

引用:邵长安,张化生. 基于区间稳定的蔡氏电路系统智能模糊控制[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2025, 38(5): 633-642.

Citation: SHAO Chang'an, ZHANG Huasheng. Intelligent fuzzy control of chua's circuit system based on interval stability [J]. Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition), 2025, 38(5): 633-642.

文章编号 1672-6634(2025)05-0633-10

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2024110011

基于区间稳定的蔡氏电路系统智能模糊控制

邵长安, 张化生

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 研究了一类脉冲和随机影响下的蔡氏电路的一种新的模糊控制问题。首先利用系统的特征值和性能之间的关系定义了蔡氏电路系统的区间稳定性。该定义除了反映系统的稳定性外,还反映了系统的收敛速度。在此基础上,设计了一种可调收敛速度的智能模糊控制器,在保证蔡氏电路稳定性的同时约束蔡氏电路的收敛速度。给出了蔡氏电路变收敛速度算法,可以根据需要加快或减慢蔡氏电路的收敛速度。最后,通过蔡氏电路系统,验证了所提出控制准则的有效性和实用性。

关键词 蔡氏电路; 区间稳定性; T-S 模糊控制; 收敛速度

中图分类号 TM13

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Intelligent fuzzy control of chua's circuit system based on interval stability

SHAO Chang'an, ZHANG Huasheng

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract In this paper, a new fuzzy control problem for a class of Chua's circuits under impulsive and stochastic influences is investigated. The relationship between the eigenvalues and the performance of the system is first used to define the interval stability of the Chua's circuit system. The definition reflects the convergence rate of the system in addition to the stability of the system. On this basis, an intelligent fuzzy controller with adjustable convergence rate is designed to limit the convergence rate of the Chua's circuit while ensuring the stability of the Chua's circuit. The Chua's circuit variable convergence rate algorithm is given, which can speed up or slow down the convergence rate of the Chua's circuit as needed. Finally, the effectiveness and practicality of the proposed control criterion is verified by Chua's circuit system.

Keywords Chua's circuits; interval stability; T-S fuzzy control; convergence rate

0 引言

蔡氏电路由一个电感、一个电阻器、两个电容和蔡氏二极管^[1]组成,呈现出多种非线性动力学现象,如分岔^[2]和混沌^[3]。混沌作为复杂动力系统的主要特征,使非线性混沌蔡氏电路成为混沌研究的标准原型。混

收稿日期: 2024-11-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(6237317); 山东省自然科学基金项目(ZR2022MF293)资助

通信作者: 张化生, 男, 汉族, 博士, 副教授, 研究方向: 随机系统高阶矩稳定性分析与精确控制等, E-mail: zhsh0510@163.com。

沌现象可能导致系统表现出不可预测的行为和性能下降,因此蔡氏电路的控制策略受到了广泛关注^[4-5]。文献[6]研究蔡氏电路的电容同步实现,文献[7]研究存在输入扰动的时变蔡氏电路系统的脉冲镇定问题。

蔡氏电路中非线性二极管的性质给其分析带来了困难。1985年 Takagi 和 Sugeno 提出了基于模糊逻辑的 T-S 模糊模型^[8],该模型允许对非线性系统使用线性理论方法^[9-10]。T-S 模糊模型是一种将非线性系统近似为若干个局部线性系统的模型。它基于模糊集理论,通过构造一组模糊规则来描述系统的动态行为,其中每个规则对应一个线性系统,且通过模糊逻辑将这些局部线性系统组合在一起,最终得到一个非线性的全局近似模型。将蔡氏电路描述为 T-S 模糊模型有助于对其进行分析和控制。在文献[11]中,给出了蔡氏电路的模糊脉冲控制准则。文献[12]给出了模糊滑模控制准则,并将其应用于蔡氏电路系统。

在控制理论领域,脉冲被定义为在很短的时间内发生的状态变化,通常表现为信号幅度的突然波动^[13]。在实际应用中,电路元件的突然切换或电压/电流的快速变化往往会在蔡氏电路中引发脉冲信号^[14]。脉冲系统包含连续和离散动力学的事实使其成为许多研究人员感兴趣的重要对象^[15-16]。文献[17]系统地分析了蔡氏回路中的脉冲效应,提出了一套在脉冲影响下系统镇定的准则,以保证系统的稳定性和可控性。脉冲影响下的可变性使得蔡氏电路的控制策略尤为关键。此外,系统在运行过程中往往不可避免地受到外界随机噪声的扰动,这对控制系统的鲁棒性提出了新的挑战。文献[18]深入探讨了随机共振对蔡氏电路动力学行为的影响,揭示了非线性系统中随机扰动引发的复杂现象。文献[19]用高斯噪声描述了蔡氏电路的随机现象,并给出了适当的噪声强度。综上所述,全面研究脉冲摄动和随机噪声对蔡氏电路的影响不仅在理论层面上具有重要意义,而且对实际应用中的系统优化和控制策略设计具有实际指导意义。

有趣的是,目前大多数蔡氏电路的控制策略都集中在提高系统的稳态性能上,而对动态性能的关注相对较少。动态性能,特别是控制系统的收敛速度,在实际工程应用中尤为重要。例如,希望系统在不同的背景要求下具有不同的收敛速度。随着对系统性能研究的深入,一些学者考虑探索系统极点与性能之间的关系,揭示了区间稳定与镇定的重要性^[20-21]。这些研究成果为优化控制策略提供了深刻的理论支持,揭示了精确控制系统的设计思想。在上述研究的启发下,本文提出了脉冲影响下蔡氏电路可变收敛速度的模糊控制准则。该准则旨在平衡稳态性能和动态响应,以确保蔡氏电路在存在脉冲时能够按照期望的收敛速度稳定。本文的主要贡献包括三个方面。

