

文章编号 1672-6634(2024)02-0009-10

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2023090009

单连杆柔性关节机械臂的高阶滑模控制器设计

谢仕堉, 孙 伟

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘 要 针对单连杆柔性关节机械臂系统,提出了一种基于高阶滑模算法的有限时间镇定控制方法。所提出的方法涉及两个关键方面。首先,通过引入加幂积分器,设计了一个新的李雅普诺夫函数,使得输出信号在有限时间内收敛。其次,利用符号函数抑制了系统不确定性造成的抖振现象。基于有限时间李雅普诺夫稳定性理论,证明了该算法能够保证滑动变量在有限时间内收敛到原点。最后,单连杆柔性关节机械臂的仿真结果验证了高阶滑模控制算法的有效性。

关键词 高阶滑模控制;有限时间收敛;柔性关节机械臂

中图分类号 O231

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



High Order Sliding Mode Controller Design for Single-Link Flexible Joint Manipulator

XIE Shiyu, SUN Wei

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract The paper introduces a finite-time stabilization control method for single-link flexible-joint manipulator systems using a high-order sliding mode algorithm. The proposed approach addresses two key aspects. Firstly, a power integrator is incorporated to design a novel Lyapunov function, which ensures the convergence of the output signal within a finite time. Secondly, the chattering phenomenon caused by system uncertainty is mitigated using a sign function. By leveraging the finite-time Lyapunov stability theory, the paper proves that the algorithm guarantees the convergence of the sliding variable to the origin within a finite time. Finally, the effectiveness of the control algorithm is demonstrated through simulation results on a single-link flexible joint manipulator.

Key words high order sliding mode control; finite-time convergence; single-link flexible joint manipulator

0 引言

早在上世纪五六十年代,前苏联学者 Utkin 和 Emelyanov 就提出滑模控制的概念^[1]。近年来,滑模控制因其控制结构简单、强鲁棒性等优点逐渐成为许多专家学者的研究热点。滑模控制本质上是一类特殊的

收稿日期:2023-09-14

基金项目:国家自然科学基金项目(62173174)资助

通信作者:孙伟,男,汉族,博士,副教授,研究方向:非线性系统控制、智能算法,E-mail:sunw8617@163.com。

非线性控制方法,其主要特征还表现为控制的非连续性。滑模控制使被控系统的状态有目的变化,即闭环系统按照预定的滑动模态轨迹运动并到达指定位置。滑动模态是指滑模控制闭环系统发生在滑动模态面(空间中一类超平面,简称滑模面)上的运动形式。一般地,滑模控制闭环系统的运动包括到达和滑动两个阶段,即系统状态在有限时间内到达滑模面,然后沿着滑模面滑动到系统平衡点。随着研究的深入,二阶滑模控制理论(SOSM)在前期理论的基础上发展起来^[2,3]。与传统的一阶滑模方法相比,二阶滑模具有削弱抖振的优点。然而,SOSM 控制算法的局限性在于滑动变量的相对程度为 2,限制了该算法的应用的范围。因此,研究任意阶次的高阶滑模控制算法具有重要的意义。

高阶滑模(HOSM)的概念由 Arie Levant 在 20 世纪 80 年代提出^[4]。与统一阶滑模控制相比,高阶滑模的本质在于避免相对阶限制问题并削弱抖振,且能保留滑模控制的强鲁棒性、抗干扰性等优点。与现有的模糊控制^[5,6]、超螺旋算法^[7]、自适应控制^[8-10]、非周期采样控制^[11]等方法不同,现在发展的高阶滑模控制理论弥补了控制理论存在的不足并得到了广泛的应用。目前,HOSM 理论已应用于电气执行器^[12]、降压变换器^[13]、自动驾驶汽车^[14]等多个领域。因此,HOSM 方法不仅仅是对传统滑模控制理论的进一步推广,而且有着广泛的实际应用背景^[15-21]。

柔性关节机械臂是一个非线性、强耦合的复杂系统,具有精度高、能耗低、质量轻和工作效率高等特点。同时,柔性关节机械臂还具有较好的可控性,因此在许多领域具有很高的应用价值。在一些工业领域,有时并不需要机械手臂具有完整的六个自由度,而只需其中的一个或几个自由度。例如,直角坐标系机械臂可以由单轴机械手臂组合而成,使用单轴机械臂有很多的优点,其中最为重要的一点是单轴机械臂能够大大降低工业设计的成本,因此越来越多的研究者从控制算法等角度研究单连杆柔性关节机械臂^[22-24],使得单连杆柔性关节机械臂系统在控制领域成为一个热点话题。

由于不确定性问题在许多实际系统中是不可避免的,柔性关节机械臂系统也不例外。那么通过高阶滑模控制技术可以有效削弱柔性关节机械臂系统不确定性带来的影响。本文主要研究高阶滑模控制对于单连杆柔性关节机械臂系统的镇定控制问题,创新点和研究意义主要有以下三个方面。(1)针对柔性关节机械臂系统设计的高阶滑模控制器,避免了一阶滑模中存在的相对阶限制的问题,扩展了滑模控制的应用范围。(2)利用构造的李雅普诺夫函数,使系统的输出信号始终保持在有限时间内收敛。(3)与文献[24]相比,本文将高阶滑模算法应用到单连杆柔性关节机械臂系统,用实例验证该算法的有效性和优越性,对于单连杆机械臂的算法研究具有重要意义。

符号表示 R 表示所有实数的集合, R^n 表示 n 维的欧几里德空间, $[x]^\alpha = \text{sign}(x)|x|^\alpha$ 。

1 系统描述及引理

本文以欧拉-拉格朗日方程为基础,用以下动力学模型描述单连杆柔性关节机械臂^[26,27]

$$\begin{aligned} M(q_1)\ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1) + G(q_1) + F(\dot{q}_1) + Kq_1 &= Kq_2, \\ J\ddot{q}_2 + B\dot{q}_2 + K(q_2 - q_1) &= u, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1 \in R$ 分别表示连杆位置、速度和加速度; $M(q_1) \in R$ 表示连杆惯性; $C(q_1, \dot{q}_1) \in R$ 代表向心力-科氏力; $G(q_1), F(\dot{q}_1) \in R$ 分别代表重力、摩擦力; $q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2 \in R$ 分别表示转子角位置、速度和加速度; K, J 和 $B \in R$ 分别表示关节弹性、执行器惯性和自然阻尼项; $u \in R$ 是控制输入。

