

模分复用系统中模式耦合与模式色散的统计特性研究

郭 瑶¹, 张 霞¹, 杜秋萍², 杨震山¹, 李建平³

(1.聊城大学 物理科学与信息工程学院, 山东 聊城 252059; 2.山东省光通信科学与技术重点实验室, 山东 聊城 252059;
3.广东工业大学 信息工程学院, 广东 广州 510006)

摘 要 对模分复用系统中模式耦合和模式色散的统计规律及特性进行了研究。利用基于密度矩阵理论的模式色散统计模型, 借助数值模拟分析得到了六模光纤中模式耦合引起的光场能量分布和相干性变化的规律以及与模式色散相关的各物理量的统计分布。结果表明, 光纤的随机扰动会造成光场在不同模式之间的相干性于很短的传输距离内迅速衰减为零, 因此在相干光通信系统中对模式信号进行处理时, 不仅根据能量耦合强度进行分组, 需要同时考虑模式间的能量耦合与相干性变化以作全局处理。同时发现, 六模光纤中一阶、二阶模式色散的统计分布能够用修正的偏振模色散公式加以描述。以上结论将为模分复用光信号的性能恢复提供理论依据, 并有效推动模分复用技术的实用化进程。

关键词 光纤通信; 模分复用; 模式耦合; 模式色散; 密度矩阵理论

中图分类号 TN913.7

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Study on Statistical Properties of Mode Coupling and Dispersion in Mode-Division Multiplexing Systems

GUO Yao¹, ZHANG Xia¹, DU Qiuping², YANG Zhenshan¹, LI Jianping³

(1. School of Physics Science and Information Engineering, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China; 2. Shandong Provincial key Laboratory of Optical Communications Science and Technology, Liaocheng 252059, China; 3. School of Information Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract In this paper, the statistical properties of mode coupling and modal dispersion in mode-division multiplexing systems are studied. Employing a statistical modal-dispersion model based on the density-matrix formalism, the mode-coupling induced variations of optical-field energy distribution and coherence, and the statistical distributions of various physical quantities concerning the modal dispersion in a six-mode fiber are numerically simulated. The results show that random perturbations of the fiber cause the coherence among different modes to decay rapidly to zero within a short propagation distance, therefore, when processing mode signals in coherent optical communication systems, it is important to consider both the energy coupling and coherence variation among the modes. It is also found that the statistical distributions of the first and second-order modal dispersion in the six-mode fiber can be described by a modified set of

收稿日期: 2023-01-08

基金项目: 国家自然科学基金优秀青年科学基金项目(62022029); 山东省自然科学基金项目(ZR2018MA044, ZR2022MF284)资助

通讯作者: 张霞, 女, 汉族, 博士, 教授, 研究方向: 光纤通信, E-mail: wenerzhang2002@163.com; 李建平, 男, 汉族, 博士, 教授, 国家优秀青年科学基金获得者, 博士生导师, 研究方向: 光纤通信, E-mail: jianping@gdut.edu.cn。

formulas originally derived for polarization mode dispersion. Our work can provide a theoretical guidance for performance recovery of optical signals in mode-division multiplexing systems and promote the practical applications of mode-division multiplexing technology.

Key words optical fiber communications; mode-division multiplexing; mode coupling; modal dispersion; density matrix formalism

1 引言

模分复用技术在利用多个正交模式有效提升光纤通信系统传输容量的同时,也带来了一系列亟待解决的问题^[1-6],比如低损耗光纤的结构设计、高纯度模式的激励、多个复用模式产生的模式耦合和模式色散效应以及接收端复用信号的性能恢复等。其中,模式耦合和模式色散是制约模分复用系统实用化的主要因素之一^[7-12]。模式耦合无论发生在传输光纤还是模式复用解复用器中,都会导致模分复用信号之间发生串扰,使接收端信号的误码率增大,而且它还会从实质上影响模式色散,进而限制系统的传输距离与容量。模式色散会造成光脉冲在传输过程中的展宽,导致信号失真,且随着传输距离的增大以及复用模式数量的增加,对信号传输质量的影响也会越大,这将会大大增加对模式色散进行数字信号处理(Digital Signal Processing, DSP)时的复杂度^[13]。因此,有必要对光纤中的模式耦合、模式色散的统计特性及变化规律进行研究,从而为下一步提取模式耦合和模式色散补偿的关键信息,并有效降低 DSP 的复杂度提供理论依据,为模分复用技术的实用化打下理论基础。

在研究方法方面,传统上通常采用 Stokes 理论^[14]来分析光纤中场态的随机演化,在可支持 J 个传播模式的光纤(即 J 维模式空间)中,采用 Stokes 理论分析法时,需要借助 $(J^2 - 1)$ 个 $J \times J$ 维的盖尔曼辅助矩阵^[15-16]来建立描述光场及其传输性质的 $(J^2 - 1)$ 维 Stokes 矢量。这种方法在分析目前商用的单模传输系统(实际上存在 2 个相互垂直的偏振模式)中的偏振效应问题时非常直观有效^[17],但是如果将其应用于存在多个模式的模分复用系统中时,显然随着模式数目 J 的增加,Stokes 矢量形式将愈加复杂,并且物理意义也会变得模糊。因此在模式数目为 J 的模分复用系统中,使用 Stokes 理论分析模式耦合、模式色散等损伤时将变得非常困难。前期我们课题组借鉴量子力学中的方法,提出了一种可描述任意 J 维模式空间中场态及其传输性质的密度矩阵理论^[18],该理论中用来描述光场及其传输性质的相关算符物理意义明确,构建简单直接且光场中的所有可观测信息都能够方便地提取,因此在分析任意维度的模分复用系统中模式耦合和模式色散等效应时具有极大优势。

本文研究了随机扰动下六模光纤中模式耦合和模式色散的统计规律及特性。首先将基于密度矩阵理论的模式耦合与模式色散的统计模型应用于六模光纤,借助数值模拟得到了由模式耦合引起的光场能量分布和相干性变化的规律、模式色散对光脉冲展宽的影响以及一阶和二阶模式色散的概率密度分布等,最后对同一统计样本下,典型的光纤通信波段 $1\ 548\ \text{nm} \sim 1\ 553\ \text{nm}$ 内的模式色散性质进行了仿真分析,相关结果将能够直接应用于模分复用系统数字信号处理模块中模式耦合和模式色散的均衡补偿。

2 模式耦合与模式色散的密度矩阵理论及统计模型

本节将重点阐述密度矩阵理论^[18],为下节中光纤模式耦合和色散的研究分析提供基本理论方法。频率为 ω 、在传播方向上 z 点处的单色电磁波的电场幅度为 $E(x, y, z) e^{i\omega t}$,可借用量子力学中的右矢 $|\psi(z, \omega)\rangle$ 表示(忽略时谐因子 $e^{i\omega t}$)。在 J 模光纤中,模式空间为 J 维, $|\psi\rangle$ 由 J 个正交归一的模式(基矢量)展开

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^J \psi_j |j\rangle, \psi_j = \langle j | \psi \rangle, \quad (1)$$