(1) 基于广义极点配置原理和 T-S 模糊模型,给出了脉冲和随机影响下蔡氏电路系统可变收敛速度的稳定性定义。该定义不仅反映了系统的稳定性,而且能反映系统的收敛速度。

(2) 设计了能约束蔡氏电路收敛速度的模糊控制器。与传统的模糊控制器不同,本文的控制器能够在保证蔡氏电路稳定性的同时约束其收敛速度,从而实现更精确的系统控制。

(3) 提出了蔡氏电路系统的变收敛速度算法。该算法允许根据需要调整蔡氏电路的收敛速度。应用于信号处理或通信系统时,可根据具体要求控制响应时间或增强信号处理能力。

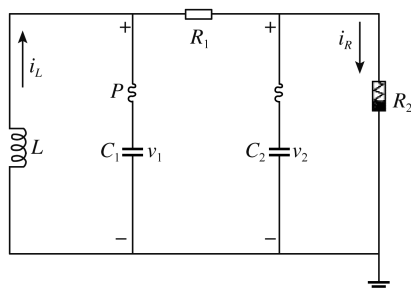


图1 受脉冲影响的蔡氏电路

Fig. 1 Chua's circuit affected by impulses

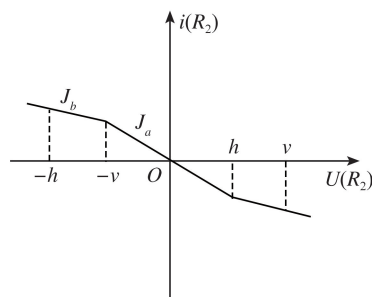


图2 蔡氏二极管的 $U-i$ 特性

Fig. 2 $U-i$ characteristics of the Chua's diode

1 基础知识问题表述

本节着重于蔡氏电路系统的建模。采用了 T-S 模糊方法。蔡氏电路是一个典型的由电感 L 、电阻 R_1 、

两个电容器 C_1 和 C_2 , 和一个蔡氏二极管 R_2 组成的混沌系统。如图 1 所示, 考虑受脉冲和随机影响的蔡氏电路。 P 表示电路中的脉冲现象, 将外界随机干扰看作高斯白噪声。 R_2 的 $U-i$ 特性如图 2 所示。

蔡氏二极管的 $U-i$ 特性是蔡氏电路能够表现出复杂非线性和混沌行为的根本原因。具体地说, 蔡氏二极管的分段线性 $U-i$ 特性在蔡氏电路中提供了一个非线性反馈机制, 进而导致电路的动力学行为从简单的稳定状态过渡到复杂的混沌行为。蔡氏电路的动态性能可由下式描述

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{d\tau} = \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R} (v_2 - v_1) - f(v_1) \right), \tau \neq \tau_i, \\ \frac{dv_2}{d\tau} = \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R} (v_1 - v_2 + i) \right), \tau \neq \tau_i, \\ \frac{di}{d\tau} = -\frac{1}{L} v_2, \tau \neq \tau_i, \\ v_1(\tau) = (\zeta_1 + 1)v_1(\tau^-), \tau = \tau_i, \\ v_2(\tau) = (\zeta_2 + 1)v_2(\tau^-), \tau = \tau_i, \\ i(\tau) = (\zeta_i + 1)i(\tau^-), \tau = \tau_i, \end{cases} \quad (1)$$

式中 $f(v_1(\tau)) = J_b v_1 + \frac{1}{2}(J_a - J_b)(|v_1 + V| - |v_1 - V|)$ 。 $\{\tau_i\}$ 是满足 $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \dots$ 的脉冲时间序列。定义 $\Delta x(\tau_i) = x(\tau_i^+) - x(\tau_i^-)$, $x(\tau_i^+) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_i^+} x(\tau) = x(\tau_i)$, $x(\tau_i^-) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_i^-} x(\tau)$ 。

接下来我们假设 $x_1 = v_1/V$, $x_2 = v_2/V$, $x_3 = Ri/V$, $t = \tau/RC_2$, $a = RJ_a$, $b = RJ_b$, $x_3 = Ri/V$, $\tilde{n} = C_2/C_1$, $\varphi = C_2 R^2/L$ 。则(1)式可以转化为以下状态空间方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \tilde{n}(x_2(t) - x_1(t) - f(x_1(t))), t \neq t_i, \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), t \neq t_i, \\ \dot{x}_3(t) = -\varphi x_2(t), t \neq t_i, \\ x_1(t) = (\zeta_1 + 1)x_1(t^-), t = t_i, \\ x_2(t) = (\zeta_2 + 1)x_2(t^-), t = t_i, \\ x_3(t) = (\zeta_i + 1)x_3(t^-), t = t_i, \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\dot{x} = dx/dt$, $f(x_1(t)) = bx_1 + \frac{1}{2}(a - b)(|x_1 + V| - |x_1 - V|)$, $f(x_1) \in [-e, e](e > V > 0)$ 。

利用模糊规则 i : 如果 $\xi_1(t)$ 是 z_{i1} , $\dots$, $\xi_p(t)$ 是 z_{ip} , 那么

$$\begin{cases} dx(t) = \mathbf{A}_i x(t) dt + \mathbf{D}_i x(t) d\omega(t), t \neq t_i, \\ \Delta x(t) = \mathbf{A}_{ii} x(t^-), t = t_i, \end{cases}$$

式中 s 是模糊规则的数量, $i=1, 2, \dots, s$, $z_{ij} (j=1, \dots, p)$ 代表模糊集。 $\xi_i(t)$ 是前件变量, 矩阵 $\mathbf{A}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{G}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}_{ii} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是确定的系统矩阵。通过单点模糊化、乘积理机和中心平均去模糊化, 系统(2)可以写成

$$\begin{cases} dx(t) = \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t)) \mathbf{A}_i x(t) dt + \mathbf{D}_i x(t) d\omega(t), t \neq t_i, \\ \Delta x(t) = \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t)) \mathbf{A}_{ii} x(t^-), t = t_i, \end{cases} \quad (3)$$

