

文章编号 1672-6634(2022)06-0031-06

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2022020008

有限温度影响下光子计数分布的解析演化

孟祥国,吴孟艳,刘业欣

(聊城大学 物理科学与信息工程学院、山东省光通信科学与技术重点实验室,山东 聊城 252059)

摘要 基于连续变量热场纠缠态表象理论求解描述有限温度模型的密度算符量子主方程,并给出其解析解的无限维克劳斯算符和表示。利用先进的算符排序法,给出光子计数分布的反正规乘积表示,从而得到有限温度影响下光子计数分布的解析演化规律。研究成果丰富了量子退相干的数理处理方法,并加深了对系统在热通道中发生的退相干行为的认识。

关键词 热场纠缠态表象;有限温度模型;反正规乘积;光子计数分布

中图分类号 O413.1

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Analytical Evolution of Photocount Distribution at Finite Temperature

MENG Xiangguo, WU Mengyan, LIU Yexin

(School of Physical Science and Information Engineering, Shandong Provincial Key Laboratory of Optical Communication
Science and Technology, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract Based on the continuous-variable thermal entangled state representations, the master equation of density operator of the system at finite temperature was solved, and its analytical solution as the infinite-dimensional Kraus operator-sum representation was presented. Using the new operator ordering method to give the anti-normal ordering product of photocount distribution, the evolution law of photocount distribution at finite temperature is obtained. These results enrich the mathematical and physical methods concerning quantum decoherence and deepen the understanding of the decoherence behavior of the system in the thermal channel.

Key words thermal entangled state representation; finite temperature model; anti-normal ordering; photocount distribution

0 引言

目前,量子退相干是量子信息和量子计算中普遍存在的本质问题,并给相关信息技术的发展和应用带来了很大困扰。因此,量子光场的退相干问题已成为物理学家一个重要的研究热点。

在相互作用表象下,开放系统的量子退相干效应可用系统的约化密度算符满足的量子主方程进行描述。在已有的文献[1-4]中,一般通过求解密度算符的P-表示或维格纳函数满足的福克-普朗克方程来分析系统

收稿日期:2020-03-20

基金项目:国家自然科学基金项目(11347026);山东省自然科学基金项目(ZR2020MF113,ZR2017MA011)资助

通讯作者:孟祥国,男,汉族,博士,教授,研究方向:量子光学与量子信息,E-mail:xgmeng@lcu.edu.cn。

的退相干演化规律。与以往的方法不同,基于热场动力学理论,范洪义教授引入了一种描述系统与其周围环境相互作用的热场纠缠态表象(系统作为实模,与系统有相互作用的环境作为虚模),由此推导出了实、虚模算符满足的算符恒等式及其互换关系,并将关于密度算符的量子主方程转化为相应态矢量满足的方程,从而成功求解了一系列描述系统发生退相干演化的量子主方程并给出了其解析解的不同表示^[5,6]。

在光学理论中,热通道噪声是引起退相干的重要来源,因此热噪声影响下量子态的演化及其退相干问题备受关注。目前,对于热通道,其研究主要集中在热噪声影响下量子态的非经典性质、魏格纳函数及其在量子信息中的具体应用等方面^[7-9]。而对于量子态的光子计数分布,主要讨论了它们在一些简单的退相干通道(如相位阻尼、振幅衰减等)中的演化规律^[10],推广至更为一般情况。本文利用热场纠缠态表象理论以及算符排序法,推导出光子计数分布在热通道中的解析演化公式,进而探查系统在热通道中的退相干行为。

1 热场纠缠态表象

为了准确描述量子系统和外界热环境之间发生的相互纠缠,类似于建立物理空间中连续变量纠缠态 $|\eta\rangle$ 和 $|\zeta\rangle$ 表象^[9],这里引进一个新的连续变量纠缠态表象——热场纠缠态表象。在双模福克空间中,热纠缠态 $|\omega\rangle$ 表示为^[5,6]

$$|\omega\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\omega|^2 + \omega a^\dagger - \omega^* \tilde{a}^\dagger + a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right) |00\rangle = D(\omega) |\omega=0\rangle, \quad (1)$$