式中 $\langle j |$ 为 $|j\rangle$ 的对偶矢量, $\langle j | \psi \rangle$ 代表 $|j\rangle$ 和 $|\psi\rangle$ 的内积。通常,基矢量选择为一组自由模式 $\{|j\rangle, j=1, 2, \dots, J\}$,即理想光纤中的本征传播模式。由式(1)可看出, $|\psi\rangle$ 和 $\langle\psi|$ 可以分别由列向量(琼斯矢量) $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_J)^T$ 和 $\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_J^*)$ 表示,其中,上标“T”和“†”分别代表“转置”和“厄米共轭”。类似

地,模式空间中任意算符 $\hat{A}$ 的展开式为 $\hat{A} = \sum_{j,j'=1}^J A_{jj'} |j\rangle\langle j'|$,其中 $A_{jj'} = \langle j | \hat{A} | j' \rangle$,因此算符 $\hat{A}$ 能够用元素为 $A_{jj'}$ 的矩阵 $\mathbf{A}$ 来表示。在本文中,仅讨论无损耗的情况,因此 $\langle \psi | \psi \rangle$ (正比于电磁场的能量)始终保持不变,不失一般性,我们约定 $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ 。

2.1 密度矩阵理论

在密度矩阵理论中,为了统一地描述相干光(纯态)和部分相干光(混合态),借用量子力学中的密度矩阵算符表示电磁场状态

$$\hat{\rho} = \sum_{q=1,2,\dots} p_q \rho^{(q)} = \sum_{q=1,2,\dots} p_q |\psi^{(q)}\rangle\langle\psi^{(q)}|, \quad (2)$$

式中 $\rho^{(q)} = |\psi^{(q)}\rangle\langle\psi^{(q)}|$ 为纯态 $|\psi^{(q)}\rangle$ 所对应的密度算符, p_q 为 $|\psi^{(q)}\rangle$ 出现的概率。由 $p_q > 0$, $\sum_{q=1,2,\dots} p_q = 1$,以及 $\langle \psi_q | \psi_q \rangle = 1$,可证明 $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ 。这里,利用密度算符 $\hat{\rho}$ 就能够很方便地获取光场的可观测信息。在相干光通信中,需要分析光场能量在不同模式之间的分布以及光场在各模式之间的相干性,这可以通过密度算符 $\hat{\rho}$ 直接计算得到。对于选定的正交完备基 $\{|j\rangle, j=1,2,\dots,J\}$,光场 $\hat{\rho}$ 分布在模式 $|j\rangle$ 中的能量(相对于光场 $\hat{\rho}$ 的总能量)为

$$P_j = \langle j | \hat{\rho} | j \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} |j\rangle\langle j|), \quad (3)$$

而光场在模式 $|j\rangle$ 和 $|j'\rangle$ 之间的相干性为

$$C_{jj'} = \langle j | \hat{\rho} | j' \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} |j'\rangle\langle j|). \quad (4)$$

在光纤中,频率为 ω 的场态 $\hat{\rho}(z, \omega)$ 沿 z 方向的演化方程为

$$i\partial \hat{\rho}(z, \omega) / \partial z = [\hat{Z}(z, \omega), \hat{\rho}(z, \omega)], \quad (5)$$

式中 i 为虚数单位, $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$,而 $\hat{Z}$ 为厄米($\hat{Z}^\dagger = \hat{Z}$)的局域模式传播(Local Mode Propagation, LMP)算符,其特征值与特征矢量分别代表局域传输常数和局域传输本征模。式(5)的普遍解可写为

$$\hat{\rho}(z, \omega) = \hat{U}(z, z'; \omega) \hat{\rho}(z', \omega) \hat{U}^\dagger(z, z'; \omega), \quad (6)$$

式中 $\hat{U}(z, z'; \omega)$ 为从 z' 到 z 的么正($\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{I}$, $\hat{I}$ 为单位算符)演化算符,遵循微分演化方程

$$i\partial \hat{U}(z, z'; \omega) / \partial z = \hat{Z}(z, \omega) \hat{U}(z, z'; \omega), \quad (7)$$

并显然满足初始条件 $\hat{U}(z = z', z'; \omega) = \hat{I}$ 。

通常情况下,光场也是频率 ω 的函数。假设初始位置处 $\hat{\rho}(z')$ 与 ω 无关,则由式(6)和(7)可以导出位置 z 处场态 $\hat{\rho}(z, \omega)$ 随频率变化的微分方程

$$i\partial \hat{\rho}(z, \omega) / \partial \omega = [\hat{\Omega}(z, z'; \omega), \hat{\rho}(z, \omega)], \quad (8)$$

式中 $\hat{\Omega}(z, z'; \omega)$ 为厄米模式色散(MD)算符

$$\hat{\Omega}(z, z'; \omega) \equiv i\hat{U}_\omega(z, z'; \omega) \hat{U}^\dagger(z, z'; \omega), \hat{U}_\omega \equiv \partial \hat{U} / \partial \omega, \quad (9)$$

其特征向量 $\{|p_j\rangle, j=1,2,\dots,J\}$ 和特征值 $\{\tau_{p_j}\}$ 分别代表输出主态和相应的群时延,从而完全地表征了光纤的一阶模式色散性质。根据 $\hat{\Omega}$ 的定义式(9)和 $\hat{U}$ 的演化方程式(7),还可以进一步得到 $\hat{\Omega}$ 沿 z 方向变化的微分方程和级联规则

$$i\partial \hat{\Omega}(z, z'; \omega) / \partial z = i\partial \hat{Z}(z, \omega) / \partial \omega + [\hat{Z}(z, \omega), \hat{\Omega}(z, z'; \omega)], \quad (10)$$

$$\hat{\Omega}(z_3, z_1; \omega) = \hat{\Omega}(z_3, z_2; \omega) + \hat{U}(z_3, z_2; \omega) \hat{\Omega}(z_2, z_1; \omega) \hat{U}^\dagger(z_3, z_2; \omega). \quad (11)$$

对于模式色散算符的频率导数 $\hat{\Omega}_\omega \equiv \partial \hat{\Omega} / \partial \omega$,相应的方程可通过对式(10)和(11)取频率微分并结合 $\hat{U}$ 的么正性质得到,这里仅根据后面研究的需要写出 $\hat{\Omega}_\omega$ 的级联规则

$$\hat{\Omega}_\omega(z_3, z_1; \omega) = \hat{\Omega}_\omega(z_3, z_2; \omega) + \hat{U}(z_3, z_2; \omega) \hat{\Omega}_\omega(z_2, z_1; \omega) \hat{U}^\dagger(z_3, z_2; \omega) - i[\hat{\Omega}(z_3, z_2; \omega), \hat{\Omega}(z_3, z_1; \omega)]. \quad (12)$$

