用中对实现精确控制起着至关重要的作用。

对该条件进行弱化,得到一个更一般的指数稳定条件。

推论1 对于线性时变时滞切换系统(1),考虑下列常数 $l, \hat{l}, \tau > 0$ 。如果存在任意具有合适维数的矩阵 N_i , 矩阵 $R_i > 0, Q_i > 0, P_i > 0$,使得

$$\begin{bmatrix} o_{11} & o_{12} & -N_i & -(A_i + \tau I)^T R_i \\ * & o_{22} & -N_i & -e^{\tau \hat{l}} A_{di}^T R_i \\ * & * & -R_i & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\hat{l}} R_i \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

式中 $o_{11} = \text{sym}\{P_i(A_i + \tau I)\} + Q_i + N_i + N_i^T$, $o_{12} = e^{\tau \hat{l}} P_i A_{di} - N_i + N_i^T$, $o_{22} = -(1-l)Q_i - N_i + N_i^T$, 则线性时变时滞切换系统(1)是指数稳定的,当 $\sigma(t)$ 满足平均驻留时间

$$\nu_a \geq \nu_a^* = \frac{\ln \theta}{2\tau}. \quad (27)$$

当常数 $\theta \geq 1$,对于 $\forall i, j \in S$ 满足

$$\frac{1}{\theta} P_j \leq P_i \leq \theta P_j, \quad \frac{1}{\theta} Q_j \leq Q_i \leq \theta Q_j, \quad \frac{1}{\theta} R_j \leq R_i \leq \theta R_j. \quad (28)$$

注3 对于线性时变时滞切换系统,推论1利用平均驻留时间方法引入了自由权矩阵,并给出了其指数稳定的判据。定理1使指数稳定判据更适合于实际工程应用,利用该推理可以反映收敛速度的下界。

3 区间指数镇定

根据定理1得到了使线性时变时滞切换系统收敛速度得到控制的控制器。考虑以下线性时变时滞切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + A_{d\sigma(t)} x(t-l(t)) + B_{\sigma(t)} u(t), \\ x(\theta) = \phi(\theta), \quad t \geq 0, \quad \theta \in [-\hat{l}, 0], \end{cases} \quad (29)$$

式中 $u(t) = K_{\sigma(t)} x(t)$ 是控制输入,并且 $u(t) \in \mathbf{R}^r$ 。根据本节中控制器 $u(t) = K_{\sigma(t)} x(t)$ 的设计,系统(29)在区间 $(-\rho_2, -\rho_1)$ 内区间指数稳定。

定理2 对于线性时变时滞切换系统(29),考虑下列常数 $l, \hat{l}, \tau > 0, \epsilon > 0$ 。如果存在任意具有合适维数的矩阵 N_i , 矩阵 $R_i > 0, Q_i > 0, P_i > 0$,使得

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & -\bar{N}_i & -(A_i + \tau I)^T \bar{R}_i \\ * & f_{22} & -\bar{N}_i & -e^{\tau \hat{l}} A_{di}^T \bar{R}_i \\ * & * & \bar{R}_i - \bar{P}_i - \bar{P}_i^T & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\hat{l}} \bar{R}_i \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & -\bar{N}_i & -(-A_i - \epsilon I)^T \bar{R}_i \\ * & \psi_{22} & -\bar{N}_i & e^{\epsilon \hat{l}} A_{di}^T \bar{R}_i \\ * & * & \bar{R}_i - \bar{P}_i - \bar{P}_i^T & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\hat{l}} \bar{R}_i \end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

$$\text{sym}\{(-A_i - \epsilon I - B_i H_i + \| -A_{di} \| I)^T P_i\} < 0, \quad (32)$$

式中 $f_{11} = \text{sym}\{\bar{P}_i(A_i + \tau I) + B_i H_i\} + \bar{Q}_i + \bar{N}_i + \bar{N}_i^T$, $f_{12} = e^{\tau \hat{l}} \bar{P}_i A_{di} - \bar{N}_i + \bar{N}_i^T$, $f_{22} = -(1-l)\bar{Q}_i - \bar{N}_i + \bar{N}_i^T$, $\psi_{11} = \text{sym}\{\bar{P}_i(-A_i - \epsilon I) - B_i H_i\} + \bar{Q}_i + \bar{N}_i + \bar{N}_i^T$, $\psi_{12} = -e^{\epsilon \hat{l}} \bar{P}_i A_{di} - \bar{N}_i + \bar{N}_i^T$, $\psi_{22} = -(1-l)\bar{Q}_i - \bar{N}_i + \bar{N}_i^T$ 。