式中 $D(\omega) = \exp(\omega a^\dagger - \omega^* \tilde{a}^\dagger)$ 为平移算符,参量 ω 为复数, $|\omega=0\rangle = \exp(a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0,0\rangle$, $\tilde{a}^\dagger$ 为与真实的光子产生算符 $a^\dagger$ 相伴而生的虚模的产生算符,而 $\tilde{a}$ 能湮灭 $|\omega\rangle$ 且满足对易关系 $[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$ 和 $[\tilde{a}, a^\dagger] = 0$ 。利用有序算符内积分法可证明, $|\omega\rangle$ 为算符 $a - \tilde{a}^\dagger$ 和 $a^\dagger - \tilde{a}$ 的本征态,即

$$(a - \tilde{a}^\dagger) |\omega\rangle = \omega |\omega\rangle, (a^\dagger - \tilde{a}) |\omega\rangle = \omega^* |\omega\rangle \quad (2)$$

且拥有正交归一性

$$\langle \omega | \omega' \rangle = \pi \delta(\omega_1 - \omega'_1) \delta(\omega_2 - \omega'_2) \quad (3)$$

和完备性

$$\int \frac{d^2\omega}{\pi} |\omega\rangle \langle \omega| = 1, d^2\omega = d\omega_1 d\omega_2 \quad (4)$$

所以,态 $|\omega\rangle$ 的完备集合能构成一个连续变量纠缠态表象。

根据式(2)可知,热场纠缠态 $|\omega=0\rangle$ 满足等式

$$a |\omega=0\rangle = \tilde{a}^\dagger |\omega=0\rangle, a^\dagger |\omega=0\rangle = \tilde{a} |\omega=0\rangle, a^\dagger a |\omega=0\rangle = \tilde{a}^\dagger \tilde{a} |\omega=0\rangle, \quad (5)$$

这意味着,在态矢量 $|\omega=0\rangle$ 下,在实空间中的玻色算符和虚空间的玻色算符存在如下互换关系 $a \Leftrightarrow \tilde{a}^\dagger$, $a^\dagger \Leftrightarrow \tilde{a}$, $a^\dagger a \Leftrightarrow \tilde{a}^\dagger \tilde{a}$ 。以上互换关系表明,若将一个密度算符主方程作用到 $|\omega=0\rangle$ 上,则对于该主方程中所包含的形如 $a \rho_i a^\dagger$ 、 $a^\dagger \rho_i a$ 和 $\rho_i a a^\dagger$ 等算符来说, ρ_i 右边的所有实模的产生算符 $a^\dagger$ 和湮灭算符 a 可以分别转换为虚模的湮灭算符 $\tilde{a}$ 和产生算符 $\tilde{a}^\dagger$,并都能移到 ρ_i 的左边(实模空间和虚模空间相互独立,则实模算符与虚模算符是对易的)。这样,根据这些算符的互换关系,可将描述退相干通道的量子主方程转化为态矢量的演化方程,从而求解得到密度算符、光子数分布和维格纳函数等在通道中的解析演化规律。

2 描述有限温度模型的密度算符主方程的解

对于系统与环境相互作用的开放系统,热噪声总是与基本的力学过程相伴随的,从而使得热噪声成为了引起系统非经典性衰退的重要原因。理论上,在Born-Markov近似下,描述有限温度模型的密度算符主方程表示为^[11]

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \kappa \bar{n} (2a^\dagger \rho_t a - a a^\dagger \rho_t - \rho_t a a^\dagger) + \kappa (\bar{n} + 1) (2a \rho_t a^\dagger - a^\dagger a \rho_t - \rho_t a^\dagger a), \quad (6)$$

式中 κ 为衰减常数, $\bar{n}$ 为平均热光子数。特殊地,当 $\bar{n} \rightarrow 0$ 且 κ 为有限值时,意味着真实物理系统的环境温

度趋近于零。因此,式(6)退化为描述振幅衰减通道的量子主方程,即

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \kappa(2a\rho_t a^\dagger - a^\dagger a\rho_t - \rho_t a^\dagger a), \quad (7)$$