式中 $\omega_i(\xi(t)) = \frac{\nu_i(\xi(t))}{\sum_{i=1}^s \nu_i(\xi(t))}$, $\nu_i(\xi(t)) = \prod_{j=1}^p z_{ij}(\xi_j(t))$, $z_{ij}(\xi_j(t))$ 是 $\xi_j(t)$ 在 z_{ij} 中的隶属度。假设

$\nu_i(\xi(t)) \geq 0$, 则 $\omega_i(\xi(t)) \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t)) = 1$ 。

定义 1 ^[22] 如果对于任意 $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} E \|\mathbf{x}(t)\|^2 = 0$ 成立, 则称系统(3)是均方渐近稳定的, 其中 $\mathbf{x}(0)$ 为系统(3)的初始值。其中 E 表示数学期望。

定义 2^[23] 设 $\mathcal{L}_{A_i, D_i}$ 为与系统(3)相关联的特征值算子满足 $\mathcal{L}_{A_i, D_i}: X \mapsto A_i X + X A_i^T + D_i X D_i^T \in S_n$, 式中 $X \in S_n$. 且存在一个标量 λ 使得 $\mathcal{L}_{A_i, D_i} X = \lambda X$, 其中 λ 是矩阵 $\mathcal{L}_{A_i, D_i}$ 的特征值, X 是矩阵 $\mathcal{L}_{A_i, D_i}$ 对应于特征值 λ 的特征向量. $\sigma(\mathcal{L}_{A_i, D_i})$ 表示线性算子 $\mathcal{L}_{A_i, D_i}$ 的谱集.

定义 3 如果系统(3)是渐近稳定的且存在 $\mathcal{R}(\sigma(\mathcal{L}_{A_i, D_i})) \in (-c, -d)$, 则系统(3)被称为区间均方渐近稳定的, 式中 $\mathcal{R}$ 表示特征值的实部.

注 1 通过定义系统的特征值算子, 可以反映整个系统的收敛速度. 在系统是均方渐近稳定的前提下, 当特征值的实部在不同的区间时, 系统的收敛速度是不同的.

引理 1^[24] 考虑随机微分系统 $dx(t) = g_1(t, x(t))dt + g_2(t, x(t))d\omega(t)$, 其中 $t > 0$ 且 $x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$. 若 $V \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$, 则 $V(x, t)$ 是满足下式的一维伊藤过程

$$dV(x, t) = \mathcal{L}V dt + V_x^T g_2(x, t) d\omega(t) = [V_t(x, t) + \frac{1}{2} \text{trace}[g_2^T(x, t) V_{xx}(x, t) g_2(x, t)] + V_x(x, t) g_1(x, t)] dt + V_x^T(x, t) g_2(x, t) d\omega(t).$$

引理 2^[25] 如果 $A_i P + P A_i^T + D_i P D_i^T < 0$ 或者 $A_i^T P + P A_i + D_i^T P D_i < 0$ 成立, 则称系统(2)是均方渐近稳定的, 式中 $P > 0$.

2 蔡氏电路系统的区间稳定性分析

本节我们研究蔡氏电路可变收敛速度的均方渐近稳定性.

定理 1 对于给定的常数 $c > d \geq 0$ 和标量 $\rho > 0$. 如果存在任意具有合适维数的矩阵 $X > 0$, 标量 $\mu > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -\mu X & X(A_i + I)^T \\ * & -X \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1i} & X D_i^T \\ * & -X \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{2i} & X D_i^T \\ * & -X \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

式中 $Y_{1i} = \frac{\ln \mu}{\rho} X + (A_i + dI)X + X(A_i + dI)^T$, $Y_{2i} = \frac{\ln \mu}{\rho} X - (A_i + cI)X - X(A_i + cI)^T$, 对于任何非负标量 ξ, ζ , 设 $\partial_{\xi, \zeta}$ 表示 t_i 满足

$$\ln \mu N(t, s) \leq \xi + (\frac{\ln \mu}{\rho} - \zeta)(t - s), t \geq s \geq t_0, \quad (7)$$

则系统(3)是在 $\partial_{\xi, \zeta}$ 上的区间均方渐近稳定的.

证 由定义 3 可知, 如果系统(3)是均方渐近稳定的, 且满足 $\mathcal{R}(\sigma(\mathcal{L}_{A_i, D_i})) \in (-c, \infty)$ 和 $\mathcal{R}(\sigma(\mathcal{L}_{A_i, D_i})) \in (-\infty, -d)$, 则系统(3)是区间均方渐近稳定的. 因此, 考虑系统

$$\begin{cases} dx(t) = \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t))((A_i + dI)x(t)dt + D_i x(t)d\omega(t)), t \neq t_i, \\ \Delta x(t) = \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t^-))A_{ii}x(t^-), t = t_i, \end{cases} \quad (8)$$

和

$$\begin{cases} dx(t) = \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t))(-(A_i + cI)x(t)dt + D_i x(t)d\omega(t)), t \neq t_i, \\ \Delta x(t) = \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t^-))A_{ii}x(t^-), t = t_i. \end{cases} \quad (9)$$

对于系统(8), 设 $X^{-1} = P$, 将(5)的两边乘以 $\text{diag}\{P, P\}$, 结合舒尔补得 $\frac{\ln \mu}{\rho} P + P(dI + A_i) + (dI + A_i)^T P + D_i^T P D_i < 0$.