定义 $x_1 = q_1, x_2 = \dot{q}_1, x_3 = q_2$ 和 $x_4 = \dot{q}_2$,然后将动态模型(1)转换为以下单输入单输出(SISO)的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = M^{-1}(x_1)Kx_3 + M^{-1}(x_1)(-C(x_1, x_2) - G(x_1) - F(x_2) - Kx_1), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = J^{-1}u + J^{-1}(-Bx_4 - K(x_3 - x_1)), \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{x}_i \in R, i=1,2,3,4$ 为系统状态。

滑动变量 s 是系统输出,令 $s_i = s^{(i-1)}, s_1 = s = \mathbf{x}_1, \dot{s}_1 = \dot{s}, \dot{s}_2 = \ddot{s}, \dot{s}_3 = s^{(3)}, \dot{s}_4 = s^{(4)}$ 将系统转换为

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = s_2, \\ \dot{s}_2 = s_3, \\ \dot{s}_3 = s_4, \\ \dot{s}_4 = A(t, \mathbf{x}) + B(t, \mathbf{x})\mathbf{u}, \end{cases} \quad (3)$$

式中 $s^{(4)} = J^{-1}M^{-1}(\mathbf{x}_1)K(-B\mathbf{x}_4 - K(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)) + M^{-1}(\mathbf{x}_1)(-C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - G(\mathbf{x}_1) - M^{-1}(\mathbf{x}_1)K\mathbf{x}_3 + M^{-1}(\mathbf{x}_1)(-C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - G(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2) - K\mathbf{x}_1)) + J^{-1}M^{-1}(\mathbf{x}_1)K\mathbf{u}$ 。且 $A(t, \mathbf{x}) = J^{-1}M^{-1}(\mathbf{x}_1)K(-B\mathbf{x}_4 - K(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)) + M^{-1}(\mathbf{x}_1)(-C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - G(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2) - K(M^{-1}(\mathbf{x}_1)K\mathbf{x}_3 + M^{-1}(\mathbf{x}_1)(-C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - G(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2) - K\mathbf{x}_1)))$ 和 $B(t, \mathbf{x}) = J^{-1}M^{-1}(\mathbf{x}_1)K$ 是光滑函数。

本文的目标是设计一个恰当的高阶滑模控制器,使 $s = \dot{s} = \ddot{s} = s^{(3)} = 0$ 在有限时间内稳定。为了达到控制目标,引入以下假设及引理。

假设 1 对于系统(3),存在一个函数 $\bar{A}(\mathbf{x})$ 和一个常数 $\underline{B} > 0$,使得

$$|A(t, \mathbf{x})| \leq \bar{A}(\mathbf{x}), |B(t, \mathbf{x})| \geq \underline{B} > 0。$$

引理 1^[28] 如果 $p_1 > 0$ 和 $0 < p_2 \leq 1$,那么对于 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R$,不等式成立

$$|[\mathbf{x}]^{p_1 p_2} - [\mathbf{y}]^{p_1 p_2}| \leq 2^{1-p_2} |[\mathbf{x}]^{p_1} - [\mathbf{y}]^{p_1}|^{p_2}。$$

引理 2^[29] 设 c 和 d 为正的常数。给定任意实数 $\gamma > 0$,得到

$$|\mathbf{x}|^c |\mathbf{y}|^d \leq \frac{c}{c+d} \gamma |\mathbf{x}|^{c+d} + \frac{d}{c+d} \gamma^{-\frac{c}{d}} |\mathbf{y}|^{c+d}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R。$$

引理 3^[30] 对于 $\forall \mathbf{x}_i \in R, i=1,2,3,\dots,n$,不等式成立 $(|\mathbf{x}_1| + \dots + |\mathbf{x}_n|)^p \leq |\mathbf{x}_1|^p + \dots + |\mathbf{x}_n|^p$ 。

2 主要结果

定理 若系统(1)满足假设 1,则存在常数 $\beta_i > 0, i=1,2,3,4$,建立 HOSM 控制器

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & -\frac{\bar{A}(\mathbf{x})}{\underline{B}} \text{sign}([\mathbf{s}^{(3)}]^{\frac{a}{r_4}} + \beta_3^{\frac{a}{r_4}} ([\ddot{s}]^{\frac{a}{r_3}} + \beta_2^{\frac{a}{r_3}} ([\dot{s}]^{\frac{a}{r_2}} + \beta_1^{\frac{a}{r_2}} [s]^{\frac{a}{r_1}}))) \\ & - \beta_4 ([s^{(3)}]^{\frac{a}{r_4}} + \beta_3^{\frac{a}{r_4}} ([\ddot{s}]^{\frac{a}{r_3}} + \beta_2^{\frac{a}{r_3}} ([\dot{s}]^{\frac{a}{r_2}} + \beta_1^{\frac{a}{r_2}} [s]^{\frac{a}{r_1}})))^{\frac{r_5}{a}}, \end{aligned} \quad (4)$$

使 $s = \dot{s} = \ddot{s} = s^{(3)} = 0$ 在有限时间内稳定,式中 $\mathbf{a}, \mathbf{r}_j (j=1,2,3,4,5)$ 和 τ 满足 $a \geq r_1, r_{j+1} = r_j - \tau$ 。

证明 第一步,选择候选李雅普诺夫函数

$$V_1(s_1) = \frac{r_1}{2\rho + \tau} |s_1|^{\frac{2\rho + \tau}{r_1}}。 \quad (5)$$

对 V_1 沿系统(1)求时间的导数可得

$$\dot{V}_1(s_1) = [s_1]^{\frac{2\rho - r_2}{r_1}} s_2 = [s_1]^{\frac{2\rho - r_2}{r_1}} (s_2 - s_2^*) + [s_1]^{\frac{2\rho - r_2}{r_1}} s_2^*, \quad (6)$$

式中 $s_2^* = -\beta_1 [\xi_1]^{\frac{r_2}{a}}$ 是设计的一个虚拟控制器,且 $\beta_1 > 4, \xi_1 = [s_1]^{\frac{a}{r_1}}$ 。将 s_2^* 代入(6)式可得

$$\dot{V}_1(s_1) \leq -4\xi_1^{\frac{2\rho}{a}} + [\xi_1]^{\frac{2\rho - r_2}{a}} (s_2 - s_2^*)。$$