它代表能量从系统向零温环境进行传输。

为求解描述有限温度模型的密度算符主方程(6),我们将充分利用热场纠缠态 $|\omega=0\rangle$ 下的实、虚模玻色算符的互换关系(5)。将式(6)两边作用到态矢量 $|\omega=0\rangle$ 上,利用式(5)并令 $\rho_t|\omega=0\rangle \equiv |\rho_t\rangle$,可得

$$\frac{d}{dt}|\rho_t\rangle = [\kappa\bar{n}(2a^\dagger\tilde{a}^\dagger - aa^\dagger - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger) + \kappa(\bar{n}+1)(2a\tilde{a} - a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a})]|\rho_t\rangle, \quad (8)$$

取 ρ_0 为初始时刻的密度算符, $\rho_0|\omega=0\rangle \equiv |\rho_0\rangle$,则方程(8)解的标准形式为

$$|\rho_t\rangle = \exp[\kappa\bar{n}t(2a^\dagger\tilde{a}^\dagger - aa^\dagger - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger) + \kappa(\bar{n}+1)t(2a\tilde{a} - a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a})]|\rho_0\rangle, \quad (9)$$

为求解式(9),注意到

$$\begin{aligned} & \kappa\bar{n}t(2a^\dagger\tilde{a}^\dagger - aa^\dagger - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger) + \kappa(\bar{n}+1)t(2a\tilde{a} - a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) \\ & = \kappa t(2\bar{n}+1)(\tilde{a} - a^\dagger)(a - \tilde{a}^\dagger) + \kappa t(a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger a^\dagger + 1) \end{aligned} \quad (10)$$

将式(10)代入到式(9),并利用对易关系

$$[a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger a^\dagger, (a^\dagger - \tilde{a})(a - \tilde{a}^\dagger)] = 2[(a^\dagger - \tilde{a})(a - \tilde{a}^\dagger)] \quad (11)$$

和算符恒等式

$$e^{\lambda(A+\sigma B)} = e^{\lambda A} \exp\left[\frac{\sigma B(1-e^{-\lambda\tau})}{\tau}\right], \quad (12)$$

式中算符 A, B 满足等式 $[A, B] = \tau B$,可得

$$|\rho_t\rangle = \exp\left\{(a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger a^\dagger + 1)\kappa t + \left(\bar{n} + \frac{1}{2}\right)(1 - e^{-2\kappa t})(a^\dagger - \tilde{a})(a - \tilde{a}^\dagger)\right\}|\rho_0\rangle, \quad (13)$$

因此,在表象 $\langle\omega|$ 中密度算符 ρ_t 的解析演化规律为

$$\langle\omega|\rho_t\rangle = \exp\left[-\left(\bar{n} + \frac{1}{2}\right)(1 - e^{-2\kappa t})|\omega|^2\right]\langle\omega e^{-\kappa t}|\rho_0\rangle. \quad (14)$$

进一步,利用有序算符内积分法和热场纠缠态表象 $|\omega\rangle$ 的完备性关系,可得

$$|\rho_t\rangle = \int \frac{d^2\omega}{\pi} |\omega\rangle\langle\omega|\rho_t\rangle = T_3 \exp(\kappa\bar{n}T_3 a^\dagger \tilde{a}^\dagger) : \exp[(T_2 - 1)(\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a)] : \exp[\kappa(\bar{n}+1)T_1 a\tilde{a}]|\rho_0\rangle \quad (15)$$

式中利用双模真空态投影算符的正规乘积 $|\tilde{0}\tilde{0}\rangle\langle\tilde{0}\tilde{0}| = : \exp(-\tilde{a}^\dagger \tilde{a} - a^\dagger a) :$, 式中 $:$ 为正规乘积符号,且

$$T_1 = \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{\kappa(\bar{n}+1) - \kappa\bar{n}e^{-2\kappa t}}, \quad T_2 = \frac{e^{-\kappa t}}{\bar{n} + 1 - \bar{n}e^{-2\kappa t}}, \quad T_3 = 1 - \kappa\bar{n}T_1. \quad (16)$$

