

引用:田嘉宁,蒋蒙蒙. 基于参数设计的严格前馈时滞非线性系统的全局渐近稳定[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2025, 38(5):643-653.

Citation: TIAN Jianing, JIANG Mengmeng. Global asymptotic stabilization of strict-feedforward nonlinear time-delay systems based on parametric design[J]. Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition), 2025, 38(5):643-653.

文章编号 1672-6634(2025)05-0643-11

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2024110013

基于参数设计的严格前馈时滞非线性系统的全局渐近稳定

田嘉宁, 蒋蒙蒙

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 针对一类积分器、非线性函数及输入中均包含时滞的严格前馈非线性系统,研究了全局渐近稳定问题。为解决这一问题,构造了一个新型参数相关的状态反馈控制器使得闭环系统的平衡点是全局渐近稳定的。首先,将对考虑的时滞系统引入含参数的坐标变换,并构造合适的 Lyapunov 函数。接下来,利用时滞系统的稳定性判据,给出适当的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,证明该时滞系统的全局渐近稳定性。最后,借助仿真结果证明了该参数相关状态反馈控制器的有效性。

关键词 严格前馈非线性系统; 时间延迟; 全局渐近稳定; 状态反馈

中图分类号 TP13

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Global asymptotic stabilization of strict-feedforward nonlinear time-delay systems based on parametric design

TIAN Jianing, JIANG Mengmeng

(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract The problem of global asymptotic stabilization is investigated for a class of strict-feedforward nonlinear systems where the integrator, nonlinear function, and input all containing time delays. To address this issue, a novel parameter-dependent state feedback controller is designed to ensure that the equilibrium point of the closed-loop system is globally asymptotically stable. Initially, a parameter-incorporated coordinate transformation is introduced to the considered time-delay system, and an appropriate Lyapunov function is constructed. Subsequently, by employing stability criteria for time-delay systems, a suitable Lyapunov-Krasovskii functional is provided to prove the global asymptotic stability of the time-delay system. Finally, simulation results are presented to demonstrate the effectiveness of the parameter-dependent state feedback controller.

Keywords strict-feedforward nonlinear systems; time delays; global asymptotic stabilization; state feedback

收稿日期: 2024-11-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(62103175)资助

通信作者: 蒋蒙蒙, 女, 汉族, 博士, 讲师, 研究方向: 复杂系统智能分析与控制, E-mail: jmm725@163.com。

0 引言

前馈非线性系统(即上三角非线性系统)是一类具有重要研究意义的非线性系统。目前,前馈非线性系统广泛应用于各个领域,如生物系统,网络控制系统,物理设备等^[1-4]。然而,系统中时滞的存在和非线性特性,使得传统的控制方法很难应用到这类系统的分析和控制中,这就需要研究人员寻找新的控制方法和技术。因此,前馈非线性系统的研究得到了广泛关注,参见文献[5-8]。目前,关于前馈非线性系统的研究已经取得了丰硕的成果。在理论研究方面,学者们提出了多种有效的控制方法,如鲁棒控制、自适应控制、智能控制等,在应用实践方面,前馈非线性系统的研究成果已经广泛应用于工业控制、航空航天、交通运输、生物医学等多个领域。

时滞系统构成了真实现象的基本数学模型,在工程、力学等许多科学领域中也经常会遇到时滞问题,因此对时滞系统控制问题的研究和分析成为重要问题之一。基于对时滞问题的研究和分析,涌现出了许多有效的控制方法和分析方法,例如 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和 Lyapunov-Razumikhin 方法成为时滞系统稳定性分析和控制器设计的两个有力工具^[15-16],具体可以参阅综述文献[9-14]。当前,许多科研成果都集中在时滞系统上。[17-19]考虑了低阶前馈非线性系统,其中 Meng 等人^[17]研究了一类具有状态时变时滞的上三角非线性系统的全局输出反馈稳定,Ye^[18]提出了一种自适应稳定器,研究了一类具有时滞的前馈非线性系统的自适应稳定问题,Zhou 等人^[19]基于所考虑的非线性系统的一种特殊规范形式,提出了两种新的非线性控制律,考虑了一类前馈非线性时滞系统通过有界控制实现全局稳定。文献[20-22]考虑了高阶前馈非线性系统,其中 Zhao 等人^[20]通过设计状态反馈控制器,研究了一类具有时变时滞的随机高阶前馈非线性系统的全局稳定问题,Jiang 等人^[21]考虑了一类具有低阶和高阶非线性特性的高阶非线性时滞系统的输出反馈稳定,Zhang 等人^[22]通过开发一种新型的基于动态增益的反步法,并借助合适的 L-K 泛函,构造了一个与时滞无关的状态反馈控制器,使得具有时滞的高阶非线性系统通过状态反馈实现了全局稳定。同时在实际应用中,输入延迟通常难以避免,其往往源于传感器响应、信息处理速度及数据传输等环节,进而产生不稳定性^[23]。Zhang 等人^[24]研究了一类非线性函数中包含时滞的高阶前馈非线性时滞系统,通过动态低增益状态反馈控制方法实现了全局强稳定。文献[25-27]考虑了具有线性增长条件的前馈非线性系统的稳定性。Zha 等人^[28]为一类具有时变输入延迟的高阶前馈非线性系统构建了观测器和控制器,使系统全局渐近稳定。Qin 等人^[29]考虑了具有输入时滞的随机高阶前馈非线性系统的状态反馈稳定。Zhao 等人^[30]研究了一类具有状态和输入延迟的非线性系统通过无记忆输出反馈实现全局渐近稳定的问题。Zhao 等人^[31]研究了一类积分器、非线性函数和输入中均包含时滞的强非线性的时滞上三角系统为全局渐近稳定,为时滞非线性积分器及其他系统开发了齐次输出反馈设计。