第二步,基于虚拟控制器 s_2^* 和 $\xi_2 = [s_2]^{\frac{a}{r_2}} - [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}$,引入加幂积分器 $W_2(\bar{s}_2) =$

$\int_{s_2^*}^{s_2} [\|u\|^{\frac{a}{r_2}} - \|s_2^*\|^{\frac{a}{r_2}}]^{\frac{2\rho-r_2+\tau}{a}} du$, 构造候选李雅普诺夫函数 $V_2(\bar{s}_2)$

$$V_2(\bar{s}_2) = V_1(s_1) + W_2(\bar{s}_2). \quad (7)$$

沿着系统对候选李雅普诺夫函数 $V_2(\bar{s}_2)$ 求导, 可得

$$\dot{V}_2(\bar{s}_2) = \dot{V}_1(s_1) + \dot{W}_2(\bar{s}_2) \leq -4\xi_1^{\frac{2\rho}{a}} + [\xi_1]^{\frac{2\rho-r_2}{a}}(s_2 - s_2^*) + \frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_1} s_1 + \frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_2} s_2, \quad (8)$$

式中 $\frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_2} s_2$ 的计算 $\frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_2} s_2 = [\xi_2]^{\frac{2\rho-r_2+\tau}{a}} s_3$ 。

将上式代入(8)式可得

$$\dot{V}_2(\bar{s}_2) \leq -4\xi_1^{\frac{2\rho}{a}} + [\xi_2]^{\frac{2\rho-r_2+\tau}{a}} s_3^* + [\xi_1]^{\frac{2\rho-r_2}{a}}(s_2 - s_2^*) + \frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_1} s_1 + [\xi_2]^{\frac{2\rho-r_2+\tau}{a}}(s_3 - s_3^*). \quad (9)$$

将式中的 $[\xi_1]^{\frac{2\rho-r_2}{a}}(s_2 - s_2^*)$ 和 $\frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_1} s_1$ 两项合并为一项, 并由引理 1 和引理 2 可得

$$\begin{aligned} [\xi_1]^{\frac{2\rho-r_2}{a}}(s_2 - s_2^*) &\leq |\xi_1|^{\frac{2\rho-r_2}{a}} | [s_2]^{\frac{a}{r_2} \times \frac{r_2}{a}} - [s_2^*]^{\frac{a}{r_2} \times \frac{r_2}{a}} | \\ &\leq 2^{1-\frac{r_2}{a}} |\xi_1|^{\frac{2\rho-r_2}{a}} |\xi_2|^{\frac{r_2}{a}} [\xi_1]^{\frac{2\rho-r_2}{a}}(s_2 - s_2^*) \\ &\leq \frac{1}{2} |\xi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + c_2 |\xi_2|^{\frac{2\rho}{a}}, \end{aligned}$$

式中 $\gamma = \frac{\rho}{2^{1-\frac{r_2}{a}}(2\rho-r_2)}$, $c_2 = 2^{\frac{r_2}{a}} \frac{r_2}{\rho} (r^{-1})^{\frac{2\rho+\tau-r_1}{r_2}}$ 。由引理 1 得到下面公式,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_1} s_1 &\leq \frac{2\rho-r_2+\tau}{a} |s_2 - s_2^*| |\xi_2|^{\frac{2\rho-r_2+\tau}{a}-1} \left| \frac{\partial [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}}{\partial s_1} s_1 \right| \\ &\leq \frac{2\rho-r_2+\tau}{a} 2^{1-\frac{r_2}{a}} |\xi_2|^{\frac{2\rho-r_2+\tau}{a}-1+\frac{r_2}{a}} \left| \frac{\partial [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}}{\partial s_1} s_1 \right|, \end{aligned} \quad (10)$$

将 s_2^* 代入(10)式可将其变换为 $\left| \frac{\partial [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}}{\partial s_1} s_1 \right| \leq \frac{a}{r_1} \beta_1^{\frac{a}{r_2}} |\xi_1|^{1-\frac{r_1}{a}}$ 。

由引理 2 可得

$$\left| \frac{\partial [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}}{\partial s_1} s_1 \right| \leq \left(\frac{a}{r_1} \beta_1^{\frac{a}{r_2}} |\xi_1|^{1-\frac{r_1}{a}} \right) (|\xi_2|^{\frac{r_2}{a}} + \beta_1 |\xi_1|^{\frac{r_2}{a}}) \leq \eta_1 (|\xi_1|^{\frac{a-\tau}{a}} + |\xi_2|^{\frac{a-\tau}{a}}), \quad (11)$$

式中 $\eta_1 = \max \left\{ \frac{a(a-\tau)}{r_1(a-\tau)} \beta_1^{\frac{a}{r_2}} + \frac{a}{r_1} \beta_1^{1+\frac{a}{r_2}}, \frac{ar_2}{r_1(a-\tau)} \beta_1^{\frac{a}{r_2}} \right\}$ 是一个正的常数。由式, 可进一步得到

$$\frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_1} s_1 \leq \left| \frac{\partial W_2(\bar{s}_2)}{\partial s_1} s_1 \right| \leq \frac{1}{2} |\xi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + \bar{c}_2 |\xi_2|^{\frac{2\rho}{a}},$$

式中 $\bar{c}_2 = \frac{(2\rho-r_3)2^{1-\frac{r_2}{a}}\eta_1}{a} + \frac{(2\rho-r_3)2^{1-\frac{r_2}{a}}\eta_1(2\rho+\tau-a)}{\rho a} \times \left(\frac{(2\rho-r_3)2^{1-\frac{r_2}{a}}\eta_1(a-\tau)}{\rho a} \right)^{\frac{a-\tau}{2\rho+\tau-a}}$ 。

因此, 不等式成立 $\dot{V}_2(\bar{s}_2) \leq -3\xi_1^{\frac{2\rho}{a}} + (c_2 + \bar{c}_2)\xi_2^{\frac{2\rho}{a}} + [\xi_2]^{\frac{2\rho-r_2+\tau}{a}} s_3^* + [\xi_2]^{\frac{2\rho-r_2+\tau}{a}}(s_3 - s_3^*)$ 。