则线性时变时滞切换系统(29)在平均驻留时间

$$\nu_a \geq \nu_a^* = \frac{\ln \theta}{2\tau} \quad (33)$$

下,在区间 $(-\rho_2, -\rho_1)$ 内是区间指数稳定的,其中常数 $\theta \geq 1$ 。对于 $\forall i, j \in S$, 满足

$$\frac{1}{\theta} \bar{P}_j \leq \bar{P}_i \leq \theta \bar{P}_j, \frac{1}{\theta} \bar{Q}_j \leq \bar{Q}_i \leq \theta \bar{Q}_j, \frac{1}{\theta} \bar{R}_j \leq \bar{R}_i \leq \theta \bar{R}_j, \quad (34)$$

并且

$$\rho_1 = 2\tau - \frac{\ln \theta}{\nu_a}, \rho_2 = 2\epsilon + \frac{\ln \theta}{\nu_a}. \quad (35)$$

状态反馈控制器的表示如

$$K_i = H_i \bar{P}_i^{-1}. \quad (36)$$

证 首先,将 $A_i + B_i K_i$ 代替定理 1 中的 A_i 。将定义 1 中的 P_i^{-1} 定义为 $\bar{P}_i$, $R_i^{-1} = \bar{R}_i$, 将 $\text{diag}\{\bar{P}_i, \bar{P}_i, \bar{P}_i, \bar{R}_i\}$ 同时乘以式(2)的两边。根据引理 3,通过引入新的变量 $\bar{Q}_i = \bar{P}_i Q_i \bar{P}_i$, $\bar{N}_i = \bar{P}_i N_i \bar{P}_i$, 以及 $H_i = K_i \bar{P}_i$, 可以得到线性矩阵不等式(30)。线性矩阵不等式(31)通过与(30)一样的过程获得。

注 4 根据区间指数稳定性定理,设计控制器使线性时变时滞切换系统的收敛速度可以快于某一确定值,也可以慢于某一确定值。在实际工程中,通常需要考虑成本。通过限制系统收敛速度来控制成本。在应用过程中,通过限制收敛速度可以使控制输入相对较小,从而达到节约成本的目的。

如果只考虑系统的稳定性和收敛速度快于某个值,则根据定理 2 可以得到一个更简单的条件。

推论 2 对于线性时变时滞切换系统(29),考虑下列常数 $l, \hat{l}, \tau > 0$ 。如果存在任意具有合适维数的矩阵 N_i , 矩阵 $R_i > 0, Q_i > 0, P_i > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & -\bar{N}_i & -(A_i + \tau I)^T \bar{R}_i \\ * & J_{22} & -\bar{N}_i & -e^{\tau \hat{l}} A_{di}^T \bar{R}_i \\ * & * & \bar{R}_i - \bar{P}_i - \bar{P}_i^T & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\hat{l}} \bar{R}_i \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

式中 $J_{11} = \text{sym}\{\bar{P}_i(A_i + \tau I) + B_i H_i\} + \bar{Q}_i + \bar{N}_i + \bar{N}_i^T$, $J_{12} = e^{\tau \hat{l}} \bar{P}_i A_{di} - \bar{N}_i + \bar{N}_i^T$, $J_{22} = -(1-l)\bar{Q}_i - \bar{N}_i + \bar{N}_i^T$, 则线性时变时滞切换系统(29)在平均驻留时间

$$\nu_a \geq \nu_a^* = \frac{\ln \theta}{2\tau} \quad (38)$$

内是指数稳定的,并且常数 $\delta \geq 1$, 对 $\forall i, j \in S$ 满足

$$\frac{1}{\theta} \bar{P}_j \leq \bar{P}_i \leq \theta \bar{P}_j, \frac{1}{\theta} \bar{Q}_j \leq \bar{Q}_i \leq \theta \bar{Q}_j, \frac{1}{\theta} \bar{R}_j \leq \bar{R}_i \leq \theta \bar{R}_j. \quad (39)$$