光纤的二阶色散可以通过 $\hat{\Omega}$ 和 $\hat{\Omega}_\omega$ 来定量表征,具体如:首先,计算 $\hat{\Omega}$ 在频率 $\omega + \delta\omega$ ($\delta\omega$ 为足够小的频率变化量)处的值 $\hat{\Omega}(\omega + \delta\omega) = \hat{\Omega}(\omega) + \hat{\Omega}_\omega(\omega)\delta\omega$,并求出 $\hat{\Omega}(\omega)$ 和 $\hat{\Omega}(\omega + \delta\omega)$ 的特征值 $\tau_{p_1}(\omega) \geq \tau_{p_2}(\omega) \geq \dots \tau_{p_J}(\omega)$, $\tau_{p_1}(\omega + \delta\omega) \geq \tau_{p_2}(\omega + \delta\omega) \geq \dots \tau_{p_J}(\omega + \delta\omega)$ 以及相应的特征矢量 $|p_{j=1,2,\dots,J}; \omega\rangle$, $|p_{j=1,2,\dots,J}; \omega + \delta\omega\rangle$,然后,即可计算模式相关色度色散(mode-dependent chromatic dispersion, MD CD) τ_{p_j} 以及主态变化趋势(Tendency for principle states to change, TPSC) T_p

$$\tau_{p_j}(\omega) \equiv \partial \tau_{p_j}(\omega) / \partial \omega = [\partial \tau_{p_j}(\omega + \delta\omega) - \partial \tau_{p_j}(\omega)] / \delta\omega, \quad (13)$$

$$T_p(\omega) = [\tau_{p_1}(\omega) - \tau_{p_J}(\omega)] [|\hat{\rho}_{p_1,\omega}(\omega)| + |\hat{\rho}_{p_2,\omega}(\omega)| + \dots + |\hat{\rho}_{p_J,\omega}(\omega)|] / J, \quad (14)$$

式中

$$\rho_{p_j,\omega}(\omega) \equiv \partial(|p_j; \omega\rangle\langle p_j; \omega|) / \partial \omega = (|p_j; \omega + \delta\omega\rangle\langle p_j; \omega + \delta\omega| - |p_j; \omega\rangle\langle p_j; \omega|) / \delta\omega. \quad (15)$$

式(13)~(15)定量描述了光纤中的群时延及模式主态随频率的变化,即二阶模式色散。

结合密度算符 $\hat{\rho}$ 和 MD 算符 $\hat{\Omega}$,还能够直接获得光场脉冲的中心群时延和时间展宽等信息。如上所述, MD 算符 $\hat{\Omega}$ 的特征矢量 $\{|p_j\rangle, j=1,2,\dots,J\}$ 和特征值 $\{\tau_{p_j}\}$ 分别代表输出主模和相应的群时延,而 $\hat{\Omega}$ 是厄米算符,其特征矢量(输出主模)构成一组正交完备基。由式(3)可知输出光场 $\hat{\rho}$ 分布在 $\{|p_j\rangle, j=1,2,\dots,J\}$ 中的能量为 $P_j = \text{Tr}(\hat{\rho}|p_j\rangle\langle p_j|)$,因此,相应光场的群时延均值为

$$\langle \tau \rangle = \sum_{j=1}^J P_j \tau_{p_j} = \sum_{j=1}^J \text{Tr}(\hat{\rho}|p_j\rangle\langle p_j|) \tau_{p_j} = \text{Tr}(\hat{\rho} \sum_{j=1}^J \tau_{p_j} |p_j\rangle\langle p_j|) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\Omega}), \quad (16)$$

式中 $\langle \rangle$ 表示以主态模式能量分布 $\{P_j, j=1,2,\dots,J\}$ 为权重的平均。类似的,光场的群时延均方值和方差分别为

$$\langle \tau^2 \rangle = \sum_{j=1}^J P_j \tau_{p_j}^2 = \sum_{j=1}^J \text{Tr}(\hat{\rho}|p_j\rangle\langle p_j|) \tau_{p_j}^2 = \text{Tr}(\hat{\rho} \sum_{j=1}^J \tau_{p_j}^2 |p_j\rangle\langle p_j|) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\Omega}^2), \quad (17)$$

$$\langle \Delta \tau^2 \rangle = \langle \tau^2 \rangle - \{\langle \tau \rangle\}^2 = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\Omega}^2) - \{\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\Omega})\}^2. \quad (18)$$

物理上,均值 $\langle \tau \rangle$ 对应于输出脉冲中心的时间延迟, $\langle \Delta \tau^2 \rangle$ 表示输出脉冲的时间展宽。

2.2 统计模型

在实际的传输链路中,光纤不可避免地会受到随机扰动,使得光场的传输成为随机过程,为了更好的理解信号在传输过程中受到的损伤,需要引入统计模型才能进行分析。为便于之后的数值模拟,我们选定一组基矢量,将密度矩阵理论中的算符用相应的矩阵来表示。

在受随机扰动的光纤中, LMP 矩阵 Z 可以写为

$$Z(z, \omega) = (\omega/c) N(z, \omega) = (\omega/c) \{N_{\text{ID}}(\omega) + \Delta N(z)\}, \quad (19)$$

式中 N 为光纤的局域“有效折射率(Effective refractive index, ERI)”矩阵, N_{ID} (假定与 z 无关)和 ΔN (与 ω 无关)分别为理想光纤的 ERI 矩阵和随机变化部分。 ΔN 服从朗之万随机微分方程^[19,20]

$$d\Delta N(z)/dz = -L_c^{-1} \{\Delta N(z) + \sqrt{L_c} g(z)\}, \Delta N(z_i) = 0, \quad (20)$$

式中 z_i 和 L_c 分别为初始位置和关联长度, $g(z)$ 为表征白噪声过程的厄米矩阵,满足 $E[g(z)] = 0$,式中, $E[\square]$ 代表统计样本的均值(以区别于上一小节中以光场能量分布为权重的均值 $\langle \rangle$)。厄米矩阵 $g(z)$ 中所有对角元素(g_{jj})及对角线以上的元素($g_{jj'}, j < j'$)是相互独立的,且满足

$$\begin{aligned} E[g_{jj}(z)g_{jj}(z')] &= \gamma_{jj}^2 \delta(z-z'), E[\text{Reg}_{jj'}(z)\text{Reg}_{jj'}(z')] = \gamma_{jj'}^{(\text{Re})} \delta(z-z'), \\ E[\text{Im}g_{jj'}(z)\text{Im}g_{jj'}(z')] &= \gamma_{jj'}^{(\text{Im})} \delta(z-z'), \text{其它} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

由于 $g(z)$ 是厄米矩阵,因此对角线以下的元素(即 $g_{jj'}, j > j'$)不是独立变量,而是由对角线以上的元素取厄米共轭得到,即 $g_{jj'} = g_{jj'}^*$ 。结合式(19)~(21)和 1.1 节中的密度矩阵理论,能够定量研究受随机扰动的光纤中光场的传输规律。

在数值计算中,把光纤分成长度为 $\delta z \ll L_C$ 的 M 段,并将每一小段的模式性质视为均匀,即 $\Delta N(z) = \Delta N(z_{m-1})$, $z \in z_{m-1}, z_m$, $m = 1, 2, \dots, M$, 其中 $z_0 = z_i$ 和 $z_M = z_f$ 分别表示光纤的起点和终点。给定了 $N_{ID}(\omega)$ 和 $\{g_{jj'}, j \leq j'\}$ 的概率分布,就可以通过级联规则由 $\rho(z_{m-1}, \omega)$ 、 $\Omega(z_{m-1}, z_0; \omega)$ 、 $\Omega_\omega(z_{m-1}, z_0; \omega)$ 和 $\Delta N(z_{m-1})$ 得到 $\rho(z_m, \omega)$ 、 $\Omega(z_m, z_0; \omega)$ 、 $\Omega_\omega(z_m, z_0; \omega)$ 和 $\Delta N(z_m)$ 。因此,从 $\rho(z_0, \omega)$ 、 $\Omega(z_0, z_0; \omega) = 0$ 、 $\Omega_\omega(z_0, z_0; \omega) = 0$ 和 $\Delta N(z_0) = 0$ 出发,能够依次计算所有 z_m 点处的 $\rho(z_m, \omega)$ 、 $\Omega(z_m, z_0; \omega)$ 、 $\Omega_\omega(z_m, z_0; \omega)$ 和 $\Delta N(z_m)$, 从而获得随机传输过程中的一个样本。多次(Q)重复这一过程即可生成一个样本集合,据此可以分析光纤中模式耦合和模式色散的统计性质。