存在一个足够小的标量 ζ 满足

$$\mu' \mathbf{P} + \mathbf{P}(d\mathbf{I} + \mathbf{A}_i) + (d\mathbf{I} + \mathbf{A}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{D}_i^T \mathbf{P} \mathbf{D}_i < 0, \quad (10)$$

式中 $\mu' = \frac{\ln \mu}{\rho} + \zeta$ 。同样,(4)式的两边乘以 $\text{diag}\{\mathbf{P}, \mathbf{P}\}$, 并利用舒尔补得

$$(\mathbf{A}_{ii} + \mathbf{I})^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_{ii} + \mathbf{I}) - \mu \mathbf{P} < 0. \quad (11)$$

定义 Lyapunov 函数为 $\mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_i)) &= \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t_i^-)) \mathbf{x}^T(t_i^-) (\mathbf{A}_{ii} + \mathbf{I})^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_{ii} + \mathbf{I}) \mathbf{x}(t_i^-) \\ &\leq \mu \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t_i^-)) \mathbf{x}^T(t_i^-) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_i^-) \leq \mu \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_i^-)). \end{aligned} \quad (12)$$

对任意 $t \in [t_i, t_{i+1})$, 由伊藤公式可得

$$\mathcal{L} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t)) \mathbf{x}^T(t) [\mathbf{P}(d\mathbf{I} + \mathbf{A}_i) + (\mathbf{A}_i + d\mathbf{I})^T \mathbf{P}] \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}_i^T \mathbf{P} \mathbf{D}_i \mathbf{x}(t). \quad (13)$$

将(10)式代入(13)式得

$$\mathcal{L} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -\mu' \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)), t \in [t_i, t_{i+1}), \quad (14)$$

进而得到

$$d\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t)) 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{D}_i(t) \mathbf{x}(t) d\omega(t) - \mu' \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) dt, \quad (15)$$

即

$$d(e^{\mu' t} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))) \leq \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t)) 2e^{\mu' t} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{D}_i(t) \mathbf{x}(t) d\omega(t). \quad (16)$$

对(16)式在区间 $[t_i, t]$ 上积分, 然后求期望

$$E(\mathbf{V}(\mathbf{x}(t))) \leq e^{-\mu'(t-t_i)} E(\mathbf{V}(\mathbf{x}(t_i))), t \in [t_i, t_{i+1}), \quad (17)$$

代入(12)式得

$$E(\mathbf{V}(\mathbf{x}(t))) \leq \mu e^{-\mu'(t-t_i)} E(\mathbf{V}(\mathbf{x}(t_i^-))), t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (18)$$

由此可得, 对任意的 $t \in [t_i, t_{i+1})$,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t))) &\leq E(\mu^t e^{-\mu'(t-t_0)} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_0))) \leq e^\xi + (\frac{\ln \mu}{\rho} - \zeta)(t - t_0) E(e^{-\mu'(t-t_0)} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_0))), \\ &\leq E(e^\xi e^{-\zeta(t-t_0)} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_0))), \end{aligned} \quad (19)$$

也就是说

$$E(\|\mathbf{x}(t)\|^2) \leq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P}) e^\xi}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} E(\mu e^{-\zeta(t-t_0)} \|\mathbf{x}(t_0)\|^2). \quad (20)$$

从而得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} E \|\mathbf{x}(t)\|^2 = 0$ 。这表明系统(8)在 $\partial_{\xi, \zeta}$ 上是均方渐近稳定的。同时, 我们还可以得到 $\mathcal{R}(\sigma(\mathcal{L}_{\mathbf{A}_i, \mathbf{G}})) \in (-\infty, -d)$ 。同理, 系统(9)的稳定性判据(4), (6)可通过类似的过程得到, 从而保证系统(9)为在 $\partial_{\xi, \zeta}$ 上是均方渐近稳定的, 即

$$-\mathbf{P}(\mathbf{A}_i + c\mathbf{I}) - (\mathbf{A}_i + c\mathbf{I})^T \mathbf{P} + \mathbf{D}_i^T \mathbf{P} \mathbf{D}_i < 0, \quad (21)$$

因为 $\mathbf{D}_i^T \mathbf{P} \mathbf{D}_i \geq 0$, 所以

$$-\mathbf{P}(\mathbf{A}_i + c\mathbf{I}) - (\mathbf{A}_i + c\mathbf{I})^T \mathbf{P} - \mathbf{D}_i^T \mathbf{P} \mathbf{D}_i < 0, \quad (22)$$

根据定义2可知 $\mathcal{R}(\sigma(\mathcal{L}_{\mathbf{A}_i, \mathbf{D}_i})) \in (-c, \infty)$, 证明结束。

注2 当 $\mu \geq 1$ 时, 脉冲形式为扰动脉冲, 将(7)式改写为

$$N(t, s) \leq \frac{t-s}{\varphi} + N', t_0 \leq s \leq t, \quad (23)$$

式中 $\varphi = \frac{\ln \mu}{(\ln \mu)/\rho - \zeta}$, $N' = \frac{\xi}{\ln \mu}$, 这意味着脉冲不能出现得太频繁, 即连续脉冲之间的平均时间间隔不小于 φ 。

注3 当 $\mu < 1$ 时, 脉冲形式为镇定脉冲, 将(7)式改写为

$$N(t, s) \geq \frac{t-s}{\varphi} - N', t_0 \leq s \leq t, \quad (24)$$

式中 $\varphi = \frac{\ln(1/\mu)}{\ln(1/\mu)/\rho + \zeta}$, $N' = \frac{\xi}{\ln(1/\mu)}$, 这要求连续脉冲的平均停留时间小于 φ 。

注4 定理1给出了评价系统稳定性和收敛速度的判据。也就是说, 当系统是均方渐近稳定且系统的特征值分布在给定区间 $(-c, -d)$ 内时, 系统(3)是均方渐近稳定的, 且收敛速度可以变化。