值得注意的是,上面提到的最多的关于前馈时滞系统的结论都利用了齐次控制法,对于处理前馈非线性系统的特殊结构是有用的(详见注 1)。然而,这种方法并不适用于积分器、非线性函数以及输入中均包含时滞的严格前馈非线性系统。本文的主要目的是寻找一种新颖且有效的方法,解决严格前馈非线性时滞系统的全局渐近稳定问题。研究该类系统,有助于更好地理解 and 解决实际应用中的稳定性和控制问题。与文献[28-30]已有的结果相比,本研究综合考虑了积分器、非线性函数以及输入时滞多个复杂因素,构建了更为复杂且准确的严格前馈非线性系统模型,设计了一种新型参数相关的状态反馈控制器,也为后续处理相关问题提供了一种新的解决思路,创新了理论方法。

主要贡献和挑战如下:(1) 将稳定性判据应用于时滞系统,提出了一种参数相关状态反馈控制器,以保证积分器、非线性函数和输入中均有时滞的严格前馈非线性系统的全局渐近稳定。(2) 参数相关状态反馈控制器非常简单和灵活,因为该控制器只依赖于一个参数,且大大减少了设计过程和计算工作量。(3) 由于积分器和输入中都存在时滞,现有文献中的 L-K 泛函不再适用,如何寻找合适的 L-K 泛函是一个难点,而如何处理积分器中的时滞项则是另一个难点。

1 预备知识

下面给出本文中将要用到的一些符号和引理。 $|\cdot|$ 是向量的欧几里得范数, $\|\cdot\|$ 表示矩阵的 Frobenius

范数。一个函数 $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 如果是连续的用 C 表示,如果是连续可微的用 C^1 表示。 $\mathcal{K}$ 表示所有函数的集合: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ 是连续的,严格递增的并在零点消失。 $\mathcal{K}_\infty$ 表示所有 $\mathcal{K}$ 类无界函数的集合。

引理1 ^[32] 考虑系统

$$\dot{x} = g(t, x(t + \theta)), \quad (1)$$

式中 $\theta \in [-d, 0]$, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 和 $g: \mathbf{R} \times C \rightarrow \mathbf{R}^n$ 且 $g(t, 0) \equiv 0$ 。假设(1)中给出的 $g: \mathbf{R} \times C \rightarrow \mathbf{R}^n$, 将每个 $\mathbf{R} \times (\text{bounded set in } C)$ 映射到 $\mathbf{R}^n$ 中的有界集合,并且 $u, v, w: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ 是连续非递减函数,此外 $u(s), v(s)$ 对于 $s > 0$ 是正的,且 $u(0) = v(0) = 0$ 。如果存在一个连续可微泛函 $V: \mathbf{R} \times C \rightarrow \mathbf{R}$ 使得 $u(\|x(0)\|) \leq V(t, x) \leq v(\sup_{-d \leq \theta \leq 0} \|x(t + \theta)\|)$, 且 $\dot{V}(t, x) \leq -w(\|x(0)\|)$, 则(1)的平凡解是一致稳定的。如果对于 $s > 0, w(s) > 0$, 则它是一致渐近稳定的。此外,如果 $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$, 则它是全局一致渐近稳定的。

引理2 ^[33] 对任意给定的向量 y, z 和常数 $m > 0$, 存在实数 $\alpha > 1, \beta > 1$ 满足 $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 1$ 使得

$$y^T z \leq \frac{m^\alpha}{\alpha} \|y\|^\alpha + \frac{1}{\beta m^\beta} \|z\|^\beta。$$

引理3 ^[34] 对任意函数 $g(t) \in C([- \tau, \infty); \mathbf{R}^+)$ 和正整数 $p, \tau \in \mathbf{R}^+$, 则

$$\left(\int_{t-\tau}^t g(\sigma) d\sigma \right)^p \leq \tau^{p-1} \int_{t-\tau}^t g^p(\sigma) d\sigma。$$

2 主要结果

本文考虑如下积分器、非线性函数及输入中均包含时不变时滞项的严格前馈非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{x}_2(t - \tau_2) + g_1(x_2(t), \dots, x_n(t), x_2(t - \tau_2), \dots, x_n(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{x}_3(t - \tau_3) + g_2(x_3(t), \dots, x_n(t), x_3(t - \tau_3), \dots, x_n(t)), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= u(t - \tau_0), \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbf{R}^n$ 和 $u(t) \in \mathbf{R}$ 分别是系统状态和控制输入。对 $i = 1, 2, \dots, n$, $\tau_i > 0$ 是时不变时滞, $\bar{\tau} = \max\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$, $x_i(t - \tau_i)$ 和 $u(t - \tau_0)$ 为系统的时滞状态和时滞控制输入。非线性函数 $g_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ 是连续的。

本文旨在构造系统(2)的一种参数相关状态反馈控制器,使得闭环系统在原点是全局渐近稳定的。为了实现这一目的,需要以下假设。

假设1 存在一个正数 b , 使得 $|g_i(\cdot)| \leq b \sum_{j=i+1}^n (\|x_j(t)\| + \|x_j(t - \tau_j)\|), i = 1, 2, \dots, n - 1$ 。

注1 正如前馈非线性系统^[17,25-27]中讨论的,假设1中的线性增长条件是处理前馈系统中非线性 $g_i(\cdot)$ 的一般条件。从假设1中不难发现,本文中的非线性项 $g_i(\cdot)$ 包含系统状态 $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ 而不是文献^[17,25-27]中的 $x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x_n$ 。因此,系统(2)可以看作一类严格前馈非线性系统。