状态反馈控制器的表示如

$$K_i = H_i \bar{P}_i^{-1}. \quad (40)$$

注 5 根据推论 1,控制器的设计只能保证收敛速度快于某一确定值。它不能保证收敛速度比另一个确定值慢。这将导致控制器投入过多,增加控制成本。

4 仿真实例

接下来的仿真将验证线性时变时滞切换系统区间指数镇定方法的有效性。

例1 线性时变滞切换系统的参数如

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3.6 & -2.2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.7 \\ 0 & -3.3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{d2} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 0.15 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, l=0.5, \hat{l}=0.5, \theta=1.05。根据 \tau=0.1, 我们可以得到 \nu_a=0.5。$$

根据图1,可以得到当平均驻留时间 \nu_a=0.5 时,上述参数下的系统显然是不稳定的。

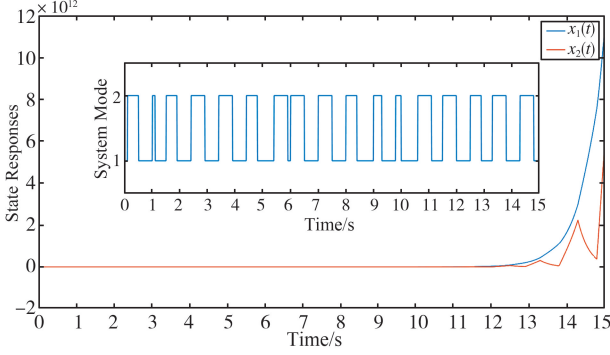


图1 开环系统的状态轨迹图

Fig. 1 The state trajectories of open-loop system

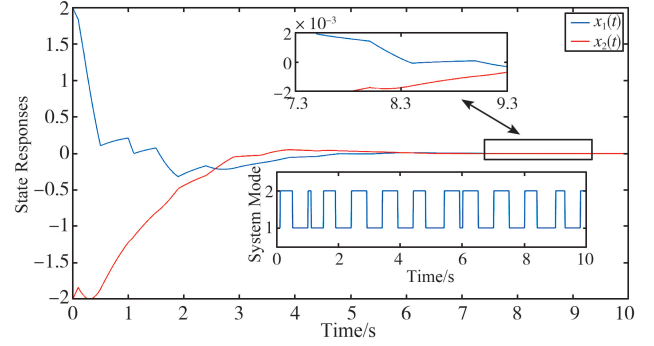


图2 闭环系统的状态轨迹图

Fig. 2 The state trajectories of closed-loop system

根据推论2的设计,控制器增益如

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -3.7941 & -15.4359 \\ -18.9428 & 30.8695 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -43.2574 & -60.5467 \\ 64.8827 & 104.0866 \end{bmatrix}。$$

当平均驻留时间 \nu_a=0.5 时,可以得到图2。图2表示当 t \ge 7.8 s, i=1,2 时, |x_i| \le 2 \times 10^{-3}, 其初始条件为 \mathbf{x}(0) = [-2 \ 2]^T。

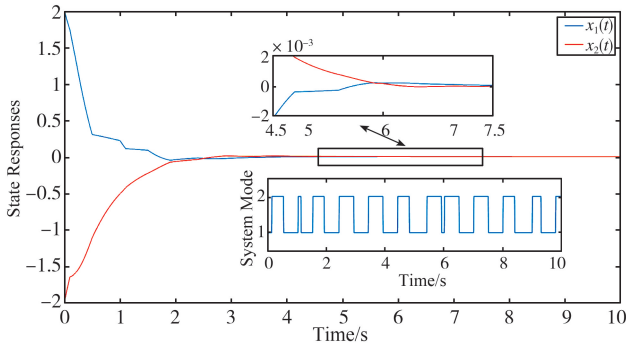


图3 带参数(-3, -0.4)闭环系统的状态轨迹

Fig. 3 The state trajectories of the closed-loop system with parameters (-3, -0.4)