推论1 给定标量 $\rho > 0$, 存在矩阵 $\mathbf{X}$ 和标量 $\mu > 0$, 使得条件(4~6)成立。对于任意 $N' \geq 0$ 且 $\varphi \geq \rho$, 当 $\mu \geq 1$ 时, 系统(3)是 $\partial_{1-\text{ave}}[\varphi, N']$ 上的可变收敛速度的均方渐近稳定的。对于任意 $N' \geq 0$ 且 $\varphi \leq \rho$, 当 $\mu < 1$ 时, 它是 $\partial_{2-\text{ave}}[\varphi, N']$ 上的可变收敛速度的均方渐近稳定的。

3 蔡氏电路系统的智能镇定

在本节中, 我们设计了模糊控制器来实现由 c, d 驱动的可变收敛速度的镇定。考虑下列系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \tilde{n}(x_2(t) - x_1(t) - f(x_1(t))) + u_1(t), t \neq t_i, \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + u_2(t), t \neq t_i, \\ \dot{x}_3(t) = -\varphi x_2(t) + u_3(t), t \neq t_i, \\ x_1(t) = (\zeta_1 + 1)x_1(t^-), t = t_i, \\ x_2(t) = (\zeta_2 + 1)x_2(t^-), t = t_i, \\ x_3(t) = (\zeta_i + 1)x_3(t^-), t = t_i, \end{cases} \quad (25)$$

采用 T-S 模糊模型, (25)式可改写为

$$\begin{cases} d\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t)) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i u(t)] dt + \mathbf{D}_i \mathbf{x}(t) d\omega(t), t \neq t_i \\ \Delta \mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t^-)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t^-), t = t_i, \end{cases} \quad (26)$$

控制器设计如下, 模糊规则 i : 如果 $\xi_1(t)$ 是 $z_{i1}, \dots, \xi_p(t)$ 是 z_{ip} , 那么

$$u_i(t) = \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t), i = 1, 2, \dots, s, \quad (27)$$

式中 $\mathbf{K}_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为控制增益矩阵, 控制器为

$$u_i(t) = \sum_{i=1}^s \omega_i(\xi(t)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t). \quad (28)$$

定义4 在 $\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{X}^{-1}$ 的控制器(28)的作用下, 如果存在 $\mathcal{R}(\sigma(\mathcal{L}_{\mathbf{A}_i, \mathbf{D}_i})) \in (-c, -d)$, 则称系统(26)是由 c, d 驱动的可变收敛速度的均方渐近镇定的。

定理2 对于给定的常数 $c > d \geq 0$ 和标量 $\rho > 0$ 。如果存在任意具有合适维数的矩阵 $\mathbf{X} > 0$, 标量 $\mu > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -\mu \mathbf{X} & \mathbf{X}(\mathbf{A}_i + \mathbf{I})^T \\ * & -\mathbf{X} \end{bmatrix} < 0, \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_{1i} & \mathbf{X} \mathbf{D}_i^T \\ * & -\mathbf{X} \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_{2i} & \mathbf{X} \mathbf{D}_i^T \\ * & -\mathbf{X} \end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

这里 $\mathbf{Y}'_{1i} = \frac{\ln \mu}{\rho} \mathbf{X} + (\mathbf{A}_i + d\mathbf{I})\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{A}_i + d\mathbf{I})^T + \mathbf{B}_i \mathbf{Y}_i + \mathbf{Y}_i^T \mathbf{B}_i^T$, $\mathbf{Y}'_{2i} = \frac{\ln \mu}{\rho} \mathbf{X} - (\mathbf{A}_i + c\mathbf{I})\mathbf{X} - \mathbf{X}(\mathbf{A}_i + c\mathbf{I})^T - \mathbf{B}_i \mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{B}_i^T$, 当 $\mu \geq 1$ 时, 在 $\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{X}^{-1}$ 的控制器(28)的作用下, 系统(3)是在 $\partial_{1-\text{ave}}[\varphi, N']$ 上由 c, d 驱动的可变收敛速度的均方渐近镇定的。相反, 在相同条件下, 当 $\mu < 1$ 时, 在 $\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{X}^{-1}$ 的控制器(28)的作用下, 系统(3)是在 $\partial_{2-\text{ave}}[\varphi, N']$ 上由 c, d 驱动的可变收敛速度的均方渐近镇定的。

证 将定理1中的 A_i 替换为 $A_i + B_i K_i$, 令 $K_i = Y_i X^{-1}$ 。证明的其余部分与定理1相似, 这里不再赘述。

弱化定理2中的条件, 可以得到系统(3)为均方渐近镇定的判据。

推论2 对于给定的标量 $\rho > 0$, 如果存在任意具有合适维数的矩阵 $X > 0$, 标量 $\mu > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -\mu X & X(A_i + I)^T \\ * & -X \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} Y_i'' & X D_i^T \\ * & -X \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

式中 $Y_i'' = \frac{\ln \mu}{\rho} X + A_i X + X A_i + B_i Y_i + Y_i^T B_i^T$ 。当 $\mu \geq 1$ 时, 在 $K_i = Y_i X^{-1}$ 的控制器(28)的作用下, 系统(3)是在 $\partial_{1-\text{ave}}[\varphi, N']$ 上均方渐近镇定的。相反, 在相同条件下, 当 $\mu < 1$ 时, 在 $K_i = Y_i X^{-1}$ 的控制器(28)的作用下, 系统(3)是在 $\partial_{2-\text{ave}}[\varphi, N']$ 上均方渐近镇定的。

注5 推论2的控制器设计与大多数现有控制器相同, 仅确保系统是镇定的。在实践中, 也有人希望通过调整控制器参数来改变系统的收敛速度, 但没有调整的方向。定理2给出了调整方向。利用系统极点与系统性能之间的关系, 通过控制系统在特定区间内的特征值来控制系统的收敛速度。