设计虚拟控制器 $s_3^* = -\beta_2[\xi_2]^{\frac{r_3}{a}}$, 且 $\beta_2 \geq 3 + c_2 + \bar{c}_2$, 从而 $\dot{V}_2(\bar{s}_2) \leq -3(\xi_1^{\frac{2\rho}{a}} + \xi_2^{\frac{2\rho}{a}}) + [\xi_2]^{\frac{2\rho-r_2+\tau}{a}}(s_3 - s_3^*)$ 。

第三步,选择候选李雅普诺夫函数

$$V_3(\bar{s}_3) = V_2(\bar{s}_2) + W_3(\bar{s}_3), \quad (12)$$

式中 $W_3(\bar{s}_3) = \int_{s_3^*}^{\bar{s}_3} [\bar{u}]^{\frac{a}{r_3}} - [s_3^*]^{\frac{a}{r_3}}]^{\frac{2\rho-r_3+\tau}{a}} d\bar{u}$, 对 $V_3(\bar{s}_3)$ 求关于时间 t 的导数

$$\dot{V}_3(\bar{s}_3) = \dot{V}_2(\bar{s}_2) + \dot{W}_3(\bar{s}_3) \leq -3(\xi_1^{\frac{2\rho}{a}} + \xi_2^{\frac{2\rho}{a}}) + \frac{\partial W_3(\bar{s}_3)}{\partial s_3} \dot{s}_3 + [\xi_2]^{\frac{2\rho-r_3}{a}} (s_3 - s_3^*) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial W_3(\bar{s}_3)}{\partial s_j} \dot{s}_j. \quad (13)$$

考虑虚拟控制器 s_4^* 和 $\frac{\partial W_3(\bar{s}_3)}{\partial s_3} \dot{s}_3 = [\xi_3]^{\frac{2\rho-r_3+\tau}{a}} s_4$, 则(13)式变换为

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(\bar{s}_3) \leq & -3(\xi_1^{\frac{2\rho}{a}} + \xi_2^{\frac{2\rho}{a}}) + [\xi_3]^{\frac{2\rho-r_3+\tau}{a}} s_4^* + [\xi_2]^{\frac{2\rho-r_3}{a}} (s_3 - s_3^*) \\ & + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial W_3(\bar{s}_3)}{\partial s_j} \dot{s}_j + [\xi_3]^{\frac{2\rho-r_3+\tau}{a}} (s_4 - s_4^*). \end{aligned} \quad (14)$$

注意,(3)式中后两项可以合成一项,由引理1和引理2可得

$$[\xi_2]^{\frac{2\rho-r_3}{a}} (s_3 - s_3^*) \leq |\xi_2|^{\frac{2\rho-r_3}{a}} |[s_3]^{\frac{a}{r_3} \times \frac{r_3}{a}} - [s_3^*]^{\frac{a}{r_3} \times \frac{r_3}{a}}| \leq \frac{1}{2} |\xi_2|^{\frac{2\rho}{a}} + c_3 |\xi_3|^{\frac{2\rho}{a}},$$

式中 $c_3 = 2^{-\frac{r_3}{a}} \frac{r_3}{\rho} \left(\frac{2^{1-\frac{r_3}{a}} (2\rho + \tau - r_2)}{\rho} \right)^{\frac{2\rho+\tau-r_2}{r_3}}$ 。下面,以(14)式中的 $\frac{\partial W_3(\bar{s}_3)}{\partial s_2} \dot{s}_2$ 为例来说明推导过程。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_3(\bar{s}_3)}{\partial s_2} \dot{s}_2 & \leq \left| \frac{\partial W_3(\bar{s}_3)}{\partial s_2} \dot{s}_2 \right| \leq \frac{2\rho - r_3 + \tau}{a} |s_3 - s_3^*| |\xi_3|^{\frac{2\rho-r_3+\tau}{a}-1} \left| \frac{\partial [s_3^*]^{\frac{a}{r_3}}}{\partial s_2} \dot{s}_2 \right| \\ & \leq \lambda_1 |\xi_3|^{\frac{2\rho-r_3+\tau}{a}-1+\frac{r_3}{a}} \left| \frac{\partial [s_3^*]^{\frac{a}{r_3}}}{\partial s_2} \dot{s}_2 \right|, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\lambda_1 = 2^{1-\frac{r_3}{a}} \frac{2\rho - r_3 + \tau}{a}$ 。(15)式中的 $\left| \frac{\partial [s_3^*]^{\frac{a}{r_3}}}{\partial s_2} \dot{s}_2 \right|$ 由 $\xi_2 = [s_2]^{\frac{a}{r_2}} - [s_2^*]^{\frac{a}{r_2}}$ 可进一步得到

$$\left| \frac{\partial [s_3^*]^{\frac{a}{r_3}}}{\partial s_2} \dot{s}_2 \right| = \beta_2^{\frac{a}{r_3}} \left| \frac{\partial \xi_2}{\partial s_2} \right| = \frac{a\beta_2^{\frac{a}{r_3}}}{r_2} |s_2|^{\frac{a}{r_2}-1} \leq \frac{a\beta_2^{\frac{a}{r_3}}}{r_2} (|\xi_2| + \beta_1^{\frac{a}{r_2}} |\xi_1|)^{1-\frac{r_2}{a}}. \quad (16)$$

由引理3可得 $\dot{s}_2 \leq |\xi_3|^{\frac{r_3}{a}} + \beta_2 |\xi_2|^{\frac{r_3}{a}}$, 将其代入(16)式可得

$$\left| \frac{\partial [s_3^*]^{\frac{a}{r_3}}}{\partial s_2} \dot{s}_2 \right| = \left(\frac{a\beta_2^{\frac{a}{r_3}}}{r_2} (|\xi_2| + \beta_1^{\frac{a}{r_2}} |\xi_1|)^{1-\frac{r_2}{a}} \right) (|\xi_3|^{\frac{r_3}{a}} + \beta_2 |\xi_2|^{\frac{r_3}{a}}) \leq \eta_2 (|\xi_1|^{\frac{a-\tau}{a}} + |\xi_2|^{\frac{a-\tau}{a}} + |\xi_3|^{\frac{a-\tau}{a}}),$$