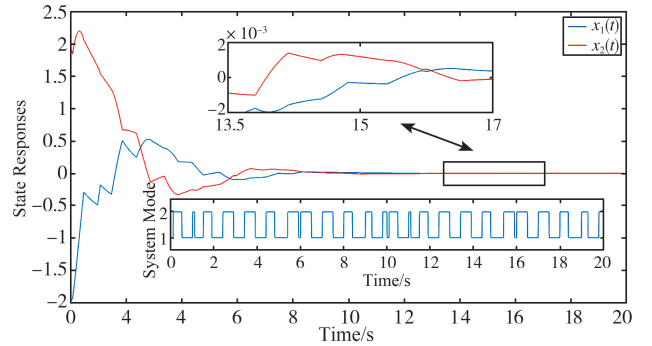


图4 带参数(-1, -0.3)闭环系统的状态轨迹

Fig. 4 The state trajectories of the closed-loop system with parameters (-1, -0.3)

根据定理2选择参数 (-\epsilon, -\tau) 可以限制系统状态收敛到平衡点的速度,即可以有不同的区间 (-\rho_2, -\rho_1)。假定参数 (-3, -0.4), (-\rho_2, -\rho_1) = (-6.0976, -0.7024)。当 \nu_a=0.5 时, \mathbf{K}_i 可以通过式(26), (27)的解计算得出

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} -19.5188 & -7.1530 \\ 4.9689 & 14.4621 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} -10.1085 & 2.8019 \\ 3.1337 & -0.8350 \end{bmatrix}。$$

如图3所示,当 t \ge 4.5 s 时, |x_i| \le 2 \times 10^{-3}。可以明显看出图3所示的结果比图2的更快速。

此外,为了减缓收敛速度,可以选择不同的参数 (-\epsilon, -\tau)。给定 (-\epsilon, -\tau) = (-1, -0.3), 则区间为 (-2.0976, -0.5024)。根据定理2可以得到

$$\mathbf{K}_5 = \begin{bmatrix} -8.0501 & -19.9222 \\ -10.3125 & 38.6662 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_6 = \begin{bmatrix} 3.6265 & -15.0382 \\ -10.7012 & 32.7568 \end{bmatrix}。$$

与图 2 相比,由上述增益获得的系统收敛速度较慢。如图 4 所示,当 $t > 13.6$ s 时, $|x_i| < 2 \times 10^{-3}$, $i = 1, 2$ 。

注 6 根据推论 2 设计的控制器,可以保证线性时变时滞切换系统的稳定性,但不能限制其收敛速度。通过调整区间 $(-\epsilon, -\tau)$,利用定理 2 设计的控制器可以实现系统收敛速度的控制。

例 2 图 5 中的 RLC 电路验证了该控制方法的实用性。

由于电容的充放电延迟,本文考虑了时间延迟。定理 2 的有效性可以通过 RLC 电路来验证,其中 C 是电容, R 是电阻, L 是电感。

对于 RLC 电路中时刻 t 的电流 $i(t)$ 和电荷 $q(t)$ 。令 $L_0 = \frac{1}{L}\phi L$, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T \triangleq [q(t) \ i(t)]^T$, 则有

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{d\sigma(t)}x(t) + A_{d\sigma(t)}x(t-l(t)) + \frac{1}{L}u(t), \\ x(\theta) = \phi(\theta), \quad t \geq 0, \quad \theta \in [-\hat{l}, 0], \end{cases}$$

式中 $L = 4$ H, $R = 0.1$ Ω , $C_1 = 0.5$ F, $C_2 = 0.8$ F, $\sigma(t) = 1, 2$ 。则初始状态为 $x(0) = [1 \ 0.8]$ 。定义 $x_1 = q$, $x_2 = \phi L$, $u(t)$ 是控制输入。以下参数可用于将电路建模为系统(1)

$$A_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC_{\sigma(t)}} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$l = 0.5$, $\hat{d} = 0.5$, $\theta = 1.05$ 。根据 $\tau = 0.1$ 。可以得到 $\nu_a = 0.5$ 。根据推论 2,控制器增益如

$$K_7 = [-3.573 \ 3 \ -7.026 \ 9], \quad K_8 = [-7.448 \ 0 \ -7.551 \ 9]。$$

当 $\nu_a = 0.5$ 时可以得到图 6。这幅图表示当 $|x_i| \leq 2 \times 10^{-3}$ 时, $t \geq 7.8$ s, $i = 1, 2$ 。