以上数值计算中,最基本的步骤为从 $\rho(z_{m-1}, \omega)$ 、 $\Omega(z_{m-1}, z_0; \omega)$ 、 $\Omega_\omega(z_{m-1}, z_0; \omega)$ 和 $\Delta N(z_{m-1})$ 求 $\rho(z_m, \omega)$ 、 $\Omega(z_m, z_0; \omega)$ 、 $\Omega_\omega(z_m, z_0; \omega)$ 和 $\Delta N(z_m)$ 。首先,根据方程(6),(11),(12),有

$$\rho(z_m, \omega) = U(z_m, z_{m-1}; \omega) \rho(z_{m-1}, \omega) U^\dagger(z_m, z_{m-1}; \omega), \quad (22)$$

$$\Omega(z_m, z_0; \omega) = \Omega(z_m, z_{m-1}; \omega) + U(z_m, z_{m-1}; \omega) \Omega(z_{m-1}, z_0; \omega) U^\dagger(z_m, z_{m-1}; \omega), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\omega(z_m, z_0; \omega) &= \Omega_\omega(z_m, z_{m-1}; \omega) + U(z_m, z_{m-1}; \omega) \Omega_\omega(z_{m-1}, z_0; \omega) U^\dagger(z_m, z_{m-1}; \omega) \\ &\quad - i [\Omega(z_m, z_{m-1}; \omega), \Omega(z_m, z_0; \omega)], \end{aligned} \quad (24)$$

式中

$$U(z_m, z_{m-1}; \omega) = \exp[-iZ(z_{m-1}^+, \omega)\delta z] = \exp\{-i(\omega/c)[N_{ID}(\omega) + \Delta N(z_{m-1}^+)]\delta z\}, \quad (25)$$

$$\Omega(z_m, z_{m-1}; \omega) = iU_\omega(z_m, z_{m-1}; \omega)U^\dagger(z_m, z_{m-1}; \omega), \quad (26)$$

$$\Omega_\omega(z_m, z_{m-1}; \omega) = iU_{\omega\omega}(z_m, z_{m-1}; \omega)U^\dagger(z_m, z_{m-1}; \omega) + iU(z_m, z_{m-1}; \omega)U_\omega^\dagger(z_m, z_{m-1}; \omega), \quad (27)$$

分别为每一均匀小段的么正演化算符、模式色散算符及其频率导数,式(27)中 $U_{\omega\omega} \equiv \partial^2 U / \partial \omega^2$ 。然后,假定式(21)中 $g_{jj'}$ 、 $\text{Re}(g_{jj'})$ 和 $\text{Im}(g_{jj'})$ ($j < j'$) 各以相等的概率随机取 $\pm \gamma \cdots / \sqrt{\delta z}$ 值($\gamma \cdots$ 表示式(21)各等式右端的 γ),可计算相应的随机矩阵 g 。最后,根据式(20),有

$$\Delta N(z_m^+) = \Delta N(z_{m-1}^+) - L_C^{-1} \{ \Delta N(z_{m-1}^+) + \sqrt{L_C} g \} \delta z, \quad (28)$$

从而完成从 z_{m-1} 到 z_m 的步骤。

3 六模光纤中模式耦合与模式色散的统计规律及特性

本节中,我们利用 2.2 节中的统计模型对随机扰动条件下六模光纤中的模式耦合和模式色散进行数值模拟。设真空波长 $\lambda = 1550$ nm,关联长度 $L_C = 50$ m,样本总数 $Q = 20000$,理想的 ERI 矩阵和“随机冲撞”因子 $\gamma_{jj'} (j \leq j')$ 分别为

$$N_{ID} = 10^{-5} \text{diag}(1, 1, 0, 0, -1, -1), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = \gamma_{44} = \gamma_{55} = \gamma_{66} = \gamma_{12 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{34 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{56 \langle \text{Re} \rangle} &= 1.0 \times 10^{-6}, \\ \gamma_{13 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{14 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{23 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{24 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{35 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{36 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{45 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{46 \langle \text{Re} \rangle} &= 0.5 \times 10^{-6}, \\ \gamma_{15 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{16 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{25 \langle \text{Re} \rangle} = \gamma_{26 \langle \text{Re} \rangle} &= 0.3 \times 10^{-6}, \\ \gamma_{jj' \langle \text{Im} \rangle} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

式中“diag”表示对角矩阵,其括号里的值为对角线上的元素。这里,理想光纤的 6 种自由模式 $\{|j\rangle, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 可分为各包含两个具有相同 ERI 的理想简并模的三组 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ 、 $\{|3\rangle, |4\rangle\}$ 、 $\{|5\rangle, |6\rangle\}$, 而不同组之间模式的 ERI 有相对较大的差别,其中, $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ 与 $\{|3\rangle, |4\rangle\}$ 两组的 ERI 差为 0.5×10^{-6} 、 $\{|3\rangle, |4\rangle\}$ 与 $\{|5\rangle, |6\rangle\}$ 两组的 ERI 差为 0.5×10^{-6} 、 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ 与 $\{|5\rangle, |6\rangle\}$ 两组的 ERI 差为 0.7×10^{-6} 。

基于上述参数条件,可以得到六模光纤中的密度矩阵样本集合、模式色散矩阵及其频率导数的样本集合

$$\{\rho_n^{(q)}(z_{m=1,2,\dots,M}, \omega), \Omega^{(q)}(z_{m=1,2,\dots,M}, z_0; \omega), \Omega_\omega^{(q)}(z_{m=1,2,\dots,M}, z_0; \omega), q = 1, 2, \dots, Q, n = 1, 2, \dots, 6\}, \quad (31)$$

式中 $n = 1, 2, \dots, 6$ 分别对应六种不同初始场态 $\hat{\rho}(z_0, \omega) = |1\rangle\langle 1| + (|1\rangle + |2\rangle)(\langle 1| + \langle 2|)/2$ 、 $(|1\rangle + |3\rangle)(\langle 1| + \langle 3|)/2$ 、 $(|1\rangle + |5\rangle)(\langle 1| + \langle 5|)/2$ 、 $(|3\rangle + |4\rangle)(\langle 3| + \langle 4|)/2$ 、 $(|3\rangle + |5\rangle)(\langle 3| + \langle 5|)/2$ 。基于这些

样本集合,可以由式(3)、(4)计算光场的能量分布和相干性的变化,由式(16)、(18)计算输出脉冲的时间展宽,以及由式(13)~(15)计算光纤中一阶、二阶模式色散的统计特性。