式中 η_2 是一个正的常数。

由引理2,可以推出

$$\left| \frac{\partial W_3(\bar{s}_3)}{\partial s_2} \dot{s}_2 \right| \leq \lambda_1 \eta_2 |\xi_3|^{\frac{2\rho-r_3+\tau}{a}-1+\frac{r_3}{a}} \times (|\xi_1|^{\frac{a-\tau}{a}} + |\xi_2|^{\frac{a-\tau}{a}} + |\xi_3|^{\frac{a-\tau}{a}}) \leq \frac{1}{6} (|\xi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + |\xi_2|^{\frac{2\rho}{a}} + |\xi_3|^{\frac{2\rho}{a}}) + \lambda_2 |\xi_3|^{\frac{2\rho}{a}}.$$

此时 λ_2 是一个正的常数,进而 $\sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial W_3(\bar{s}_3)}{\partial s_j} \dot{s}_j \right| \leq \frac{1}{2} (|\xi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + |\xi_2|^{\frac{2\rho}{a}}) + \bar{c}_3 |\xi_3|^{\frac{2\rho}{a}}$, 式中 $\bar{c}_i, i=1,2,$

3,4 是一个正的常数。整理得到(17)式

$$\dot{V}_3(\bar{s}_3) \leq -2(\xi_1^{\frac{2\rho}{a}} + \xi_2^{\frac{2\rho}{a}}) + (c_3 + \bar{c}_3) \xi_3^{\frac{2\rho}{a}} + [\xi_3]^{\frac{2\rho-r_3+\tau}{a}} s_4^* + [\xi_3]^{\frac{2\rho-r_3+\tau}{a}} (s_4 - s_4^*), \quad (17)$$

式中 $\xi_3 = [s_3]^{\frac{a}{r_3}} - [s_3^*]^{\frac{a}{r_3}}$ 。将虚拟控制器设计为

$$s_4^* = -\beta_3 [\xi_3]^{\frac{r_4}{a}}, \quad (18)$$

式中 β_3 被定义为 $\beta_3 \geq 2 + c_3 + \bar{c}_3$ 。把(18)式和 β_3 代入式中,可得

$$\dot{V}_3(\bar{s}_3) \leq -2(\xi_1^{\frac{2\rho}{a}} + \xi_2^{\frac{2\rho}{a}} + \xi_3^{\frac{2\rho}{a}}) + [\xi_3]^{\frac{2\rho-r_3+\tau}{a}} (s_4 - s_4^*).$$

第四步,选择候选李雅普诺夫函数为

$$V_4(\bar{s}_4) = V_3(\bar{s}_3) + W_4(\bar{s}_4), \quad (19)$$

式中 $W_4(\bar{s}_4) = \int_{s_4^*}^{s_4} [[u]^{\frac{a}{r_4}} - [s_4^*]^{\frac{a}{r_4}}]^{\frac{2\rho-r_4+\tau}{a}} du$, $V_4(\bar{s}_4)$ 关于时间的一阶导数为

$$\dot{V}_4(\bar{s}_4) = \dot{V}_3(\bar{s}_3) + \dot{W}_4(\bar{s}_4) \leq -2(\xi_1^{\frac{2\rho}{a}} + \xi_2^{\frac{2\rho}{a}} + \xi_3^{\frac{2\rho}{a}}) + [\xi_3]^{\frac{2\rho-r_4}{a}} (s_4 - s_4^*) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial W_4(\bar{s}_4)}{\partial s_j} \dot{s}_j + \frac{\partial W_4(\bar{s}_4)}{\partial s_4} \dot{s}_4. \quad (20)$$

进一步,(20)式中的两项通过引理 1 和引理 2,可化简为

$$[\xi_3]^{\frac{2\rho-r_4}{a}} (s_4 - s_4^*) \leq |\xi_3|^{\frac{2\rho-r_4}{a}} |[s_4]^{\frac{a}{r_4} \times \frac{r_4}{a}} - [s_4^*]^{\frac{a}{r_4} \times \frac{r_4}{a}}| \leq \frac{1}{2} |\xi_3|^{\frac{2\rho}{a}} + c_4 |\xi_4|^{\frac{2\rho}{a}}, \quad (21)$$

式中 $c_4 = 2^{-\frac{r_4}{a}} \frac{r_4}{\rho} \left(2^{1-\frac{r_4}{a}} (2\rho + \tau - r_3) \right)^{\frac{2\rho+\tau-r_3}{r_4}}$ 。

对(20)式中包含的 $\frac{\partial W_4(\bar{s}_4)}{\partial s_3} \dot{s}_3$ 进行计算,可得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_4(\bar{s}_4)}{\partial s_3} \dot{s}_3 &\leq \left| \frac{\partial W_4(\bar{s}_4)}{\partial s_3} \dot{s}_3 \right| \\ &\leq \frac{2\rho - r_4 + \tau}{a} |s_4 - s_4^*| |\xi_4|^{\frac{2\rho-r_4+\tau}{a}-1} \left| \frac{\partial [s_4^*]^{\frac{a}{r_4}}}{\partial s_3} \dot{s}_3 \right| \\ &\leq \lambda_a |\xi_4|^{\frac{2\rho-r_4+\tau}{a}-1+\frac{r_4}{a}} \left| \frac{\partial [s_4^*]^{\frac{a}{r_4}}}{\partial s_3} \dot{s}_3 \right|, \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $\lambda_a = 2^{1-\frac{r_4}{a}} \frac{2\rho - r_4 + \tau}{a}$ 。根据 $\dot{s}_3 \leq |\xi_4|^{\frac{r_4}{a}} + \beta_3 |\xi_3|^{\frac{r_4}{a}}$ 和引理 3,式中的 $\left| \frac{\partial [s_4^*]^{\frac{a}{r_4}}}{\partial s_3} \dot{s}_3 \right|$ 推导如下

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial [s_4^*]^{\frac{a}{r_4}}}{\partial s_3} \dot{s}_3 \right| &= \left(a\beta_3^{\frac{a}{r_4}} (|\xi_3| + |\beta_2^{\frac{a}{r_3}} \xi_2|)^{1-\frac{r_3}{a}} \right) (|\xi_4|^{\frac{r_4}{a}} + \beta_3 |\xi_3|^{\frac{r_4}{a}}) \\ &\leq \eta_3 (|\xi_2|^{\frac{a-\tau}{a}} + |\xi_3|^{\frac{a-\tau}{a}} + |\xi_4|^{\frac{a-\tau}{a}}), \end{aligned} \quad (23)$$