显然,系统(2)可以重写为

$$\dot{x} = \mathcal{A}x(t - \tau) + \mathcal{B}u(t - \tau_0) + \mathcal{G}, \quad (3)$$

式中

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & \mathbf{I}_{(n-1) \times (n-1)} \\ 0 & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{G} = [g_1(\cdot), \dots, g_{(n-1)}(\cdot), 0]^T。$$

本文的主要结果用以下定理来表述。

定理1 如果假设1对系统(2)成立,并且存在一个正参数 λ 使得 $\bar{\Phi}(\lambda) - \tilde{\Phi}(\lambda) - 2\bar{\tau} \hat{\Phi}(\lambda) > 0$, 则通过采用下面的参数相关状态反馈控制器,闭环系统在原点是全局渐近稳定的,

$$u = \left[\frac{\Theta_1}{\lambda^n}, \frac{\Theta_2}{\lambda^{n-1}}, \dots, \frac{\Theta_n}{\lambda} \right] x = \Theta(\lambda)x, \quad (4)$$

式中 $\bar{\Phi}(\lambda), \tilde{\Phi}(\lambda)$ 和 $\hat{\Phi}(\lambda)$ 在(15)中定义, $\bar{\tau}$ 在系统(2)中定义, $[\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n] = \bar{\Theta}$ 满足 $\mathcal{A}_{\bar{\Theta}} = \mathcal{A} + \mathcal{B}\bar{\Theta}$ 是

赫尔维茨矩阵。

证 定理 1 的证明过程可以分成两部分。第一部分:引入坐标变换:

$$\xi = \Gamma(\lambda)x, \quad (5)$$

式中 $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ 和 $\Gamma(\lambda) = \text{diag}[1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}]$ 。

同时,根据(3)~(5)和 $\lambda\Gamma(\lambda)(\mathcal{A} + \mathcal{B}\Theta(\lambda)) = \mathcal{A}_\Theta\Gamma(\lambda)$, 将闭环系统转化为

$$\dot{\xi} = \lambda^{-1}\mathcal{A}_\Theta\xi + \Gamma(\lambda)\mathcal{A}(x(t-\tau) - x(t)) + \Gamma(\lambda)\mathcal{B}(u(t-\tau_0)) + \Gamma(\lambda)\mathcal{G}(\cdot). \quad (6)$$

选择合适的 Lyapunov 函数

$$V(\xi) = \frac{\delta_1}{2}\xi^T P \xi, \quad (7)$$

式中 δ_1 为正常数, P 为对称正定矩阵, 满足 $P\mathcal{A}_\Theta + \mathcal{A}_\Theta^T P = -I$ 。应用(6)和(7), 有

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\delta_1\lambda^{-1}|\xi|^2 + 2\delta_1(\xi^T P)(\Gamma(\lambda)\mathcal{G}) + 2\delta_1(\xi^T P)\Gamma(\lambda)\mathcal{A}(x(t-\tau) - x(t)) \\ & + 2\delta_1(\xi^T P)\Gamma(\lambda)\mathcal{B}(u(t-\tau_0) - u(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

下面将考虑右边的最后三项。根据假设 1 和(5),

$$\begin{aligned} |\Gamma(\lambda)\mathcal{G}| & \leq b \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{i-1} \left(\sum_{l=i+1}^n |x_l| + \sum_{l=i+1}^n |x_l(t-\tau_l)| \right) = b \sum_{i=2}^n \sum_{k=0}^{i-2} \lambda^k (|x_i| + |x_i(t-\tau_i)|) \\ & = b \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\lambda^k} (|\xi_i| + |\xi_i(t-\tau_i)|) \leq b \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda^i} \sum_{j=2}^n (|\xi_i| + |\xi_i(t-\tau_i)|) \\ & \leq b\sqrt{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda^i} |\xi| + b \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda^i} \sum_{j=2}^n |\xi_j(t-\tau_j)|. \end{aligned} \quad (9)$$

然后,借助引理 2 和(9)可以得到

$$\begin{aligned} 2\delta_1(\xi^T P)(\Gamma(\lambda)\mathcal{G}) & \leq \sqrt{n-1}\Phi_1(\lambda)|\xi|^2 + \Phi_1(\lambda)|\xi| \sum_{j=2}^n |\xi_j(t-\tau_j)| \\ & \leq \left(\frac{b_1^2(n-1)}{2} + \sqrt{n-1} \right) \Phi_1(\lambda)|\xi|^2 + \Phi_1(\lambda) \frac{1}{2b_1^2} \sum_{j=2}^n |\xi_j(t-\tau_j)|^2, \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\Phi_1(\lambda) = 2b\delta_1 ||P|| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda^i}$, b_1 是一个正实数。

利用引理 2 和(5), 可得

$$\begin{aligned} 2\delta_1(\xi^T P)\Gamma(\lambda)\mathcal{A}(x(t-\tau) - x(t)) & \leq 2\delta_1 ||\Gamma(\lambda)|| |\xi| \sum_{j=1}^n |\xi_j(t-\tau_j) - \xi_j(t)| \\ & \leq \delta_1 ||P|| \left(b_2^2 |\xi|^2 + \frac{1}{b_2^2} \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j(t-\tau_j) - \xi_j(t)| \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