利用算符恒等式

$$e^{\lambda a^\dagger a} = : \exp[(e^\lambda - 1)a^\dagger a] : , \quad (17)$$

可将式(15)改写为

$$\begin{aligned} |\rho_t\rangle &= T_3 \exp(\kappa\bar{n}T_1 a^\dagger \tilde{a}^\dagger) \exp[(\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a) \ln T_2] \exp[\kappa(\bar{n}+1)T_1 a\tilde{a}]|\rho_0\rangle \\ &= T_3 \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{[\kappa(\bar{n}+1)T_1]^i (\kappa\bar{n}T_1)^j}{i! j!} a^{\dagger i} \exp(a^\dagger a \ln T_2) a^i \rho_0 a^{\dagger j} \exp(a^\dagger a \ln T_2) a^j |\omega=0\rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

进一步,把态矢量 $|\omega=0\rangle$ 从式(18)的两端同时去掉,则得到演化密度算符 ρ_t 的无限维算符和表示

$$\rho_t = T_3 \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{[\kappa(\bar{n}+1)T_1]^i (\kappa\bar{n}T_1)^j}{i! j! T_2^{2j}} a^{\dagger i} \exp(a^\dagger a \ln T_2) a^i \rho_0 a^{\dagger j} \exp(a^\dagger a \ln T_2) a^j \quad (19)$$

或者

$$\rho_t = \sum_{i,j=0}^{\infty} M_{i,j} \rho_0 M_{i,j}^\dagger, \quad (20)$$

式中 $M_{i,j}$ 为有限温度下演化密度算符 ρ_t 所对应的克劳斯算符

$$M_{i,j} = \sqrt{T_3} \frac{[\kappa(\bar{n}+1)T_1]^i (\kappa\bar{n}T_1)^j}{i! j! T_2^{2j}} a^{\dagger j} \exp(a^\dagger a \ln T_2) a^i, \quad (21)$$

式(19)代表初始态的密度算符 ρ_0 如何演化为终态 ρ_t 。因此,在 ρ_0 已知的情况下,很容易导出任意时刻 t 的演化密度算符 ρ_t 。特殊地,当 $\bar{n} \rightarrow 0$ 且 κ 为有限值时,由于 $T_1 = \kappa^{-1}(1 - e^{-2\kappa t})$, $T_2 = e^{-\kappa t}$, $T_3 = 1$,则式(19)简化为振幅衰减通道中密度算符 ρ_t 的无限维算符和表示

$$\rho_t = \sum_{i=0}^{\infty} M_i \rho_0 M_i^\dagger, \quad (22)$$

式中

$$M_i = \sqrt{\frac{(1 - e^{-2\kappa t})^i}{i!}} e^{a^\dagger a \ln e^{-\kappa t}} a^i. \quad (23)$$

下面证明克劳斯算符 $M_{i,j}$ 的归一化。利用 Glauber 算符公式 $e^{A+B} = e^A e^B e^{\frac{[A,B]}{2}} = e^B e^A e^{-\frac{[B,A]}{2}}$, 式中算符 A, B 满足 $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$, 可导出

$$\exp(2a^\dagger a \ln T_2) a^{\dagger j} \exp(-2a^\dagger a \ln T_2) = T_2^{2j} a^{\dagger j}. \quad (24)$$

另外,通过比较

$$e^{t'a} e^{ta^\dagger} = e^{ta^\dagger} e^{t'a} e^{tt'} = e^{t'a + ta^\dagger + tt'} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-it)^m (-it')^n}{m! n!} :H_{m,n}(ia^\dagger, ia): \quad (25)$$

和

$$e^{t'a} e^{ta^\dagger} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^m t'^n}{m! n!} a^n a^{\dagger m}, \quad (26)$$

可导出算符恒等式

$$a^n a^{\dagger m} = (-i)^{m+n} :H_{m,n}(ia^\dagger, ia):, \quad (27)$$

这样,利用式(24)和(27)可得

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} M_{i,j}^\dagger M_{i,j} = T_3 \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{[\kappa(\bar{n}+1)T_1]^i (\kappa\bar{n}T_1)^j}{i! j! T_2^{2j}} a^{\dagger i} :H_{j,j}(ia^\dagger, ia): a^j \exp(2a^\dagger a \ln T_2). \quad (28)$$