式中 η_3 是一个正的常数。将(23)代入(22),可得 $\left| \frac{\partial W_4(\bar{s}_4)}{\partial s_3} \dot{s}_3 \right| \leq \frac{1}{6} (|\xi_2|^{\frac{2\rho}{a}} + |\xi_3|^{\frac{2\rho}{a}} + |\xi_4|^{\frac{2\rho}{a}}) + \lambda_\beta |\xi_4|^{\frac{2\rho}{a}}$,式

中 λ_β 是一个正的常数。对 $\sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial W_4}{\partial s_j} \dot{W}_j \right|$ 进行放缩,可得下列不等式成立

$$\sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial W_4}{\partial s_j} \dot{W}_j \right| \leq \frac{1}{2} (|\xi_1|^{\frac{2\rho}{a}} + |\xi_2|^{\frac{2\rho}{a}} + |\xi_3|^{\frac{2\rho}{a}}) + \bar{c}_4 |\xi_4|^{\frac{2\rho}{a}}. \quad (24)$$

将(21)和(24)代入(20)式,可得

$$\dot{V}_4(\bar{s}_4) \leq -\sum_{j=1}^3 \xi_j^{\frac{2\rho}{a}} + (c_4 + \bar{c}_4) \xi_4^{\frac{2\rho}{a}} + [\xi_4]^{\frac{2\rho-r_3+\tau}{a}} (A(t, \mathbf{x}) + B(t, \mathbf{x})\mathbf{u}), \quad (25)$$

式中 $c_4 = 2^{-\frac{r_4}{a}} \frac{r_4}{\rho} \left(2^{1-\frac{r_4}{a}} (2\rho + \tau - r_3) \right)^{\frac{2\rho+\tau-r_3}{r_4}}$ 。定义 $\xi_4 = [s_4]^{\frac{a}{r_4}} - [s_4^*]^{\frac{a}{r_4}}$,设计虚拟控制器为 $s_4^* = -\beta_3 [\xi_3]^{\frac{r_4}{a}}$ 。

并设计 HOSM 控制器

$$\mathbf{u} = -\frac{\bar{A}(\mathbf{x})}{B} \text{sign}(\xi_4) - \beta_4 [\xi_4]^{\frac{r_5}{a}}, \quad (26)$$

式中 $\beta_4 \geq 3 + \mathbf{c}_4 + \bar{\mathbf{c}}_4$, 将控制器(26)代入(25)式中可得 $\dot{V}_4(\bar{s}_4) \leq -\sum_{j=1}^4 \xi_j^{\frac{2\rho}{a}}$ 。

注意,根据(7)式,(12)式以及(19)式可得

$$\begin{aligned} V_4(\bar{s}_4) &= V_1(s_1) + \sum_{j=2}^4 W_j(s_j) = \frac{r_1}{2\rho + \tau} |s_1|^{\frac{2\rho + \tau}{r_1}} + \sum_{j=2}^4 \int_{s_j^*}^{s_j} [\|\mathbf{u}\|^{\frac{a}{r_j}} - [s_j^*]^{\frac{a}{r_j}}]^{\frac{2\rho - r_j + \tau}{a}} d\mathbf{u} \\ &\leq \frac{r_1}{2\rho + \tau} |\xi_1|^{\frac{2\rho + \tau}{a}} + \sum_{j=2}^4 \int_{s_j^*}^{s_j} [\|\mathbf{u}\|^{\frac{a}{r_j}} - [s_j^*]^{\frac{a}{r_j}}]^{\frac{2\rho - r_j + \tau}{a}} d\mathbf{u}。 \end{aligned}$$

易见,对 $\sum_{j=2}^4 \int_{s_j^*}^{s_j} [\|\mathbf{u}\|^{\frac{a}{r_j}} - [s_j^*]^{\frac{a}{r_j}}]^{\frac{2\rho - r_j + \tau}{a}} d\mathbf{u}$ 进行放缩可得 $\sum_{j=2}^4 \int_{s_j^*}^{s_j} [\|\mathbf{u}\|^{\frac{a}{r_j}} - [s_j^*]^{\frac{a}{r_j}}]^{\frac{2\rho - r_j + \tau}{a}} d\mathbf{u} \leq \sum_{j=2}^4 |s_j - s_j^*| |\xi_j|^{\frac{2\rho - r_j + \tau}{a}} \leq \sum_{j=2}^4 2^{1 - \frac{r_j}{a}} |\xi_j|^{\frac{2\rho + \tau}{a}}$ 。令 $\lambda_0 = \max\left\{\frac{r_1}{2\rho + \tau}, \sum_{j=2}^4 2^{1 - \frac{r_j}{a}}\right\}$, 则 $V_4(\bar{s}_4)$ 可重写为 $V_4(\bar{s}_4) \leq \lambda_0 \sum_{j=1}^4 |\xi_j|^{\frac{2\rho + \tau}{a}}$ 。选择 $\alpha = \lambda_0^{-\frac{2\rho}{2\rho + \tau}}$ 可得 $\dot{V}_4(\bar{s}_4) + \alpha V_4^{\frac{2\rho}{2\rho + \tau}}(\bar{s}_4) \leq 0$ 。

注意 $\frac{2\rho}{2\rho + \tau} \in (0, 1)$, 根据有限时间李雅普诺夫理论^[31], 在控制器(4)的条件下, 系统在有限时间内指数稳定。

3 仿真例子

针对单连杆柔性关节机械臂系统^[32]

$$\begin{cases} ml^2 \ddot{\mathbf{q}}_1 + mgl \sin \mathbf{q}_1 + F(\dot{\mathbf{q}}_1) + K\mathbf{q}_1 = K\mathbf{q}_2, \\ J\ddot{\mathbf{q}}_2 + B\dot{\mathbf{q}}_2 + K(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) = \mathbf{u}, \end{cases} \quad (27)$$

式中 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in R, F(\dot{\mathbf{q}}_1) = \cos \dot{\mathbf{q}}_1, m = 12, l = 1, g = 9.8, K = 400, J = 10, B = 30$ 系统参数的说明见表 1。