式中 b_2 是一个正实数。当 $j=1, 2, \dots, n-1$ 时,

$$\begin{aligned} |\xi_j(t-\tau_j) - \xi_j(t)| & \leq \left| \int_{t-\tau_j}^t \dot{\xi}_j(\sigma) d\sigma \right| \leq \int_{t-\tau_j}^t |\lambda^{-1}\xi_{j+1}(\sigma - \tau_{j+1}) + \lambda^{j-1}g_j| d\sigma \\ & \leq \int_{t-\tau_j}^t \lambda^{-1} |\xi_{j+1}(\sigma - \tau_{j+1})| d\sigma + \int_{t-\tau_j}^t b \sum_{l=j+1}^n \lambda^{j-l} (|\xi_l(\sigma)| + |\xi_l(\sigma - \tau_l)|) d\sigma \\ & \leq \Phi_{2,j} \int_{t-\tau_j}^t \sum_{j=2}^n (|\xi_j(\sigma)| + |\xi_j(\sigma - \tau_j)|) d\sigma, \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\Phi_{2,j}(\lambda) = (b+1) \left(\frac{1}{\lambda} + \sum_{l=j+1}^n \frac{1}{\lambda^{l-j}} \right)$ 。

当 $i=n$ 时,

$$|\xi_n(t-\tau_n) - \xi_n(t)| \leq \left| \int_{t-\tau_n}^t \dot{\xi}_n(\sigma) d\sigma \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{t-\tau_n}^t \sum_{j=1}^n |\Theta_j \xi_j(\sigma - \tau_0)| d\sigma$$

$$\leq \Phi_3(\lambda) \int_{t-2\tau}^t \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j(\sigma - \tau_0)| \right) d\sigma, \quad (13)$$

式中 $\Phi_3(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n |\Theta_j|$ 。

借助引理3以及(11)~(13),可得

$$2\delta_1(\xi^T P) \Gamma(\lambda) \mathcal{A}(x(t-\tau) - x(t)) \leq \delta_1 \|P\| \left(b_2^2 \|\xi\|^2 + \frac{2\tau((\sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{2,j}(\lambda))^2 + \Phi_3(\lambda)^2)}{b_2^2} \int_{t-2\tau}^t \sum_{i=1}^n |\xi_i(\sigma)|^2 d\sigma \right). \quad (14)$$

然后,由引理2,假设1和(4),可得

$$2\delta_1(\xi^T P) \Gamma(\lambda) \mathcal{B}(u(t-\tau_0) - u(t)) \leq 2\delta_1 \|P\| \frac{\|\Gamma(\lambda)\|}{\lambda^n} \sum_{i=1}^n |\Theta_i| \|\xi\| \sum_{i=1}^n |\xi_j(t-\tau_0) - \xi_j(t)| \leq \Phi_4(\lambda) \left(b_3^2 \|\xi\|^2 + \frac{1}{b_3^2} \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j(t-\tau_0) - \xi_j(t)| \right)^2 \right), \quad (15)$$

式中 $\Phi_4(\lambda) = \frac{\|\Gamma(\lambda)\|}{\lambda^n} \delta_1 \|P\| \sum_{i=1}^n |\Theta_i|$, b_3 是一个正实数。当 $j=1, 2, \dots, n-1$ 时,

$$\begin{aligned} |\xi_j(t-\tau_0) - \xi_j(t)| &\leq \left| \int_{t-\tau_0}^t \dot{\xi}_j(\sigma) d\sigma \right| \leq \int_{t-\tau_0}^t |\lambda^{-1} \xi_{j+1}(t-\tau_{j+1}) + \lambda^{j-1} g_j| d\sigma \\ &\leq \int_{t-\tau_0}^t \lambda^{-1} |\xi_{j+1}(t-\tau_{j+1})| d\sigma + \int_{t-\tau_0}^t b \sum_{l=j+1}^n \lambda^{j-l} (|\xi_l(\sigma)| + |\xi_l(\sigma - \tau_l)|) d\sigma \\ &\leq \Phi_{2,j}(\lambda) \int_{t-\tau_0}^t \sum_{j=2}^n (|\xi_j(\sigma)| + |\xi_j(\sigma - \tau_j)|) d\sigma, \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $\Phi_{2,j}(\lambda) = (b+1) \left(\frac{1}{\lambda} + \sum_{l=j+1}^n \frac{1}{\lambda^{l-j}} \right)$ 。

当 $i=n$ 时,

$$\begin{aligned} |\xi_n(t-\tau_0) - \xi_n(t)| &\leq \left| \int_{t-\tau_0}^t \dot{\xi}_n(\sigma) d\sigma \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{t-\tau_0}^t \sum_{j=1}^n |\Theta_j \xi_j(\sigma - \tau_0)| d\sigma \\ &\leq \Phi_3(\lambda) \int_{t-2\tau}^t \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j(\sigma)| \right) d\sigma, \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $\Phi_3(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n |\Theta_j|$ 。

由引理3以及(15)~(17)可得

$$2\delta_1(\xi^T P) \Gamma(\lambda) \mathcal{B}(u(t-\tau_0) - u(t)) \leq \Phi_4(\lambda) \left(b_3^2 \|\xi\|^2 + \frac{2\tau((\sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{2,j}(\lambda))^2 + \Phi_3(\lambda)^2)}{b_3^2} \int_{t-2\tau}^t \sum_{i=2}^n |\xi_i(\sigma)|^2 d\sigma \right). \quad (18)$$

结合(10),(14)和(18)有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq - \left\{ \delta_1 \lambda^{-1} - \left(\frac{b_1^2(n-1)}{2} + \sqrt{n-1} \right) \Phi_1(\lambda) - \delta_1 b_2^2 \|P\| - b_3^2 \Phi_4(\lambda) \right\} \|\xi\|^2 + \frac{1}{2b_1^2} \Phi_1(\lambda) \sum_{j=1}^n |\xi_j(t-\tau_j)|^2 \\ &\quad + \left(\frac{\delta_1 \|P\|}{b_2^2} + \frac{\Phi_4(\lambda)}{b_3^2} \right) (2\tau((\sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{2,j}(\lambda))^2 + \Phi_3(\lambda)^2)) \int_{t-2\tau}^t \sum_{j=1}^n |\xi_j(\sigma)|^2 d\sigma \\ &= -\bar{\Phi}(\lambda) \|\xi\|^2 + \check{\Phi}(\lambda) \sum_{j=1}^n |\xi_j(t-\tau_j)|^2 + \hat{\Phi}(\lambda) \int_{t-2\tau}^t \sum_{j=1}^n |\xi_j(\sigma)|^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (19)$$