进一步,利用拉盖尔多项式 $L_m(xy)$ 与双变量埃尔米特多项式 $H_{m,m}(x, y)$ 之间的关系式

$$H_{m,m}(x, y) = (-1)^m m! L_m(xy), \quad (29)$$

以及拉盖尔多项式 $L_m(x)$ 的产生函数

$$(1-z)^{-1} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) z^m, \quad (30)$$

可得到

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^{\infty} M_{i,j}^\dagger M_{i,j} &= T_3 \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{[\kappa(\bar{n}+1)T_1]^i (\kappa\bar{n}T_1)^j}{i! T_2^{2j}} :a^{\dagger i} a^j L_j(-a^\dagger a) : \exp(2a^\dagger a \ln T_2) \\ &= T_3 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[\kappa(\bar{n}+1)T_1]^i}{i! T_2^{2i}} :a^{\dagger i} a^i \sum_{j=0}^{\infty} (\kappa\bar{n}T_1)^j L_j(-a^\dagger a) : \exp(2a^\dagger a \ln T_2) \\ &= \frac{T_3}{1 - \kappa\bar{n}T_1} : \exp\left[\frac{\kappa(\bar{n}+1)T_1 a^\dagger a}{T_2^2}\right] \exp\left(\frac{\kappa\bar{n}T_1 a^\dagger a}{1 - \kappa\bar{n}T_1}\right) : \exp(2a^\dagger a \ln T_2), \end{aligned} \quad (31)$$

再考虑到式(18),这样就验证了克劳斯算符的归一化条件

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} M_{i,j}^\dagger M_{i,j} = 1, \quad (32)$$

此式能导致 $\text{tr} \rho_t = \text{tr} \rho_0$ 成立,这说明克劳斯算符 $M_{i,j}$ 是一个保迹的量子操作。

3 热通道中光子计数分布的时间演化

本小节根据式(19)中演化密度算符 ρ_t 的无限维算符和表示,并利用算符排序法,可推导出任意初始密

度算符 ρ_0 的光子计数分布在热通道中随时间 t 的演化规律。

3.1 光子计数分布的反正规乘积表示

为了推导出热通道中光子计数分布的解析演化表达式,利用反正规乘积公式^[12,13]

$$\rho = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle -\alpha | \rho | \alpha \rangle : \exp(|\alpha|^2 + \alpha^* a - \alpha a^\dagger + a^\dagger a) : \quad (33)$$

式中 $:$ 为反正规乘积符号,把正规乘积算符 $(a^\dagger a)^m e^{-\xi a^\dagger a}$ 转化为

$$:(a^\dagger a)^m e^{-\xi a^\dagger a}: = : \int \frac{d^2\alpha}{\pi} (-1)^m |\alpha|^{2m} \exp[-(1-\xi)|\alpha|^2 + \alpha^* a - \alpha a^\dagger + a^\dagger a] : \quad (34)$$

进一步,利用数学积分公式

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} (-\alpha)^n \alpha^* m e^{-f|\alpha|^2 + \mu a - \nu a^*} = \frac{1}{\sqrt{f^{n+m+2}}} e^{-\mu\nu/f} H_{m,n} \left(\frac{\mu}{\sqrt{f}}, \frac{\nu}{\sqrt{f}} \right), \quad (35)$$

可计算出算符 $(a^\dagger a)^m e^{-\xi a^\dagger a}$ 的反正规乘积表示

$$:(a^\dagger a)^m e^{-\xi a^\dagger a}: = \frac{1}{(1-\xi)^{m+1}} : H_{m,m} \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{1-\xi}}, \frac{a}{\sqrt{1-\xi}} \right) e^{-\frac{\xi}{1-\xi} a^\dagger a} : \quad (36)$$

这样,把式(36)代入计算光子计数分布的基本公式

$$p(n, T) = \text{tr} \left[\rho : \frac{(\xi a^\dagger a)^m}{m!} e^{-\xi a^\dagger a} : \right], \quad (37)$$