表 1 单连杆柔性关节机器人系统的参数

Table 1 Parameters in a single-link flexible-joint manipulator

Parameters	Description	Unit
m	the mass of link	kg
l	the length of link	m
g	gravity acceleration	m/s ²
J	the stiffness	m/s ²
K	the joint flexibility	N • m/rad
B	the natural damping	

令 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}_1, \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}_1, \mathbf{x}_3 = \mathbf{q}_2$ 和 $\mathbf{x}_4 = \dot{\mathbf{q}}_2$, 系统(27)被重新写成

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{K}{ml^2} \mathbf{x}_3 - \frac{K}{ml^2} \mathbf{x}_1 - \frac{1}{ml^2} \cos \mathbf{x}_2 - \frac{g}{l} \sin \mathbf{x}_1, \\ \dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_4, \\ \dot{\mathbf{x}}_4 = \frac{1}{J} \mathbf{u} - \frac{B}{J} \mathbf{x}_4 - \frac{K}{J} (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)。 \end{cases} \quad (28)$$

初始条件为 $x_1(0) = -0.3, x_2(0) = 0.2, x_3(0) = 1.8, x_4(0) = 0$ 。参数 $\beta_1 = 10, \beta_2 = 2, \beta_3 = 1, \beta_4 = 0.2$ 且 $a = 1, \tau = \frac{1}{4}, r_1 = 1$ 。

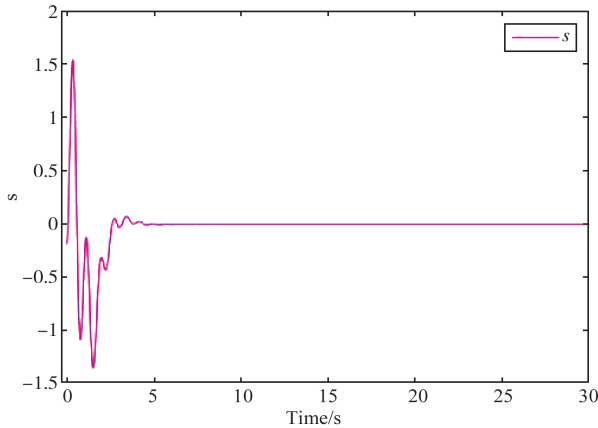


图1 在控制器(4)条件下滑动变量 s 的轨迹

Fig 1 Trajectory of sliding variable s under the condition of controller (4)

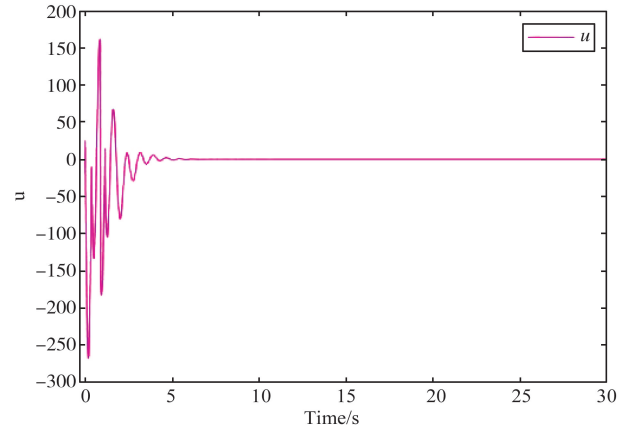


图2 控制输入 u 的轨迹

Fig 2 Trajectory of control input u

仿真结果如图 1,2 所示。图 1 为本文所定义的滑动变量 s 随时间 t 的变化曲线,不难发现,在本文提出的高阶滑模控制器作用下,滑动变量 s 能够快速精准的收敛到零。保证快速、高效的实现镇定,有助于提升系统的鲁棒性。图 2 表示的是控制输入 u 的曲线,当系统出现干扰影响时,控制器会迅速响应,削弱不确定性造成的抖振现象,快速收敛,极大地提高了对柔性关节机械臂系统的控制性能。

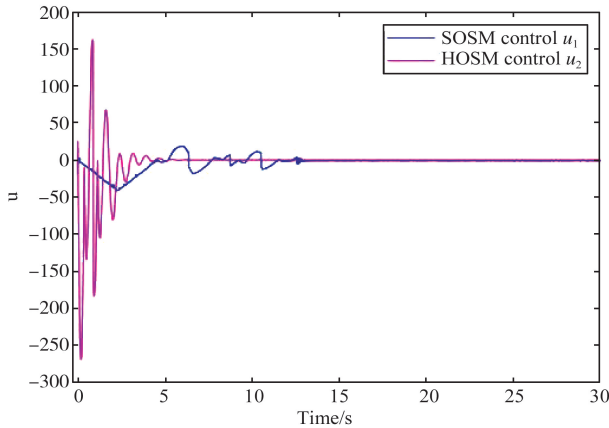


图3 HOSM 控制器 μ_1 和 SOSM 控制器 μ_2 的轨迹

Fig 3 Trajectory of HOSM controller μ_1 and SOSM controller μ_2

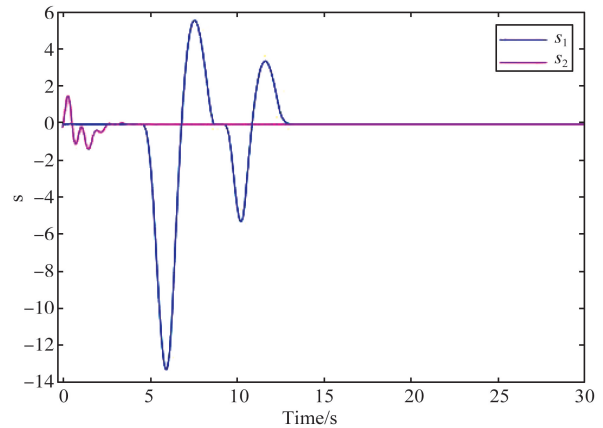


图4 在 HOSM 控制器 u_1 和 SOSM 控制器 u_2 条件下滑动变量 s_1 和 s_2 的轨迹

Fig 4 Trajectory of the sliding variable s_1 and s_2 under the condition of HOSM controller μ_1 and SOSM controller μ_2