构造下面的 L-K 泛函

$$\bar{V} = V + \check{\Phi}(\lambda) \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_j}^t |\xi_j(\sigma)|^2 d\sigma + \hat{\Phi}(\lambda) \int_{t-2\tau}^t \int_{\mu}^t \sum_{j=1}^n |\xi_j(\sigma)|^2 d\sigma d\mu, \quad (20)$$

然后

$$\dot{V} \leq -(\bar{\Phi}(\lambda) - \tilde{\Phi}(\lambda) - 2\bar{\tau} \bar{\Phi}(\lambda)) |\xi|^2 = -\varphi(\lambda) |\xi|^2. \quad (21)$$

选取 $\gamma(s) = \varphi(\lambda)s^2$, 应用 $\bar{\Phi}(\lambda) - \tilde{\Phi}(\lambda) - 2\bar{\tau} \bar{\Phi}(\lambda) > 0$, 则 $\gamma(s)$ 是 $\mathcal{K}$ 函数, 将(17)变为

$$\dot{V} \leq -\gamma(|\xi|). \quad (22)$$

第二部分: 接下来, 本文将验证 $\bar{V}$ 满足引理 1 的第一个条件。在 $|\xi| \leq \sup_{-2\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|$ 和(7)的基础上, 有

$$\pi_1(|\xi|) \leq V \leq \pi_{21}(\sup_{-2\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|), \quad (23)$$

式中 $\pi_1(s) = \frac{\delta_2}{2} \lambda_{\min}^2(\mathbf{P})s^2$, $\pi_{21}(s) = \frac{\delta_1}{2} \lambda_{\max}^2(\mathbf{P})s^2$ 都是 $\mathcal{K}_\infty$ 函数。

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\lambda) \sum_{i=2}^n \int_{t-\tau_j}^t |\xi_j(\sigma)|^2 d\sigma &\leq \tilde{\Phi}(\lambda) \sum_{i=2}^n \int_{-\bar{\tau}}^0 |\xi_j(\theta+t)|^2 d\theta \leq \tilde{\Phi}(\lambda) \bar{\tau} \sup_{-2\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|^2 \\ &\leq \tilde{\Phi}(\lambda) \bar{\tau} (\sup_{-2\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|)^2 = \pi_{22}(\sup_{-2\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|), \end{aligned} \quad (24)$$

式中 $\pi_{22}(s) = \tilde{\Phi}(\lambda) \bar{\tau} s^2$ 是 $\mathcal{K}_\infty$ 函数。

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\lambda) \int_{t-2\bar{\tau}}^t \int_{\mu}^t \sum_{j=2}^n |\xi_j(\sigma)|^2 d\sigma d\mu &\leq 2\hat{\Phi}(\lambda) \bar{\tau} \int_{t-2\bar{\tau}}^t \sum_{j=2}^n |\xi_j(\sigma)|^2 d\sigma \\ &\leq 2\hat{\Phi}(\lambda) \bar{\tau} \int_{-2\bar{\tau}}^0 \sum_{j=2}^n |\xi_j(s+\theta)|^2 d(s+\theta) \leq 2\hat{\Phi}(\lambda) \bar{\tau} (\sup_{-2\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|)^2 \\ &= \pi_{23}(\sup_{-2\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|), \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $\pi_{23}(s) = 2\hat{\Phi}(\lambda) \bar{\tau} s^2$ 是 $\mathcal{K}_\infty$ 函数, 规定 $\pi_2 = \pi_{21} + \pi_{22} + \pi_{23}$, 则有

$$\pi_1(|\xi|) \leq \bar{V} \leq \pi_2(\sup_{-2\bar{\tau} \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|). \quad (26)$$

根据(22), (26)和引理 1, 可得出闭环系统在原点是全局渐近稳定的。

注 2 在已有的文献中, 反推法是一种设计状态反馈控制器的常用方法。然而, 这种方法需要逐步计算。对于一个 n 阶系统, 每一步都必须都计算非线性项。从上面的计算过程可以看出, 控制器 u 的形式已经给出, 只需要计算(8)的最后三项。然后根据(21)选择合适的参数 λ 。

3 推广结果

第 2 节的设计方案也可以推广到以下形式的一类积分器、非线性函数及输入中均包含多个时变时滞项的严格前馈非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t - \tau_2(t)) + \tilde{g}_1(x_2(t), \dots, x_n(t), x_2(t - \tau_2(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t - \tau_3(t)) + \tilde{g}_2(x_3(t), \dots, x_n(t), x_3(t - \tau_3(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= u(t - \tau_0(t)), \end{aligned} \quad (27)$$

式中 $\tau_j(t): \mathbf{R}^+ \rightarrow [0, \tau^*]$ 是时变时滞, $\tau^* > 0, j=1, \dots, n$ 。非线性函数 $\tilde{g}_i, i=1, \dots, n-1$, 是连续的。

为得到系统(27)的稳定性定理, 本文需要以下假设。

假设 2 存在一个已知的正常数 $\bar{b}$ 使得 $|\tilde{g}_i| \leq \bar{b} \sum_{j=i+1}^n (|x_j(t)| + |x_j(t - \tau_j(t))|), j=1, \dots, n-1$ 。