4 仿真实例

在本节中, 分别对扰动脉冲和镇定脉冲下的蔡氏电路进行了仿真实验, 结果表明了所提方法的有效性。

例1 考虑参数变换后的蔡氏电路方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \tilde{n}(x_2(t) - x_1(t) - f(x_1(t))) + b_1 u_1(t), \\ \dot{x}_2 = x_1(t) - x x_2(t) + x_3(t) + b_2 u_2(t), \\ \dot{x}_3 = -\varphi x x_2(t) + b_3 x_3(t), \end{cases} \quad (34)$$

式中 $f(x_1(t)) = b x_1 + \frac{1}{2}(a-b)(|x_1+V| - |x_1-V|)$, $f(x_1) \in [-e, e]$ ($e > V > 0$) 使用参数 $\tilde{n} = 9.38$, $\varphi = 16.25$, $a = -1.24$, $b = -0.68$, $V = 1$ 。假设系统的初始值为 $x_1 = 1.6$, $x_2 = -0.3$, $x_3 = -1.2$, 系统在 $u=0$ 条件下的混沌吸引子如图3所示。

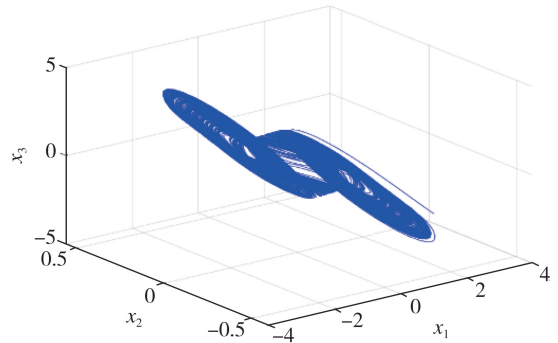


图3 蔡氏电路系统的混沌吸引子

Fig. 3 Chaotic attractor of the Tsai circuit system

让 $\xi(t) = x_1(t)$, 给定两个模糊规则。

规则1: 如果 $\xi(t)$ 是 M_1 (靠近0时), 那么 $dx(t) = (A_1 x(t) + B_1 u(t))dt + D_1 x(t)d\omega(t)$ 。

规则2: 如果 $\xi(t)$ 是 M_2 (靠近边界时), 那么 $dx(t) = (A_2 x(t) + B_2 u(t))dt + D_2 x(t)d\omega(t)$ 。

M_1 的隶属函数 $M_1(\xi(t)) = \frac{1}{2}(1 - \phi(x_1(t))/h)$, M_2 的隶属函数 $M_2(\xi(t)) = \frac{1}{2}(1 + \phi(x_1(t))/h)$,

$h = 1.8$, 其中 $\phi(x_1(t)) = \begin{cases} f(x_1)/x_1, & x_1 \neq 0, \\ J_a, & x_1 = 0, \end{cases}$ $A_1 = \begin{bmatrix} \tilde{n}(h-1) & \tilde{n} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\varphi & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -\tilde{n}(h+1) & \tilde{n} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\varphi & 0 \end{bmatrix}$,

$B_1 = B_2 = I_{3 \times 3}$, $D_1 = D_2 = \text{diag}\{0.1, 0.1, 0.1\}$ 电路中脉冲的影响考虑如下形式 $\Delta x(t) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} x(t^-), t = t_i$ 。

由推论2, 设 $\mu = 3$, $\rho = 0.2$, 在Matlab中运行推论2的LMIs, 可以得到控制器增益:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -11.656 & 0 & -5.190 & 0 & 0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & -3.156 & 0 & 7.625 & 0 \\ 0.000 & 0 & 7.625 & 0 & -4.156 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 22.108 & 0 & -5.190 & 0 & -0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & -3.156 & 0 & 7.890 & 0 \\ 0.000 & 0 & 7.890 & 0 & -4.156 & 0 \end{bmatrix}。$$

为了证明非线性控制的有效性,在原始系统中代入了控制器(34)。图4给出了被控系统的状态响应曲线。系统状态在 $t=2.5$ s左右趋于平衡。

根据定理2,设区间 $(-c, -d) = (-3.5, -0.5)$,通过求解运行定理2的LMIs可得

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -9.500 & 0 & -5.190 & 0 & -0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & -1.000 & 0 & 7.625 & 0 \\ -0.000 & 0 & 7.625 & 0 & -2.000 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 24.264 & 0 & -5.190 & 0 & 0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & -1.000 & 0 & 7.890 & 0 \\ 0.000 & 0 & 7.890 & 0 & -2.000 & 0 \end{bmatrix}。$$

在这种情况下,系统达到平衡较慢,如图5所示。当 $t \geq 10$ 时 $|x_i(t)| < 0.01 (i=1,2,3)$ 。相反,将间隔设置为 $(-c, -d) = (-8.5, -6.5)$ 可以使系统更快地达到平衡。根据定理2,求解相应的LMIs得到

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -15.000 & 0 & -5.190 & 0 & 0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & -6.500 & 0 & 7.625 & 0 \\ -0.000 & 0 & 7.625 & 0 & -7.500 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 18.764 & 0 & -5.190 & 0 & 0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & -6.500 & 0 & 7.890 & 0 \\ 0.000 & 0 & 7.890 & 0 & -7.500 & 0 \end{bmatrix}。$$

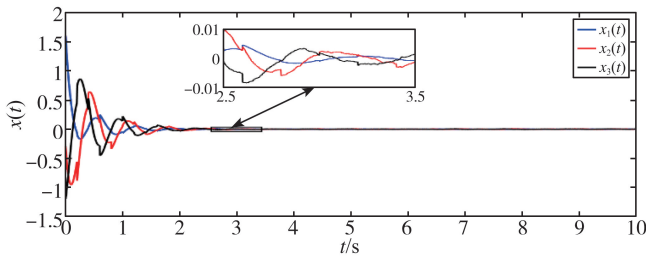


图4 闭环系统的状态轨迹图

Fig. 4 State trajectory of closed-loop system

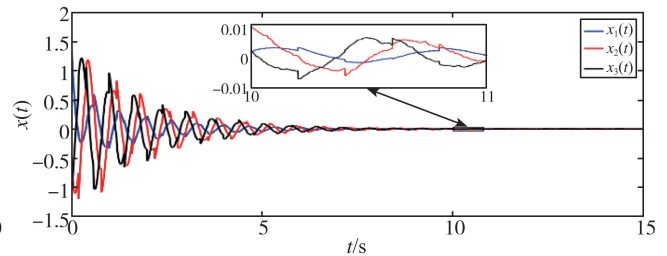


图5 带参数 $(-3.5, -0.5)$ 闭环系统的状态轨迹

Fig. 5 State trajectories of the closed-loop system with parameters $(-3.5, -0.5)$