3.1 光场能量分布及相干性

在基于相干光接收技术的通信系统中,光场的能量分布和相干性是影响信号恢复的关键因素。图1给出了不同初态下光场在各模式间的能量分布 P_j 和相干性 $C_{jj'}$ 随传输距离 $z-z_0$ 的变化曲线。其中,图1(a)、(b)对应于初始场态 $\hat{\rho}(z_0, \omega)$ 为 $|1\rangle\langle 1|$ 的情况,在初始位置 $z-z_0$ 处,光场能量全部分布在模式 $|1\rangle$ ($P_1=1, P_{2,\dots,6}=0$)中,各模式间不存在相干性($C_{jj'}=0$);图1(a)显示,在较短的“组内”尺度 $l_{\text{intra}} \sim 2L_C$ 下,能量主要从模式 $|1\rangle$ 转移到组内的另一模式 $|2\rangle$,直至达到 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ 内的均匀分布(即 $P_1=P_2=0.5$);随着传输距离的进一步增加,如图1(b)所示,在较长的“组间”尺度 $l_{\text{inter}} \sim 1000L_C$ 下,能量由组 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ 转移到组 $\{|3\rangle, |4\rangle\}$ 及 $\{|5\rangle, |6\rangle\}$,直至在6个模式间达到均匀分布;同时,在整个传输过程中各模式之间的相干性始终保持为0。

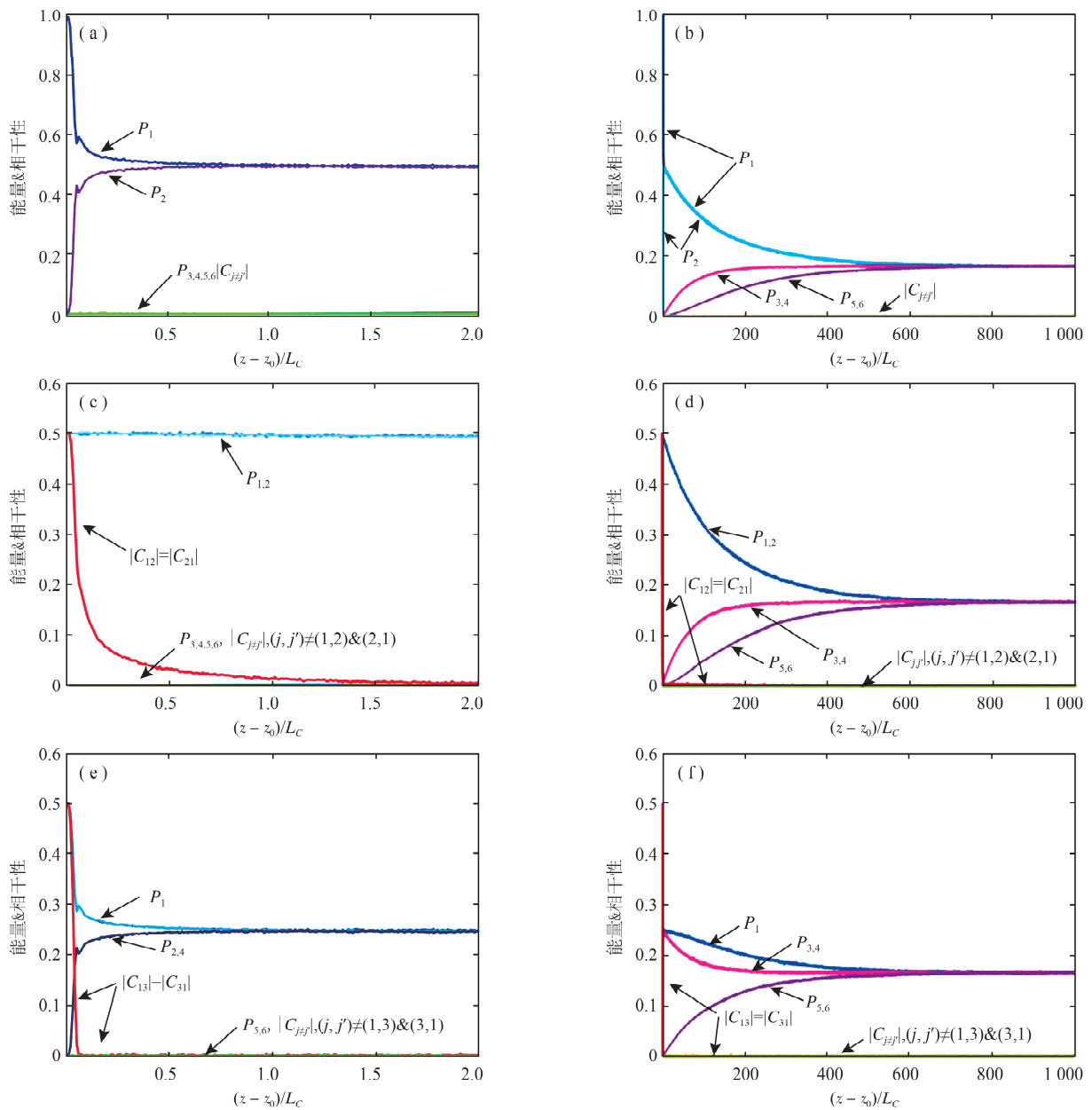


图1 不同初态下光场的能量分布和相干性随传输距离 $(z-z_0)$ 的变化曲线。自上而下分别对应3个初态

$$\hat{\rho}(z_0, \omega) = |1\rangle\langle 1|; (|1\rangle + |2\rangle)(\langle 1| + \langle 2|)/2; (|1\rangle + |3\rangle)(\langle 1| + \langle 3|)/2.$$

左右两列分别对应组内尺度 l_{intra} 和组间尺度 l_{inter} 下的变化曲线。

当初始场态 $\hat{\rho}(z_0, \omega)$ 为 $(|1\rangle + |2\rangle)(\langle 1| + \langle 2|)/2$ 时,如图1(c)和(d)所示,在初始位置处,光场能量均匀分布于同一组内的模式 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 中,且这两个模式之间存在相干性 $|C_{12}| = 0.5$;在 l_{intra} 尺度下,由于能量已均匀分布于模式 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 上,因此不再出现 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ 组内的能量转移,而相干性 $|C_{12}|$ 则从0.5衰减至0;随着 $z - z_0$ 的进一步增加,在 l_{inter} 尺度下,能量由组 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ 向组 $\{|3\rangle, |4\rangle\}$ 及 $\{|5\rangle, |6\rangle\}$ 转移,直至达到6个模式间的均匀分布,而相干性 C_{12} 继续保持为0。类似地,如图1(e)、(f)所示,初态为 $(|1\rangle + |3\rangle)(\langle 1| + \langle 3|)/2$ 时,在初始位置处,光场能量均匀分布于不同组的模式 $|1\rangle$ 和 $|3\rangle$ 中,且这两个模式之间存在相干性 $|C_{13}| = 0.5$;在 l_{intra} 尺度下,能量分别在 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ 和 $\{|3\rangle, |4\rangle\}$ 两个组内进行转移并达到组内的均匀分布,然后在 l_{inter} 尺度下,能量在不同组之间进行转移,直至达到各模式间的均匀分布,而相干性 $|C_{13}|$ 则在 l_{intra} 尺度下由0.5迅速衰减为0,且在此后一直保持为0。