假设 3 对于 $j=1, \dots, n$, 存在一个已知常数 β 使得 $\dot{\tau}_j(t) \leq \beta \leq 1$ 。

与(3)相似, 系统(27)可以重新写为

$$\dot{x} = \mathcal{A}x(t - \tau(t)) + \mathcal{B}u(t - \tau_0(t)) + \tilde{\mathcal{G}}, \quad (28)$$

式中 $\mathcal{G} = [\tilde{g}_1(\cdot), \dots, \tilde{g}_{(n-1)}(\cdot), 0]^\top$, 将推广的结果总结为以下定理。

定理2 如果假设2和假设3对系统(27)成立, 并且存在一个正参数 λ 使得 $\bar{\Psi}(\lambda) - \frac{\tilde{\Psi}(\lambda)}{1-\beta} - 2\tau * \Psi(\lambda) > 0$, 则通过采用参数相关状态反馈控制器(4), 得到闭环系统在原点是全局渐近稳定的, 其中 $\bar{\Psi}(\lambda)$, $\tilde{\Psi}(\lambda)$ 和 $\Psi(\lambda)$ 在(34)中被定义。

证 与证明定理1一样分两部分来证明定理2。第一部分: 使用(5)~(6)和(28), 将闭环系统转化为

$$\dot{\xi} = \lambda^{-1} \mathcal{A}_0 \xi + \Gamma(\lambda) \mathcal{A}(x(t - \tau(t)) - x(t)) + \Gamma(\lambda) \mathcal{B}(u(t - \tau_0(t)) - u(t)) + \Gamma(\lambda) \tilde{\mathcal{G}}(\cdot). \quad (29)$$

选择合适的 Lyapunov 函数

$$V_1(\xi) = \frac{\delta_2}{2} \xi^\top Q \xi, \quad (30)$$

式中 δ_2 是一个正常数, Q 是一个对称正定矩阵满足 $Q \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0^\top Q = -I$ 。应用(29)和(30), 有

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\delta_2 \lambda^{-1} \|\xi\|^2 + 2\delta_2 (\xi^\top Q) (\Gamma(\lambda) \tilde{\mathcal{A}}) + 2\delta_2 (\xi^\top Q) \Gamma(\lambda) \mathcal{A}(x(t - \tau(t)) - x(t)) \\ & + 2\delta_2 (\xi^\top Q) \Gamma(\lambda) \mathcal{B}(u(t - \tau_0(t)) - u(t)). \end{aligned} \quad (31)$$

与不等式(10)相似, 根据假设2有

$$\begin{aligned} 2\delta_2 (\xi^\top Q) (\Gamma(\lambda) Q) & \leq \sqrt{n-1} \Psi_1(\lambda) \|\xi\|^2 + \Psi_1(\lambda) \|\xi\| \sum_{j=2}^n \|\xi_j(t - \tau_j(t))\| \\ & \leq \left(\frac{b_4^2(n-1)}{2} + \sqrt{n-1} \right) \Psi_1(\lambda) \|\xi\|^2 + \frac{1}{2b_4^2} \Psi_1(\lambda) \sum_{j=2}^n \|\xi_j(t - \tau_j(t))\|^2, \end{aligned} \quad (32)$$

式中 $\Psi_1(\lambda) = 2\delta_2 \|Q\| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k}$, b_4 是一个正实数。

类似于(14)的证明, 利用假设2, 假设3和(5), 可以得到

$$\begin{aligned} 2\delta_2 (\xi^\top Q) \Gamma(\lambda) \mathcal{A}(x(t - \tau(t)) - x(t)) \\ \leq \delta_2 \|Q\| \left(b_5^2 \|\xi\|^2 + \frac{2\tau * ((\sum_{j=1}^n \Psi_{2,j}(\lambda))^2 + \Psi_3(\lambda)^2)}{b_5^2} \int_{t-2\tau}^t \sum_{i=1}^n \|\xi_j(\sigma)\|^2 d\sigma \right), \end{aligned} \quad (33)$$

式中 $\Psi_{2,j}(\lambda) = (\bar{b} + 1) \left(\frac{1}{\lambda} + \sum_{l=j+1}^n \frac{1}{\lambda^{l-j}} \right)$, $\Psi_3(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n |\Theta_j|$, b_5 是一个正实数。

类似于(18)的证明, 利用假设2, 假设3和(5)可得

$$\begin{aligned} 2\delta_2 (\xi^\top Q) \Gamma(\lambda) \mathcal{B}(u(t - \tau_0(t)) - u(t)) \\ \leq \Psi_4(\lambda) \left(b_6^2 \|\xi\|^2 + \frac{2\tau * ((\sum_{j=1}^{n-1} \Psi_{2,j}(\lambda))^2 + \Psi_3(\lambda)^2)}{b_6^2} \int_{t-2\tau}^t \sum_{i=1}^n \|\xi_j(\sigma)\|^2 d\sigma \right), \end{aligned} \quad (34)$$

式中 $\Psi_4(\lambda) = \frac{\|\Gamma(\lambda)\|}{\lambda^n} \delta_2 \|P\| \sum_{i=1}^n |\Theta_i|$, b_6 是一个正实数。