这里参数 ξ 被称为量子检测效率,即时间间隔 T 内单光子被检测到的几率,可得到光子计数分布的反正规乘积表示

$$p(n, T) = \frac{\xi^m}{m! (1-\xi)^{m+1}} \text{tr} \left[\rho : H_{m,m} \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{1-\xi}}, \frac{a}{\sqrt{1-\xi}} \right) e^{-\frac{\xi}{1-\xi} a^\dagger a} : \right]. \quad (38)$$

它是量子光学计数分布的新表达式,能为计算一些量子态(如相干态)的光子计数分布及其在退相干环境中的演化提供方便。

3.2 光子计数分布在热通道中的解析演化

现在利用式(38)来考察任意态 ρ_0 的光子计数分布在热环境中的退相干演化规律。为了方便计算,把光子计数分布的解析演化规律表示为

$$p(n, T; t) = \text{tr} [\rho_0 O(t)], \quad (39)$$

式中

$$O(t) = \frac{\xi^m}{m! (1-\xi)^{m+1}} \sum_{i,j=0}^{\infty} M_{i,j}^\dagger : H_{m,m} \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{1-\xi}}, \frac{a}{\sqrt{1-\xi}} \right) e^{-\frac{\xi}{1-\xi} a^\dagger a} : M_{i,j}, \quad (40)$$

把克劳斯算符 $M_{i,j}^\dagger$ 和 $M_{i,j}$ 代入式(40),并插入相干态 $|\alpha\rangle$ 的完备关系,这样有

$$O(t) = \frac{\xi^m T_3}{m! (1-\xi)^{m+1}} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{[\kappa(\bar{n}+1)T_1]^i (\kappa\bar{n}T_1)^j}{i! j! T_2^{2j}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha|^{2j} H_{m,m} \left(\frac{\alpha^*}{\sqrt{1-\xi}}, \frac{\alpha}{\sqrt{1-\xi}} \right) e^{-\frac{\xi}{1-\xi} |\alpha|^2} \\ \times a^{\dagger i} \exp(a^\dagger a \ln T_2) |\alpha\rangle \langle \alpha| \exp(a^\dagger a \ln T_2) a^i, \quad (41)$$

进一步,利用恒等式

$$e^{-\kappa t a^\dagger a} |\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2} |\alpha|^2} e^{a e^{-\kappa t} a^\dagger} |0\rangle, \quad (42)$$

可把算符 $O(t)$ 改写为

$$O(t) = \frac{\xi^m T_3}{m! (1-\xi)^{m+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[\kappa(\bar{n}+1)T_1]^i}{i!} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-A |\alpha|^2} \\ \times H_{m,m} \left(\frac{\alpha^*}{\sqrt{1-\xi}}, \frac{\alpha}{\sqrt{1-\xi}} \right) e^{a T_2 a^\dagger} a^{\dagger i} |0\rangle \langle 0| a^i e^{a^* T_2 a}, \quad (43)$$

式中 $A = \frac{1}{1-\xi} - \frac{\kappa\bar{n}T_1}{T_2^2}$, 再利用单模真空态投影算符的正规乘积表示 $|0\rangle\langle 0| = : e^{-a^\dagger a} :$ 和双变量埃尔米特多

项式 $H_{m,n}(x,y)$ 的定义式

$$H_{m,n}(x,y) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial s^m \partial t^n} e^{-st+sx+ty} \Big|_{s=t=0}, \quad (44)$$

可给出

$$\begin{aligned} O(t) = & \frac{\xi^m T_3}{m! (1-\xi)^{m+1}} : e^{\kappa(\bar{n}+1)T_1-1} a^{\dagger a} \frac{\partial^{2m}}{\partial s^m \partial t^m} e^{-st} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \exp[-A|\alpha|^2] \\ & + \alpha \left(\frac{t}{\sqrt{1-\xi}} + T_2 a^{\dagger} \right) + \alpha^* \left(\frac{s}{\sqrt{1-\xi}} + T_2 a \right) : \Big|_{s=t=0}. \end{aligned} \quad (45)$$