图6给出了被控系统的状态响应曲线。系统状态在约 $t \geq 4$ 时趋于平衡。

注7 从图5和图6可以看出,本文提出的方法可以通过调整区间来控制系统收敛速度。在采用蔡氏电路的信号处理或通信系统中,可以根据需要控制响应时间或增强信号处理能力。

例2 本节讨论镇定脉冲影响下的蔡氏电路。考虑系统(34),其中脉冲变为下列形式

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t^-), t = t_i。$$

使用参数 $\tilde{n}=9.38, \varphi=16.25, a=-1.24, b=-0.68, V=1$ 。假设系统的初始值为 $x_1=1.5, x_2=-0.5, x_3=-1.5$,由推论2,设 $\mu=0.8, \rho=0.8$,在Matlab中运行程序可以得到控制器增益:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -7.892 & 7 & -5.190 & 0 & 0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & -0.607 & 3 & 7.625 & 0 \\ 0.000 & 0 & 7.625 & 0 & -0.392 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 25.871 & 3 & -5.190 & 0 & 0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & 0.607 & 3 & 7.890 & 0 \\ 0.000 & 0 & 7.890 & 0 & -0.392 & 7 \end{bmatrix}。$$

在原始系统中代入了控制器(34)。图7给出了被控系统的状态响应曲线。系统状态在 $t=1.5$ s左右趋于平衡。

根据定理2,设区间 $(-c, -d) = (-0.3, -0.1)$,通过求解相应的LMIs可得

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -7.700 & 0 & -5.190 & 0 & -0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & 0.800 & 0 & 7.625 & 0 \\ 0.000 & 0 & 7.625 & 0 & -0.200 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 26.064 & 0 & -5.190 & 0 & 0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & -0.800 & 0 & 7.890 & 0 \\ 0.000 & 0 & 7.890 & 0 & -0.200 & 0 \end{bmatrix}。$$

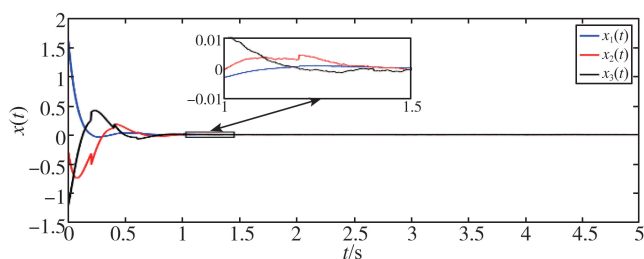
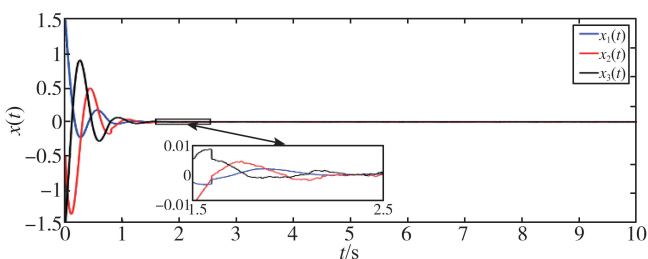
图6 带参数 $(-8.5, -6.5)$ 闭环系统的状态轨迹Fig. 6 State trajectories of the closed-loop system with parameters $(-8.5, -6.5)$ 

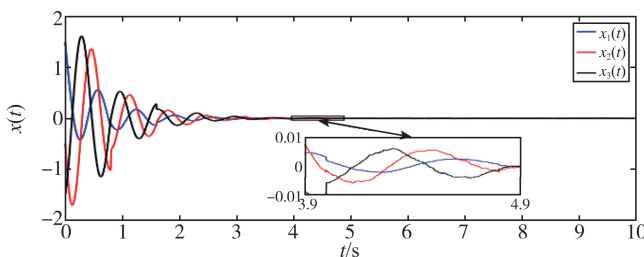
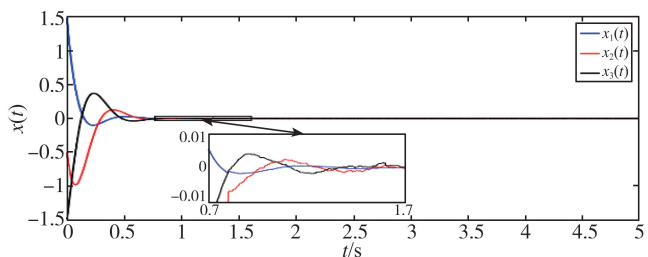
图7 闭环系统的状态轨迹图

Fig. 7 State trajectory diagram of closed-loop system

在这种情况下,系统达到平衡较慢,如图8所示。当 $t \geq 4$ 时 $|x_i(t)| < 0.01 (i=1,2,3)$ 。相反,将间隔设置为 $(-c, -d) = (-7.5, -5.5)$ 可以使系统更快地达到平衡。根据定理2,求解相应的 LMIs 得到

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -14.000 & 0 & -5.190 & 0 & -0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & -5.500 & 0 & 7.625 & 0 \\ 0.000 & 0 & 7.625 & 0 & -6.500 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 19.764 & 0 & -5.190 & 0 & -0.000 & 0 \\ -5.190 & 0 & -5.500 & 0 & 7.890 & 0 \\ -0.000 & 0 & 7.890 & 0 & -6.500 & 0 \end{bmatrix}。$$