结合(32)~(34), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\left\{ \delta_2 \lambda^{-1} - \left(\frac{b_4^2(n-1)}{2} + \sqrt{n-1} \right) \Psi_1(\lambda) - b_5^2 \delta_2 \|Q\| - b_6^2 \Psi_4(\lambda) \right\} \|\xi\|^2 \\ & + \frac{1}{2b_4^2} \Psi_1(\lambda) \sum_{j=1}^n \|\xi_j(t - \tau_j(t))\|^2 + \left(\frac{\delta_2 \|Q\|}{b_5^2} + \frac{\Psi_4(\lambda)}{b_6^2} \right) 2\tau * ((\sum_{j=1}^n \Psi_{2,j}(\lambda))^2 \\ & + \Psi_3(\lambda)^2) \int_{t-2\tau}^t \sum_{i=1}^n \|\xi_j(\sigma)\|^2 d\sigma \\ & = -\bar{\Psi}(\lambda) \|\xi\|^2 + \tilde{\Psi}(\lambda) \sum_{j=2}^n \|\xi_j(t - \tau_j(t))\|^2 + \Psi(\lambda) \int_{t-2\tau}^t \sum_{i=1}^n \|\xi_j(\sigma)\|^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (35)$$

构造下面的 L-K 泛函

$$\bar{V}_1 = V_1 + \frac{\tilde{\Psi}(\lambda)}{1-\beta} \sum_{j=1}^n \int_{t-\tau_j(t)}^t |\xi_j(\sigma)|^2 d\sigma + \hat{\Psi}(\lambda) \int_{t-2\tau}^t \int_{\mu}^t \sum_{j=2}^n |\xi_j(\sigma)|^2 d\sigma d\mu, \quad (36)$$

有

$$\dot{\bar{V}}_1 \leq -\left(\bar{\Psi}(\lambda) - \frac{\tilde{\Psi}(\lambda)}{1-\beta} - 2\tau * \hat{\Psi}(\lambda)\right) |\xi|^2 = -\psi(\lambda) |\xi|^2. \quad (37)$$

取 $\tilde{\gamma}(s) = \psi(\lambda)s^2$, 应用 $\bar{\Psi}(\lambda) - \frac{\tilde{\Psi}(\lambda)}{1-\beta} - 2\tau * \hat{\Psi}(\lambda) > 0$, 则 $\tilde{\gamma}(s)$ 是 $\mathcal{K}$ 函数且(37)变为

$$\dot{\bar{V}}_1 \leq -\tilde{\gamma}(|\xi|). \quad (38)$$

第二部分:接下来,验证 $\bar{V}_1$ 满足引理 1 的第一个条件。在 $|\xi| \leq \sup_{-2\tau * \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|$ 和(30)基础上,有

$$\pi_3(|\xi|) \leq V_1 \leq \pi_{41}(\sup_{-2\tau * \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|), \quad (39)$$

式中 $\pi_3(s) = \frac{\delta_{\min}^2}{2} \lambda_{\min}^2(Q)s^2$, $\pi_{41}(s) = \frac{\delta_{\max}^2}{2} \lambda_{\max}^2(Q)s^2$ 都是 $\mathcal{K}_{\infty}$ 函数。

$$\frac{\tilde{\Psi}(\lambda)}{1-\beta} \sum_{j=1}^n \int_{t-\tau_j(t)}^t |\xi_j(\sigma)|^2 d\sigma \leq \pi_{42}(\sup_{-2\tau * \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|), \quad (40)$$

式中 $\pi_{42}(s) = \frac{\tilde{\Psi}(\lambda)}{1-\beta} s^2$ 是 $\mathcal{K}_{\infty}$ 函数。

$$\hat{\Psi}(\lambda) \int_{t-2\tau}^t \int_{\mu}^t \sum_{j=1}^n |\xi(\sigma)|^2 d\sigma d\mu \leq \pi_{43}(\sup_{-2\tau * \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|), \quad (41)$$

式中 $\pi_{43}(s) = 2\hat{\Psi}(\lambda)\tau * s^2$ 是 $\mathcal{K}_{\infty}$ 函数。规定 $\pi_4 = \pi_{41} + \pi_{42} + \pi_{43}$, 则有

$$\pi_3(|\xi|) \leq \bar{V}_1 \leq \pi_4(\sup_{-2\tau * \leq \theta \leq 0} |\xi(\theta+t)|). \quad (42)$$

根据(39)、(42)和引理 1 可以得出闭环系统在原点是全局渐近稳定的。

注 3 与仅包含积分器或非线性函数的系统,或者仅考虑输入时滞的系统相比,本文提升了系统模型的复杂性和准确性,更贴近实际工程应用。与前馈时滞系统相比,本文研究了一类严格前馈知识系统,放宽了非线性函数的条件。严格前馈非线性系统的研究成果不仅具有理论意义,还具有广泛的实践应用价值。例如,在通讯系统、电力系统、网络传输系统等实际工程中,系统的当前状态都不可避免地受到过去状态的影响,即存在时滞现象。同时,这些系统也往往包含非线性特性和积分器环节。因此,严格前馈非线性系统的研究成果可以为这些系统的稳定控制和优化性能提供有力支持。

4 仿真例子

为了验证本文所提出的控制器的有效性,考虑以下数值例子。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t-1) + \frac{1}{5}x_2(t) + \frac{1}{12}\sin(x_3(t-2)), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t-2) + \frac{1}{20}\ln(1+x_3^2(t)), \\ \dot{x}_3(t) &= u(t-1). \end{aligned} \quad (43)$$

借助 $|\sin x| \leq |x|$, $\ln(1+x^2) \leq |x|$, 当 $b = \frac{1}{5}$ 时,假设 1 成立。

$$\text{由系统(43)可知, } \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 选取 } \Theta_1 = -\frac{3}{10}, \Theta_2 = -\frac{13}{10}, \Theta_3 = -\frac{5}{4} \text{ 则有 } \mathcal{A}_{\bar{\Theta}} = \mathcal{A} + \mathcal{B}\bar{\Theta}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{10} & -\frac{13}{10} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}, \text{ 然后根据 } P\mathcal{A}_{\bar{\Theta}} + \mathcal{A}_{\bar{\Theta}}^T P = -I, \text{ 可以得到 } P = \begin{bmatrix} 2.9318 & 2.8154 & 1.6667 \\ 2.8154 & 4.6936 & 2.5503 \\ 1.6667 & 2.5503 & 2.4403 \end{bmatrix}. \text{ 构}$$