进一步,利用式(44)以及数学积分公式^[14,15]

$$\int \frac{d^2z}{\pi} \exp(\zeta|z|^2 + \xi z + \eta z^*) = -\frac{1}{\zeta} \exp\left(-\frac{\xi\eta}{\zeta}\right), \quad (46)$$

可导出算符 $O(t)$ 的正规乘积表示

$$O(t) = D : H_{m,m}(Ba^{\dagger}, Ba) e^{Ca^{\dagger}a} :, \quad (47)$$

式中

$$B = \frac{T_2}{\sqrt{(1-\xi)A^2 - A}}, \quad C = \kappa(\bar{n}+1)T_1 - 1 + \frac{T_2^2}{A}, \quad D = \frac{\xi^m T_3}{m! (1-\xi)^{2m+1} A^{m+1}} [A(1-\xi) - 1]^m, \quad (48)$$

这样,结合式(39)和式(47),可最终得到有限温度下光子计数分布随时间的演化规律,即

$$p(n, T; t) = D \text{tr} [\rho_0 : H_{m,m}(Ba^{\dagger}, Ba) e^{Ca^{\dagger}a} :]. \quad (49)$$

显然,一旦知道初始态的密度算符 ρ_0 ,很容易导出此态的光子计数分布在有限温度通道中的演化特性。如,对于相干态 $\rho_0 = |z\rangle\langle z|$,它的光子计数分布在有限温度下随时间的演化公式为

$$p(n, T; t) = D \langle z| : H_{m,m}(Ba^{\dagger}, Ba) e^{Ca^{\dagger}a} : |z\rangle = D H_{m,m}(Bz^*, Bz) e^{C|z|^2}. \quad (50)$$

特殊地,当 $\bar{n} \rightarrow 0$ 且 κ 为有限值时, $A = (1-\xi)^{-1}$,由式(45)可得到振幅衰减通道中光子计数分布的解析演化规律^[10],即

$$p(n, T; t) = \text{tr} \left[\rho_0 : \frac{(\xi e^{-2\kappa t} a^{\dagger} a)^m}{m!} e^{-\xi e^{-2\kappa t} a^{\dagger} a} : \right]. \quad (51)$$

由式(37)和式(51)比较可知,在振幅衰减通道中光子计数分布由衰退的量子效率 $\xi e^{-2\kappa t}$ 来控制。此结果能极大简化耗散量子光场光子计数分布的理论研究。

综上,根据连续变量热场纠缠态表象理论,导出了量子系统和环境间的玻色算符互换关系,从而求解了有限温度下系统的密度算符量子主方程,并把其解析解表示为无限维克劳斯算符和的形式。利用光子计数分布的反正规乘积表示,推导出了热噪声影响下光子计数分布的解析演化规律。这些结论能为开放系统退相干行为的理论研究提供一种新的数理处理方法,并为系统光子计数分布的实验研究提供理论参考。

参 考 文 献

- [1] RISKEN H. The Fokker-Planck Equation: Methods of Solutions and Applications[M]. Berlin: Springer, 1984.
- [2] GARDINER C W. Handbook of Stochastic Methods[M]. Heidelberg: Springer, 1990.
- [3] HAAKE F. On a non-Markoffian master equation[J]. Zeitschrift für Physik, 1969, 223(4): 353-363.
- [4] SCHLEICH W P. Quantum Optics in Phase Space[M]. Berlin: Wiley-VCH, 2001.
- [5] FAN H Y, HU L Y. Operator-sum representation of density operators as solutions to master equations obtained via the entangled state approach[J]. Modern Physics Letters A, 2008, 22(25): 2435-2468.
- [6] FAN H Y, WANG S, HU L Y. Evolution of the single-mode squeezed vacuum state in amplitude dissipative channel[J]. Frontiers of Physics, 2014, 9(1): 74-81.