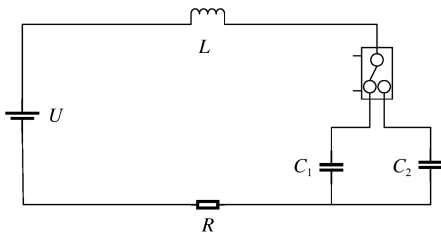


图 5 RLC 电路原理图

Fig. 5 Schematic diagram of RLC circuit

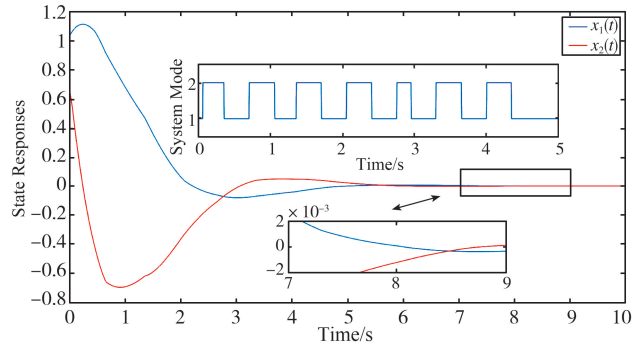


图 6 RLC 电路系统的状态轨迹

Fig. 6 The state trajectories of the RLC circuit system

利用定理 2,预设参数 $(-2, -0.4)$, 将初始条件定义为 $(-\rho_2, -\rho_1) = (-4.097 \ 6, -0.702 \ 4)$ 。当平均驻留时间为 $\nu_a = 0.5$ 时,可以通过线性矩阵不等式(36),(37)的解计算得到控制器的增益。

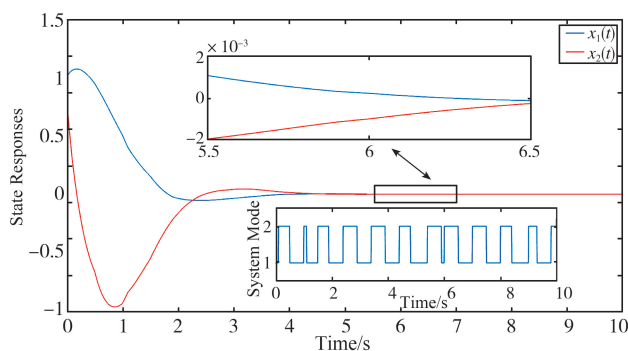
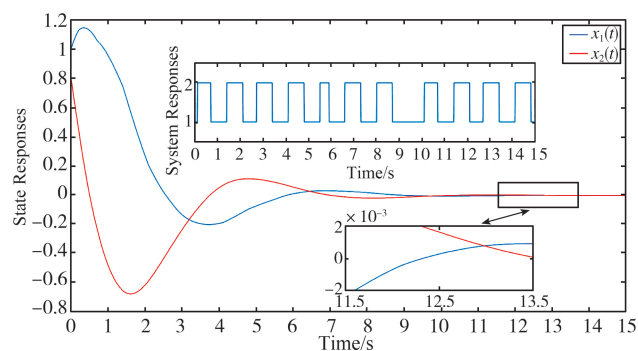
$$K_9 = [-9.230 \ 6 \ -8.301 \ 2], \quad K_{10} = [-8.537 \ 4 \ -8.140 \ 5]。$$

如图 7 所示,当 $t \geq 5.5$ s 时, $|x_i| \leq 2 \times 10^{-3}$ 。可以看出,图 7 所示结果比图 6 所示结果更加快速。

另外,给定 $(-\epsilon, -\tau) = (-1.3, -0.05)$,则区间为 $(-2.697 \ 6, -0.002 \ 4)$ 。在平均驻留时间 $\nu_a = 0.5$ 下,控制器增益可以通过定理 2 得到 $K_{11} = [-1.949 \ 9 \ -4.035 \ 0]$, $K_{12} = [-2.901 \ 4 \ -3.856 \ 3]$ 。

如图 8 所示,由上述增益推导得到的系统收敛速度慢于图 6,而当 $|x_i| < 2 \times 10^{-3}$ 时, $i = 1, 2$, $t > 11.6$ s。因此,本文提出的区间指数镇定方法是有效的。

注 7 在 RLC 电路中,整个模型主要由电压控制。电压和电流传输调节电容器的充放电时间,从而限制了系统的收敛速度。所设计的控制器可以保证系统在要求的时间段内稳定,达到更精确控制的目的,有利于时间的准确控制。