通过以上分析可知,组内、组间的能量耦合会发生在不同的尺度下,这是因为具有相同ERI的组内模式耦合比具有不同ERI的组间模式耦合强得多,在以往的研究中通常会根据能量耦合强度对模式信号采用分组处理的方式^[13,21],这在能量耦合和相干性变化发生在相同的传播尺度下是合适的,然而,如上所述,在我们所研究的系统中,随机微扰会导致所有模式间(包括组内和组间)的相干性 C_{ij} 均在较短(小于 $2L_c$)的尺度下迅速衰减为0,此时,需要同时考虑光场中的能量耦合强度与相干性变化以作全局处理,根据所有模式的耦合与色散统计模型来实现信号的恢复补偿。

3.2 模式色散的统计性质

光纤的模式色散会使得光脉冲在传输过程中发生展宽和变形,从而影响光信号的传输质量。本节将对模式色散的变化规律进行研究,并分析脉冲展宽、模式主态、差分群时延及相关物理量的统计特性。

利用公式(18)能够计算输出脉冲的时间展宽,其样本统计平均值为 $\sqrt{E[\langle \Delta\tau^2 \rangle]} = \sqrt{\frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \langle \Delta\tau^2 \rangle^{(q)}}$ 。

图2给出了不同初态下 $\sqrt{E[\langle \Delta\tau^2 \rangle]}$ 随传输距离 $z - z_0$ 的变化曲线。由图可见,当距离较短时, $\sqrt{E[\langle \Delta\tau^2 \rangle]}$ 正比于 $z - z_0$,而在更长的距离上, $\sqrt{E[\langle \Delta\tau^2 \rangle]}$ 则正比于 $\sqrt{z - z_0}$;同时,从图中还可得到输入信号中所包含的模式组合与输出信号脉冲展宽之间的具体关系。这些结果将为模分复用系统中模式色散的恢复及补偿提供定量的参考。

图3给出了6模光纤中最大群时延差 $\Delta\tau_{\text{max}}$ 及其一阶频率导数 $\Delta\tau_{\text{max},\omega}$ 和主态变化趋势 T_P 的概率密度函数(Probability Density Function, PDF)的数值模拟结果(条形图部分)。由图可见, $\Delta\tau_{\text{max}}$ 、 $\Delta\tau_{\text{max},\omega}$ 和 T_P 分别分布在2100 ps、0 p/s和 3×10^6 p/s²周围,且分布宽度分别为400 ps、 2×10^5 p/s²和 2×10^6 p/s²左右。由于 $|\Delta\tau_{\omega}|$ 远小于 T_P ,因此统计上 T_P 和 $\Delta\tau_{\text{max},\omega}$ 分别是二阶模式色散的大、小分量,这与偏振模式色散中的对应物理量(二阶PMD的平行与垂直分量)统计性质^[17]类似。同时,通过数值拟合发现,六模空间中 $\Delta\tau_{\text{max}}$ 、 $\Delta\tau_{\text{max},\omega}$ 和 T_P 的概率分布能够由修正的偏振模式色散公式来描述

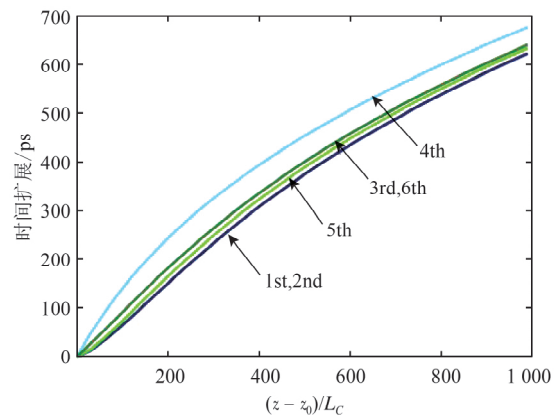


图2 不同初态下脉冲展宽 $\sqrt{E[\langle \Delta\tau^2 \rangle]}$ 随传输距离的变化曲线。

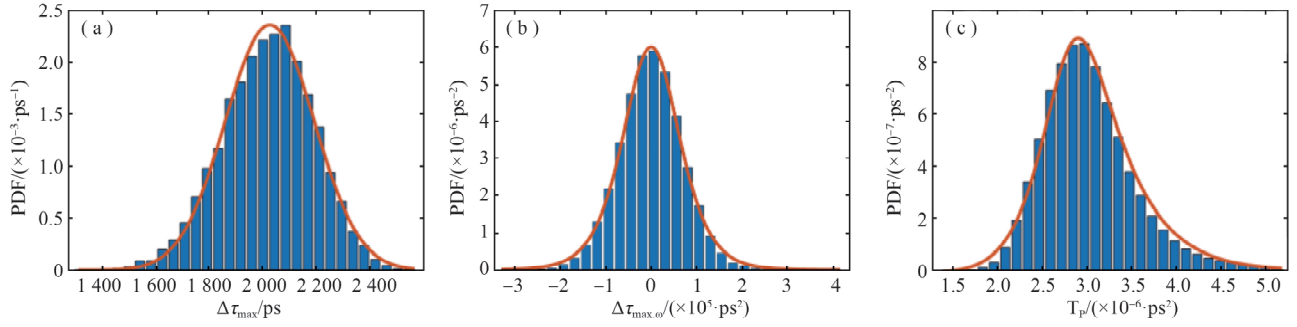
注:1st、2nd、3rd、4th、5th、6th分别对应六个初态 $\hat{\rho}(z_0, \omega) = |1\rangle\langle 1|$ 、 $(|1\rangle + |2\rangle)(\langle 1| + \langle 2|)/2$ 、 $(|1\rangle + |3\rangle)(\langle 1| + \langle 3|)/2$ 、 $(|1\rangle + |5\rangle)(\langle 1| + \langle 5|)/2$ 、 $(|3\rangle + |4\rangle)(\langle 3| + \langle 4|)/2$ 、 $(|3\rangle + |5\rangle)(\langle 3| + \langle 5|)/2$ 。

$$P_{\Delta\tau_{\text{max}}}(x \geq 0) = \frac{32\alpha_1 x^2}{\pi^2 \langle \Delta\tau_{\text{max}} \rangle^3} \exp\left(-\frac{4\alpha_2}{\pi} \left(\frac{x - \tau_0}{\langle \Delta\tau_{\text{max}} \rangle}\right)^2\right), \quad (32)$$

$$P_{\Delta\tau_{\max,\omega}}(x) = \frac{2}{\alpha_3^2 \langle \Delta\tau_{\max} \rangle^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{4x}{\alpha_3^2 \langle \Delta\tau_{\max} \rangle^2} \right), \quad (33)$$

$$P_{T_P}(x) = \alpha_4 (x - T_1^{(0)}) \left(\frac{8}{\pi \langle \Delta\tau_{\max} \rangle^2} \right)^2 \int_0^\infty d\zeta J_0 \left(8\zeta \left(\frac{x - T_2^{(0)}}{\pi \alpha_5^2 \langle \Delta\tau_{\max} \rangle^2} \right) \right) (\operatorname{sech} \zeta) \sqrt{(\zeta \tanh \zeta)}. \quad (34)$$