- ty measurement[J].Journal of the Optical Society of America B-Optical Physics,2021,38(6):1776-1781.
- [15] SESHADREESAN K P,KIM S,DOWLING J P,et al.Phase estimation at the quantum Cramér-Rao bound via parity detection[J].Physical Review A,2013,87(4):043833.
- [16] PEZZÉ L,SMERZI A.Mach-Zehnder interferometry at the Heisenberg limit with coherent and squeezed-vacuum light[J].Physical Review Letters,2008,100(7):073601.
- [17] PEZZÉ L,SMERZI A.Ultrasensitive two-mode interferometry with single-mode number squeezing[J].Physical Review Letters,2013,110(16):163604.
- [18] SCHÄFERMEIER C,JEŽEK M,MADSEN L,et al.Deterministic phase measurements exhibiting super-sensitivity and super-resolution[J].Optica,2018,5(1):60-64.
- [19] YURKE B,MCCALL S L,KLAUDER J R. $SU(2)$ and $SU(1,1)$ interferometers[J].Physical Review A,1986,33(6):4033-4054.
- [20] COHEN L,ISTRATI D,DOVRAT L,et al.Super-resolved phase measurements at the shot noise limit by parity measurement[J].Optics Express,2014,22(10):11945-11953.
- [21] CHEKHOVA M V,OU Z Y.Nonlinear interferometers in quantum optics[J].Advances in Optics and Photonics,2016,8(1):104-155.
- [22] OU Z Y,LI X.Quantum $SU(1,1)$ interferometers:Basic principles and applications[J].APL Photonics,2020,5(8):080902.
- [23] KONG J,OU Z Y,ZHANG W.Phase-measurement sensitivity beyond the standard quantum limit in an interferometer consisting of a parametric amplifier and a beam splitter[J].Physical Review A,2013,87(2):023825.
- [24] SPARACIARI C,OLIVARES S,PARIS M G A.Gaussian-state interferometry with passive and active elements[J].Physical Review A,2016,93(2):023810.
- [25] ZHANG J D,YOU C,LI C,et al.Phase sensitivity approaching the quantum Cramér-Rao bound in a modified $SU(1,1)$ interferometer[J].Physical Review A,2021,103(3):032617.
- [26] ADHIKARI S,BHUSAL N,YOU C,et al.Phase estimation in an $SU(1,1)$ interferometer with displaced squeezed states[J].OSA Continuum,2018,1(2):438-450.
- [27] ZHANG J D,ZHANG Z J,CEN L Z,et al.Heisenberg-scaling angular displacement estimation with tunable squeezed bell states[J].Journal of Optics,2019,21(3):035201.

(责任编辑:刘庆松)

(上接第 36 页)

- [7] WU M Y,LV H Y,WANG J S,et al.Wigner-function evolution and photon-number decay of quantum states in a laser cavity with the Kerr medium[J].International Journal of Theoretical Physics,2020,59(2):350-360.
- [8] CHEN J H,FAN H Y.Entropy evolution law in a laser process[J].Annals of Physics,2013,334(7):272-279.
- [9] FAN H Y,KLAUDER J R.Eigenvectors of two particles' relative position and total momentum[J].Physical Review A,1994,49(2):704-707.
- [10] FAN H Y,LOU S Y,HU L Y.Damping law of photocount distribution in a dissipative channel[J].Chinese Physics Letters,2013,30(9):090304.
- [11] CRESSER D J,HAGER J,LEUCHS G,et al.Dissipative System in Quantum Optics[M].Berlin:Springer-Verlag,1982.
- [12] MENG X G,GOAN H S,WANG J S,et al.Nonclassical thermal-state superpositions:Analytical evolution law and decoherence behavior[J].Optics Communications,2018,411(7):15-20.
- [13] FAN H Y,YUN H L,FAN Y.Newton-Leibniz integration for ket-bra operators in quantum mechanics and derivation of entangled state representations[J].Annals of Physics,2006,321(2):480-494.
- [14] HE R,CHEN J H,FAN H Y.Evolution law of Wigner function in laser process[J].Frontiers of Physics,2013,8(4):381-385.
- [15] HU L Y,FENG J,ZHANG Z M.Entanglement and nonclassicality of photon-added two-mode squeezed thermal states[J].Journal of Optical Society America B,2012,29(6):1456-1464.

(责任编辑:刘庆松)