图7 参数为 $(-2, -0.4)$ 的RLC电路系统的状态轨迹Fig. 7 The state trajectories of the RLC circuit system with parameters $(-2, -0.4)$ 图8 参数为 $(-1.3, -0.005)$ 的RLC电路系统的状态轨迹Fig. 8 The state trajectories of the RLC circuit system with parameters $(-1.3, -0.005)$

5 结论

研究线性时变时滞切换系统的指数区间稳定性和镇定问题。指数区间稳定性反映了系统的收敛速度。通过对变换后的系统进行研究,利用平均驻留时间方法,得到了区间指数稳定判据,该判据可以看作是指数稳定判据的推广。新的区间指数镇定方法既能保证闭环系统的稳定,又能控制系统的收敛速度。最后,通过两个实例验证了线性时变时滞切换系统的精确控制。此外,区间稳定性可以研究线性时变时滞切换系统更多的动态特性,如超调量和上升时间等,也可以根据本文来考虑。

参 考 文 献

- [1] ZHAO R, ZUO Z, WANG Y, et al. Active control strategy for switched systems against asynchronous DoS attacks[J]. Automatica, 2023, 148: 110765.
- [2] LIAN J, LI C, XIA B. Sampled-data control of switched linear systems with application to an F-18 aircraft[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(2): 1332-1340.
- [3] ZHANG L, ZHU Y, ZHENG W. State estimation of discrete-time switched neural networks with multiple communication channels[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(4): 1028-1040.
- [4] LIBERZON D. Switching in systems and control[M]. Boston: Birkhäuser Boston, MA, 2003.
- [5] 林玉倩,尹月霞,孙梦,等.时变时滞随机马尔科夫跳变系统非脆弱动态输出反馈控制器设计[J].聊城大学学报(自然科学版),2021,34(3):1-11.
- [6] WU Z, DONG S, SHI P, et al. Reliable filter design of Takagi-Sugeno fuzzy switched systems with imprecise modes[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(5): 1941-1951.
- [7] WANG B, ZHU Q, LI S. Stability analysis of discrete-time semi-Markov jump linear systems with time delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68(11): 6758-6765.
- [8] 庄光明,张化生,赵军圣,等.中立随机马尔科夫跳变系统延迟反馈控制器设计[J].聊城大学学报(自然科学版),2018,31(4):65-71.
- [9] ZOU Y, SU H, TANG R, et al. Finite-time bipartite synchronization of switched competitive neural networks with time delay via q -quantized control[J]. ISA Transactions, 2022, 1125: 156-165.
- [10] TIAN Y, WANG Z. A switched fuzzy filter approach to H_∞ filtering for Takagi-Sugeno fuzzy Markov jump systems with time delay: the continuous-time case[J]. Information Sciences, 2021, 557: 236-249.
- [11] QIU L, HE L, DAI L, et al. Networked control strategy of dual linear switched reluctance motors based time delay tracking system[J]. ISA Transactions, 2022, 1129: 605-615.
- [12] LIU X, DANG C. Stability analysis of positive switched linear Systems with delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(7): 1684-1690.
- [13] SOBHANIPOUR H, REZAIE B. Enhanced exponential stability analysis for switched linear time-varying delay systems under admissible edge-dependent average dwell-time strategy[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2023, 53(9): 5331-5342.
- [14] HETEL L, DAAFOUZ J, IUNG C. Stabilization of arbitrary switched linear systems with unknown time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(10): 1668-1674.