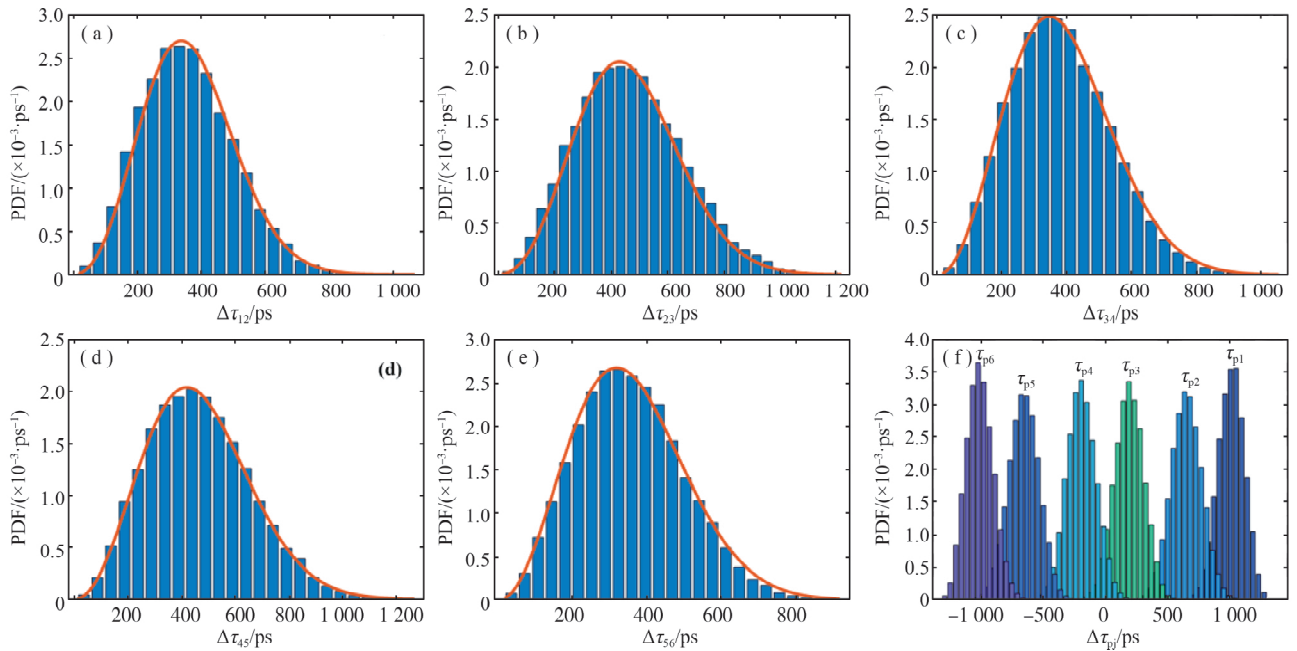
式(32)-(34)中, $\alpha_{i=1,2,\dots,5}$ 、 $T_{j=1,2}^{(0)}$ 以及 τ_0 为可调参数, 当 $\alpha_{i=1,2,\dots,5} = 1$ 、 $T_{j=1,2}^{(0)} = 0 \text{ ps}^2$ 及 $\tau_0 = 0 \text{ ps}$ 时, 式(32)-(34)是偏振模色散中各物理量概率分布的解析表达式^[22], 当 $\alpha_1 = 0.31$, $\alpha_2 = 20.00$, $\alpha_3 = 0.48$, $\alpha_4 = 0.16$, $\alpha_5 = 1.02$, $T_1^{(0)} = 0.15 \times 10^7 \text{ ps}^2$, $T_2^{(0)} = 2.80 \times 10^6 \text{ ps}^2$, $\tau_0 = 2\,000.00 \text{ ps}$ 时, 式(32)~(34)给出了图 3(a)~(c) 中的拟合曲线(实线部分), 可以看到, $\Delta\tau_{\max}$ 、 $\Delta\tau_{\max,\omega}$ 和 T_P 的拟合曲线与相应的数值模拟结果非常吻合。



PDF: Probability Density Function 概率密度函数

图 3 概率密度函数图: (a) 最大群时延差 $\Delta\tau_{\max}$; (b) 最大群时延差一阶频率导数 $\Delta\tau_{\max,\omega}$; (c) 主态变化趋势 T_P

多模光纤中, 除了最大群时延差 $\Delta\tau_{\max}$, 各个主态之间的群时延差也会影响脉冲的展宽。图 4(a)~(e) 给出了相邻主态(主态按群时延由大到小顺序排列)间群时延差 $\Delta\tau_{j,j+1} = \tau_{p_j} - \tau_{p_{j+1}}$ 的概率密度函数的数值模拟结果(条形图部分)。与 $\Delta\tau_{\max}$ 一样, $\Delta\tau_{j,j+1}$ 的概率分布也能够用公式(32)进行拟合, 如图(a)~(e)中的实线部分所示, 每个图中所取的 α_1 、 α_2 和 τ_0 值见表 1。图 4(f)给出了所有主态群时延 τ_{p_j} 的概率密度函数(以模式平均群时延为原点), 可以看到, 尽管理想光纤中只有三种群时延(对应于三个 ERI 值), 但光纤受到随机扰动后, 原本具有相同 ERI 的模式会解除简并, 由此形成按原点呈中心对称分布的六个不同的群时延。



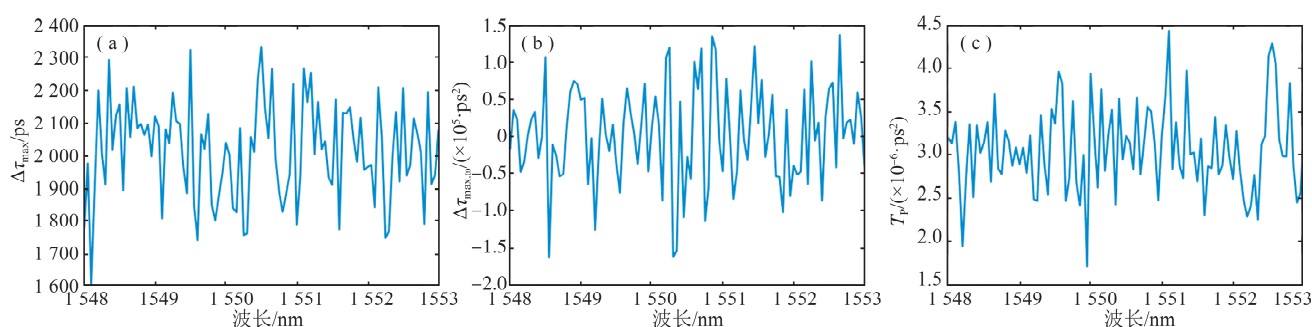
PDF: Probability Density Function 概率密度函数

图 4 概率密度函数图: (a)~(e) 相邻主态群时延差 $\Delta\tau_{j,j+1}$; (f) 所有主态群时延 τ_{p_j}

表 1 $\alpha_1, \alpha_2, \tau_0$ 的取值

	$\Delta\tau_{12}/\text{ps}$	$\Delta\tau_{23}/\text{ps}$	$\Delta\tau_{34}/\text{ps}$	$\Delta\tau_{45}/\text{ps}$	$\Delta\tau_{56}/\text{ps}$
α_1	24.0	11.0	26.0	14.5	37.0
α_2	16.0	10.0	11.0	7.5	11.5
τ_0	125.0	165.0	50.0	60.0	10.0