为了更好地说明所提方法的优越性,我们对单连杆柔性关节机械臂系统设计的算法与文献[33]中提出的 SOSM 控制方法进行仿真比较,模拟结果如图 3,4 所示。

从图 3 和图 4 可以看出,虽然两种控制方法都能获得良好的控制性能,但是本文研究的 HOSM 控制方法使滑动变量 s 收敛速度更快、时间更短、控制器的响应更加迅速。因此,与文献[33]中 SOSM 控制方法相比,本文研究的 HOSM 控制方法具有更好地收敛性,大大缩短了系统的响应时间。此外,从图 3,4 中可以清楚地看出,在 HOSM 控制器的作用下,滑动变量 s 抖振幅度小、收敛快,说明本文提出的 HOSM 控制器能更好地抑制扰动的影响,削弱抖振现象。综上所述,实现了预期的控制目标。同时,对比仿真结果证明了

高阶滑模控制算法应用于单连杆柔性关节机械臂系统的优越性。

4 结论

本文针对单连杆柔性关节机械臂系统设计了一个高阶滑模控制器。通过设计的李雅普诺夫函数,保证输出信号在有限时间内收敛到零。其次,在控制器中引入符号函数抑制了抖振现象。最后,通过有限时间理论和李雅普诺夫稳定性理论,证明了该控制算法能够使单连杆柔性关节机械臂系统在有限时间内实现镇定控制。通过一个仿真例子证明了所提出控制算法的有效性。未来的工作将集中于将该方法扩展到 n -连杆机械臂系统的控制问题。

参 考 文 献

- [1] UTKIN V. Variable structure systems with sliding modes[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22(2): 212-222.
- [2] LIU L, DING S. Second-order sliding mode controller design subject to mismatched unbounded perturbations[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(18): 4706-4722.
- [3] DING S, MEI K, LI S. A new second-order sliding mode and its application to nonlinear constrained systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 64(6): 2545-2552.
- [4] LEVANT A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control[J]. International Journal of Control, 2003, 76(9-10): 924-941.
- [5] LI H, WANG J, LAM K, et al. Adaptive sliding mode control for interval type-2 fuzzy systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 2016, 46(12): 1654-1663.
- [6] DENG Y, ZHANG X, IM X, et al. Adaptive fuzzy tracking control for underactuated surface vessels with unmodeled dynamics and input saturation[J]. ISA Transactions, 2020, 103: 52-62.
- [7] MORENO J A, OSORIO M. Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(4): 1035-1040.
- [8] YAO B, TOMIZUKA M. Adaptive robust control of SISO nonlinear systems in a semi-strict feedback form[J]. Automatica, 1997, 33(5): 893-900.
- [9] LEE H, TOMIZUKA M. Robust adaptive control using a universal approximator for SISO nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(1): 95-106.
- [10] 张婧,梁兴越,夏建伟. 具有状态约束的随机非线性系统的自适应跟踪控制[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2019, 32(2): 8-13.
- [11] 沈宇凯,夏建伟. 基于非周期采样 Takagi-Sugeno 模糊系统的 H_∞ 控制[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2022, 35(4): 1-7.
- [12] LAGHROUCHE S, SMAOUI M, PLESTAN F, et al. Higher order sliding mode control based on optimal approach of an electropneumatic actuator[J]. International Journal of Control, 2006, 79(2): 119-131.
- [13] DING S, ZHENG W X, SUN J, et al. Second-order sliding-mode controller design and its implementation for buck converters[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2017, 14(5): 1990-2000.
- [14] TAGNE G, TALJ R, CHARARA A. Higher-order sliding mode control for lateral dynamics of autonomous vehicles, with experimental validation[C]. //2013 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). IEEE, 2013: 678-683.
- [15] LEVANT A, ALELISHVILI L. Integral high-order sliding modes[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(7): 1278-1282.
- [16] LEVANT A. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers[C]. //42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475). IEEE, 2003, 5: 4605-4610.
- [17] CHEN C L, PENG C C, YAU H T. High-order sliding mode controller with backstepping design for aeroelastic systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(4): 1813-1823.
- [18] CRUZ-ZZVZLA E, MORENO J A. Homogeneous high order sliding mode design: a Lyapunov approach[J]. Automatica, 2017, 80: 232-238.

- [19] DING S, LEVANT A, LI S. Simple homogeneous sliding-mode controller[J]. *Automatica*, 2016, 67: 22-32.
- [20] MEI K, DING S. HOSM controller design with an output constraint and its application[J]. *ISA Transactions*, 2021, 116: 71-80.
- [21] LIU L, ZHENG W X, DING S. An adaptive SOSM controller design by using a sliding-mode-based filter and its application to buck converter[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2020, 67(7): 2409-2418.
- [22] 刘业松. 单连杆柔性机械臂的滑模振动控制[J]. *新技术新工艺*, 2014, 7(3): 90-92.
- [23] 刘才山, 王建明, 阎绍泽, 等. 滑模变结构控制在柔性机械臂中的应用[J]. *天津大学学报*, 1999, 2(4): 113-116.
- [24] 李啸. 基于状态观测器的单连杆柔性机械臂自适应位置跟踪控制[D]. 烟台: 烟台大学, 2023.
- [25] DING S, PARK J H, CHEN C C. Second-order sliding mode controller design with output constraint[J]. *Automatica*, 2020, 112: 108704.
- [26] LING S, WANG H, LIU P X. Adaptive fuzzy dynamic surface control of flexible-joint robot systems with input saturation[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2019, 6(1): 97-107.
- [27] DIAO S, SUN W, SU S F, et al. Novel adaptive control for flexible-joint robots with unknown measurement sensitivity[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, doi: 10.1109/TASE.2023.3248178.
- [28] YUAN J, DING S, MEI K. Fixed-time SOSM controller design with output constraint[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102: 1567-1583.
- [29] QIAN C J, LIN W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1061-1079.
- [30] SUN Z Y, SHAO Y, CHEN C C, et al. Global output-feedback stabilization for stochastic nonlinear systems: a double-domination approach[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(15): 4635-4646.
- [31] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751-766.
- [32] DIAO S, SUN W, SU S F, et al. Adaptive fuzzy event-triggered control for single-link flexible-joint robots with actuator failures[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 52(8): 7231-7241.
- [33] YANG J, LI S, YU X. Sliding-mode control for systems with mismatched uncertainties via a disturbance observer[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, 60(1): 160-169.

(责任编辑: 刘庆松)