- [15] LIEN C, YU K, CHUNG L, et al. H_{∞} performance for uncertain discrete switched systems with interval time-varying delay via switching signal design[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(4): 2484-2494.
- [16] SUN X, WANG W, LIU G, et al. Stability analysis for linear switched systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2008, 38(2): 528-533.
- [17] ZHANG H, WANG H, NIU B, et al. Sliding-mode surface-based adaptive actor-critic optimal control for switched nonlinear systems with average dwell time[J]. Information Sciences, 2021, 580: 756-774.
- [18] SU Q, FAN Z, ZHANG D, et al. Finite-time fault detection filtering for switched singular systems with all modes unstable: an ADT approach[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2019, 17(8): 2026-2036.
- [19] CHEN G, YANG Y. Asymptotic stability of switched linear time-varying systems based on top-floor function[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2022, 446: 101222.
- [20] CHEN Y, LIU J. A precise calculation of bifurcation points for periodic solution in nonlinear dynamical systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 273(15): 1190-1195.
- [21] ZHANG H, DENG Y, XIA J, et al. Accurate stabilization for linear stochastic systems based on region pole assignment and its applications[J]. Systems & Control Letters, 2022, 1165: 105263.
- [22] YEH S, HSU P. Analysis and design of the integrated controller for precise motion systems[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1999 7(6): 706-717.
- [23] 赵军圣, 赵雪静, 孙宗耀. 随机非线性系统的有限时间命令滤波输出反馈跟踪控制[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2023, 36(6): 9-17.
- [24] ZHANG H, XIA J, SHEN H, et al. Pth moment regional stability/stabilization and generalized pole assignment of linear stochastic systems: based on the generalized[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(8): 3234-3249.
- [25] MORI T, KOKAME H. Stability of $x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau)$ [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34(4): 460-462.
- [26] ZHANG H, XIA J, PARK J, et al. Interval stability and interval stabilization of linear stochastic systems with time-varying delay[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021, 31(6): 2334-2347.

(责任编辑:刘庆松)

(上接第 7 页)

- [15] CORSI-CABRERA M, FIGUEREDO-RODRÍGUEZ P, DEL RÍO-PORTILLA Y, et al. Enhanced frontoparietal synchronized activation during the wake-sleep transition in patients with primary insomnia[J]. Sleep, 2012, 35(4): 501-511.
- [16] XIE J, WANG L, XIAO C, et al. Low frequency transcranial alternating current stimulation accelerates sleep onset process[J]. IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, 2021, 29: 2540-2549.
- [17] MASSIMINI M, HUBER R, FERRARELLI F, et al. The sleep slow oscillation as a traveling wave[J]. Journal of Neuroscience, 2004, 24(31): 6862-6870.
- [18] IRAMINA K, UENO S, MATSUOKA S. MEG and EEG topography of frontal midline theta rhythm and source localization[J]. Brain Topography, 1996, 8(3): 329-331.
- [19] ASADA H, FUKUDA Y, TSUNODA S, et al. Frontal midline theta rhythms reflect alternative activation of prefrontal cortex and anterior cingulate cortex in humans[J]. Neuroscience Letters, 1999, 274(1): 29-32.
- [20] MOTAMEDI G K, JELIAZKOV P G, OYEGBILE-CHIDI T O, et al. Transcranial Alternating Current Stimulation (tACS) as a Treatment for Insomnia[J]. Canadian Journal of Neurological Sciences, 2023, 50: 446-449.
- [21] DKHIL M B, CHAWECH N, WALI A, et al. Towards an automatic drowsiness detection system by evaluating the alpha band of EEG signals[C]. //2017 IEEE 15th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMI), IEEE, 2017.
- [22] KNAUT P, VON WEGNER F, MORZELEWSKI A, et al. EEG-correlated fMRI of human alpha desynchronization[J]. Clinical Neurophysiology, 2019, 130(8): 1375-1386.
- [23] HUNG C S, SARASSO S, FERRARELLI F, et al. Local experience-dependent changes in the wake EEG after prolonged wakefulness[J]. Sleep, 2013, 36(1): 59-72.
- [24] MORALES-QUEZADA L, SAAVEDRA LC, ROZISKY J, et al. Intensity-dependent effects of transcranial pulsed current stimulation on interhemispheric connectivity: a high-resolution qEEG, sham-controlled study[J]. Neuroreport, 2014, 25(13): 1054-1058.
- [25] D'ATRI A, DE SIMONI E, GORGONI M, et al. Electrical stimulation of the frontal cortex enhances slow-frequency EEG activity and sleepiness[J]. Neuroscience, 2016, 324: 119-130.
- [26] WANG Y, CAO Q, WEI C, et al. The effect of transcranial electrical stimulation on the recovery of sleep quality after sleep deprivation based on an EEG analysis[J]. Brain Sciences, 2023, 13(6): 933-940.
- [27] FARIA P, LEAL A, MIRANDA PC. Comparing different electrode configurations using the 10-10 international system in tDCS: a finite element model analysis[C]. //International Conference of the IEEE Engineering in Medicine & Biology Society, IEEE, 2009.

(责任编辑:刘庆松)