最后,我们计算了典型的光纤通信波段 1 548 nm ~ 1 553 nm 内不同波长处的 $\Delta\tau_{\max}$ 、 $\Delta\tau_{\max,\omega}$ 和 T_P ,并将结果示于图 5。由图可见, $\Delta\tau_{\max}$ 、 $\Delta\tau_{\max,\omega}$ 和 T_P 随波长做很不规则的变化,变化范围分别约为 1 608 ~ 2 334 ps、 $-1.63 \times 10^5 \sim 1.36 \times 10^5 \text{ ps}^2$ 、 $1.70 \times 10^6 \sim 4.43 \times 10^6 \text{ ps}^2$,并与图 3 中的概率密度函数所给出的范围大致相符。这实际上反映了以上物理量在波长上的各态历经性,因此,在分析模式色散的统计规律时,既可以取不同时刻的数据样本,也可以取同一时刻不同波长的数据样本,通常,后者描述的测量方式会更为简单和方便。

图 5 (a) $\Delta\tau_{\max}$ 随波长的变化曲线; (b) $\Delta\tau_{\max,\omega}$ 随波长的变化曲线; (c) T_P 随波长的变化曲线

4 结论

本文将基于密度矩阵理论的模式耦合与模式色散的统计模型应用于六模光纤,借助数值模拟对受随机扰动的光纤中由模式耦合引起的光场能量分布和相干性变化的规律、模式色散对光脉冲展宽的影响、以及一阶和二阶模式色散相关的各物理量的统计分布等进行了研究。光场能量和相干性的研究表明,光纤的随机扰动会造成光场在不同模式之间的相干性于很短的传输距离内迅速衰减为零,因此在相干光通信系统中进行数字信号处理时,不能仅依据模式间的能量耦合强度对模式进行分组,还必须计及模式间相干性的变化;利用密度算符和模式色散算符,计算给出了输入信号所包含的模式组合与输出信号脉冲展宽之间的定量关系,并通过分析模式主态、相应的差分群时延以及它们随频率变化的统计性质,发现六模光纤的一阶和二阶模式色散的概率分布能够用修正的偏振模式色散公式加以描述,这些结果为多模光纤中模式色散的研究提供了有效的分析途径;最后对同一统计样本下,典型的光纤通信波段 1 548~1 553 nm 内的模式色散性质进行了模拟分析,验证了模式色散在波长上的各态历经性,为模式色散的测量提供了一种等效且更加简单的方式。本文的工作为模分复用光信号的性能恢复提供理论依据,并有效推动模分复用技术的实用化进程。

参 考 文 献

- [1] TRICHILI A, PARK K H, ZGHAL M, et al. Communicating using spatial mode multiplexing: Potentials, challenges, and perspectives[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2019, 21(4): 3175-3203.
- [2] AWAJI Y. Review of space-division multiplexing technologies in optical communications[J]. IEICE Transactions on Communications, 2019, 102(1): 1-16.
- [3] BRASILEIRO Í, COSTA L, DRUMMOND A. A survey on challenges of spatial division multiplexing enabled elastic optical networks

- [J]. Optical Switching and Networking, 2020, 38: 100584.
- [4] YANG Z Q, YU W B, PENG G J, et al. Recent progress on novel DSP techniques for mode division multiplexing systems; a review[J]. Applied Sciences, 2021, 11(4): 1363.
- [5] FAZEA Y, AMPHAWAN A, AL-GUMAEI Y A, et al. Modes power equalization based-singular value decomposition in mode division multiplexing systems for multi-hungry bandwidth applications[J]. Optical Fiber Technology, 2021, 61:102389.
- [6] ZHANG J W, LIU J Y, SHEN L, et al. Mode division multiplexed transmission of WDM signals over 100-km single-span OAM fiber[J]. Photonics Research, 2020, 8(7):1236-1242.
- [7] HAYASHI T, SAKAMOTO T, YAMADA Y, et al. Randomly-coupled multi-core fiber technology[J]. Proceedings of the IEEE, 2022, 110(11): 1786-1803.
- [8] ZUO M Q, LIU J X, QIAO G, et al. Optical performance monitoring for intra-LP-mode dispersion in weakly-coupled mode-division multiplexed systems[J]. IEEE Photonics Journal, 2021, 14(1): 1-6.
- [9] GE D W, ZUO M Q, ZHU J L, et al. Analysis and measurement of intra-LP-mode dispersion for weakly-coupled FMF[J]. Journal of Lightwave Technology, 2021, 39(22): 7238-7245.
- [10] VIJAY A, KAHN J M. Effect of Higher-order modal dispersion in direct-detection mode-division-multiplexed links[J]. Journal of Lightwave Technology, 2023, 41: 1670-1683.
- [11] OJHA K, APPAIAH K. Feedback based compensation of second order modal dispersion in principal mode based multiplexed MMF links [C].//2022 National Conference on Communications(NCC). IEEE, 2022, 166-171.
- [12] SAITOH K. Multi-core fiber technology for SDM: coupling mechanisms and design[J]. Journal of Lightwave Technology, 2022, 40(5): 1527-1543.
- [13] HO K P, KAHN J M. Mode coupling and its impact on spatially multiplexed systems[J]. Optical Fiber Telecommunications, 2013, 17: 1386-1392.
- [14] GORDON J P, KOGELNIK H. PMD fundamentals: polarization mode dispersion in optical fibers[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2000, 97(9): 4541-4550.
- [15] ANTONELLI C, MECOZZI A, SHTAIF M, et al. Stokes-space analysis of modal dispersion in fibers with multiple mode transmission [J]. Optics Express, 2012, 20(11): 11718-11733.
- [16] ROUDAS I, KWAPISZ J. Stokes space representation of modal dispersion[J]. IEEE Photonics Journal, 2017, 9(5): 1-15.
- [17] 张晓光,唐先锋.光纤偏振模色散原理、测量与自适应补偿技术[M].北京:北京邮电大学出版社, 2017.
- [18] YANG Z S, ZHANG X G, ZHANG B, et al. Density-matrix formalism for modal coupling and dispersion in mode-division multiplexing communications systems[J]. Optics Express, 2020, 28(13): 18658-18680.
- [19] DAMASK, JAY N. Polarization optics in telecommunications[M].New York: Springer Science & Business Media, 2005.
- [20] COFFEY W, KALMYKOV Y P. The Langevin equation: with applications to stochastic problems in physics, chemistry and electrical engineering[M]. World Scientific, 2012.
- [21] RYF R, RANDEL S, GNAUCK A H, et al. Mode-division multiplexing over 96 km of few-mode fiber using coherent 6×6 MIMO processing[J]. Journal of Lightwave technology, 2012, 30(4): 521-531.
- [22] KOGELNIK H, JOSON R M, NELSON L E. Polarization-Mode Dispersion[M]. Optical Fiber Telecommunications IV-B, San Diego: Academic Press, 2002.

(责任编辑:赵海军)