图9给出了被控系统的状态响应曲线。系统状态在约 $t \geq 0.7$ 时趋于平衡。

图8 带参数 $(-0.3, -0.1)$ 闭环系统的状态轨迹Fig. 8 State trajectories of the closed-loop system with parameters $(-0.3, -0.1)$ 图9 带参数 $(-7.5, -5.5)$ 闭环系统的状态轨迹Fig. 9 State trajectories of the closed-loop system with parameters $(-7.5, -5.5)$

注8 从例1和例2可以看出,无论是在扰动脉冲还是镇定脉冲作用下,我们的方法都可以在保证系统镇定的前提下约束系统的收敛速度。经典的 T-S 模糊控制方法、模糊控制方法、滑模方法等大都只能保证系统镇定,而我们提出的方法在保证镇定的同时致力于对系统收敛速度的约束。本文方法所设计的控制器可以根据实际需要加快或减慢系统的收敛速度。

5 结论

本文研究了脉冲和随机影响下蔡氏电路变收敛速度的智能模糊控制准则。基于 T-S 模糊模型和广义极点配置,设计了高精度模糊控制器,使系统能以期望速率达到平衡。此外,给出了一种调节收敛速度的算法,利用该算法总能找到合适的 c, d 来加速或减慢系统收敛速度以满足需要。考虑到脉冲控制的成本优势,在脉冲控制中引入变收敛速度稳定性是未来研究的一个有趣的方向。

参 考 文 献

- [1] ZHANG J, ZUO J, WANG M, et al. Design and application of multiscroll chaotic attractors based on a novel multi-segmented memristor [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2024, 181: 114676.
- [2] ZHEN, Z, HUANG X, YANG Y. Bifurcation curves of a linear system attached with a bistable nonlinear energy sink [J]. Nonlinear Dynamics, 2024, 1-26.
- [3] JIA B, WU H, GUO K. Chaos theory meets deep learning: a new approach to time series forecasting [J]. Expert Systems with Applications, 2024, 255: 124533.
- [4] WANG N, XU D, LI Z, et al. A general configuration for nonlinear circuit employing current-controlled nonlinearity: application in

- Chua's circuit[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 177: 114233.
- [5] XUE W, ZHANG Y, XU Q, et al. Initial-condition-controlled synchronization behaviors in inductively coupled memristive Chua's circuits[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024; 112: 10417-10432.
- [6] LIU Z, MA J, ZHANG G, et al. Synchronization control between two Chua's circuits via capacitive coupling[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 360: 94-106.
- [7] CHEN W, XU W, ZHENG W. Sliding-mode-based impulsive control for a class of time-delay systems with input disturbance[J]. *Automatica*, 2024, 164: 111633.
- [8] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 1985, 15 (1): 116-132.
- [9] SHI P, SU X, LI, F. Dissipativity-based filtering for fuzzy switched systems with stochastic perturbation[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 61(6): 1694-1699.
- [10] CAMPOS VCS, BRAGA MF, FREZZATTO L. An auxiliary system discretization approach to Takagi-Sugeno fuzzy models[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2022, 426: 94-105.
- [11] LIU Y, ZHAO S, LU J. A new fuzzy impulsive control of chaotic systems based on T-S fuzzy model[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 19 (2): 393-398.
- [12] LIANG C, GE M, LIU Z, et al. Predefined-time stabilization of T-S fuzzy systems: a novel integral sliding mode-based approach[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022, 30 (10): 4423-4433.
- [13] LI X, SONG S. Stabilization of delay systems: delay-dependent impulsive control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 62 (1): 406-411.
- [14] LI X, ZHU C. Saturated impulsive control of nonlinear systems with applications[J]. *Automatica*, 2022, 142: 110375.
- [15] LU J, JIANG B, ZHENG W. Potential impacts of delay on stability of impulsive control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 67(10): 5179-5190.
- [16] LI X, ZHANG T, WU J. Input-to-state stability of impulsive systems via event-triggered impulsive control[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 52 (7): 7187-7195.
- [17] WANG X, ZHANG H. Intelligent control of convergence rate of impulsive dynamic systems affected by nonlinear disturbances under stabilizing impulses and its application in Chua's circuit[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 169: 113289.
- [18] SILVA I G, KOMETA W, STAVRINI S G, et al. Observation of stochastic resonance for weak periodic magnetic field signal using a chaotic system[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, 94: 105558.
- [19] PREBIANCA F, ALBUQUERQUE H A, BEIMS M W. Describing intrinsic noise in Chua's circuit[J]. *Physics Letters A*, 2018, 382 (35): 2420-2423.
- [20] 戴玉真, 张化生. 线性时变时滞切换系统的区间指数稳定/镇定[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2024, 37 (5): 18-28.
- [21] ZHANG H, XIA J, SHEN H, et al. Pth moment regional stability/stabilization and generalized pole assignment of linear stochastic systems: Based on the generalized[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30 (8): 3234-3249.
- [22] ZHANG H, DENG Y, XIA J, et al. Accurate stabilization for linear stochastic systems based on region pole assignment and its applications[J]. *Systems Control Letters*, 2022, 165: 105263.
- [23] ZHANG W, XIE L, CHEN B S. Stochastic H_2/H_∞ Control: A Nash Game Approach[M]. Boca Raton: CRC Press. 2017.
- [24] CHEN W, WANG J, TANG Y, et al. Robust H_∞ control of uncertain linear impulsive stochastic systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, 18 (13): 1348-1371.
- [25] LI Y, ZHANG H, ZHANG T, et al. Interval stability/stabilization and H_∞ feedback control for linear impulsive stochastic systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2023, 437: 127552.

(责任编辑:赵海军)