造参数相关控制器

$$u = -\frac{3}{10\lambda^3}x_1 - \frac{13}{10\lambda^2}x_2 - \frac{5}{4\lambda}x_3. \quad (44)$$

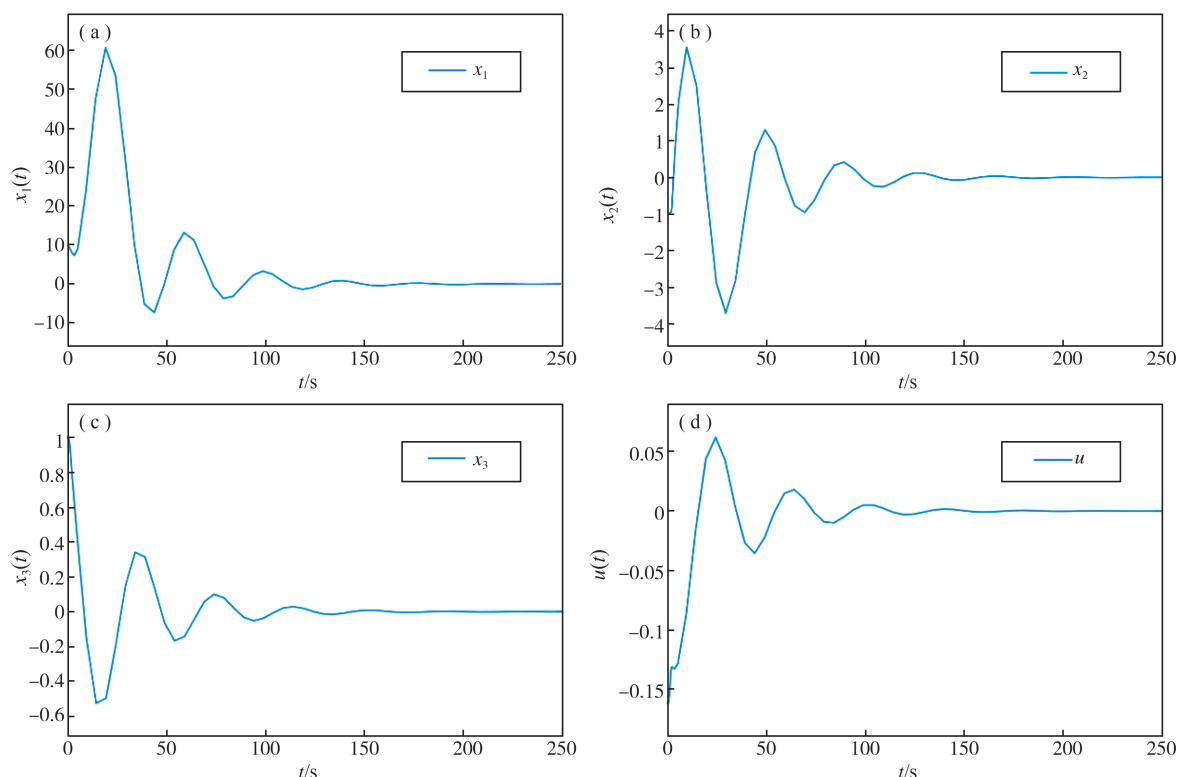
定义 $\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]^T = [x_1 \ \lambda x_2 \ \lambda^2 x_3]^T$, 考虑 L-K 泛函

$$\bar{V} = \frac{1}{2}\xi^T P \xi + 0.2388 \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^3 \int_{t-\tau_i}^t |\xi_i(\sigma)|^2 d\sigma + 0.2587 \left(\frac{5}{\lambda^4} + \frac{6}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^2} \right) \sum_{i=1}^3 \int_{t-4}^t \int_t^\mu |\xi_i(\sigma)|^2 d\sigma d\mu.$$

根据设计过程,可推出 $\dot{\bar{V}} \leq -\frac{1}{\lambda^4}(0.7177\lambda^3 - 2.5905\lambda^2 - 9.4497\lambda - 5.1745)|\xi|^2$.

取 $\lambda = 7$, 得到 $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^4}(0.7177\lambda^3 - 2.5905\lambda^2 - 9.4497\lambda - 5.1745) > 0$. 因此,满足定理1的条件.

定理1给出了系统稳定的充分条件,本文通过设计控制器参数满足这个条件,并选择合理的初始数据 $x_1(0)=10, x_2(0)=-1, x_3(0)=1$ 进行仿真.在仿真中,图1分别给出了系统状态 x_1, x_2, x_3 和控制输入 u 的响应曲线,可以观察到系统状态迅速收敛到稳定状态,并且控制输入在合理范围内波动.这表明本文设计的控制方案是有效的,并且系统具有良好的稳定性和性能.



注:(a) 状态 x_1 的轨迹;(b) 状态 x_2 的轨迹;(c) 状态 x_3 的轨迹;(d) 输入 u 的轨迹。

图1 闭环系统(43)和(44)的响应

Fig.1 The response of the closed-loop systems (43) and (44)

注4 考虑上述例子中积分器不含时滞项的情况:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \frac{1}{10}x_2(t-1) + \frac{1}{3}\ln(1+x_3^2(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + \frac{1}{4}\sin(x_3(t-2)), \\ \dot{x}_3(t) &= u(t-1). \end{aligned} \quad (45)$$

根据第2节的设计过程,给出参数相关控制器

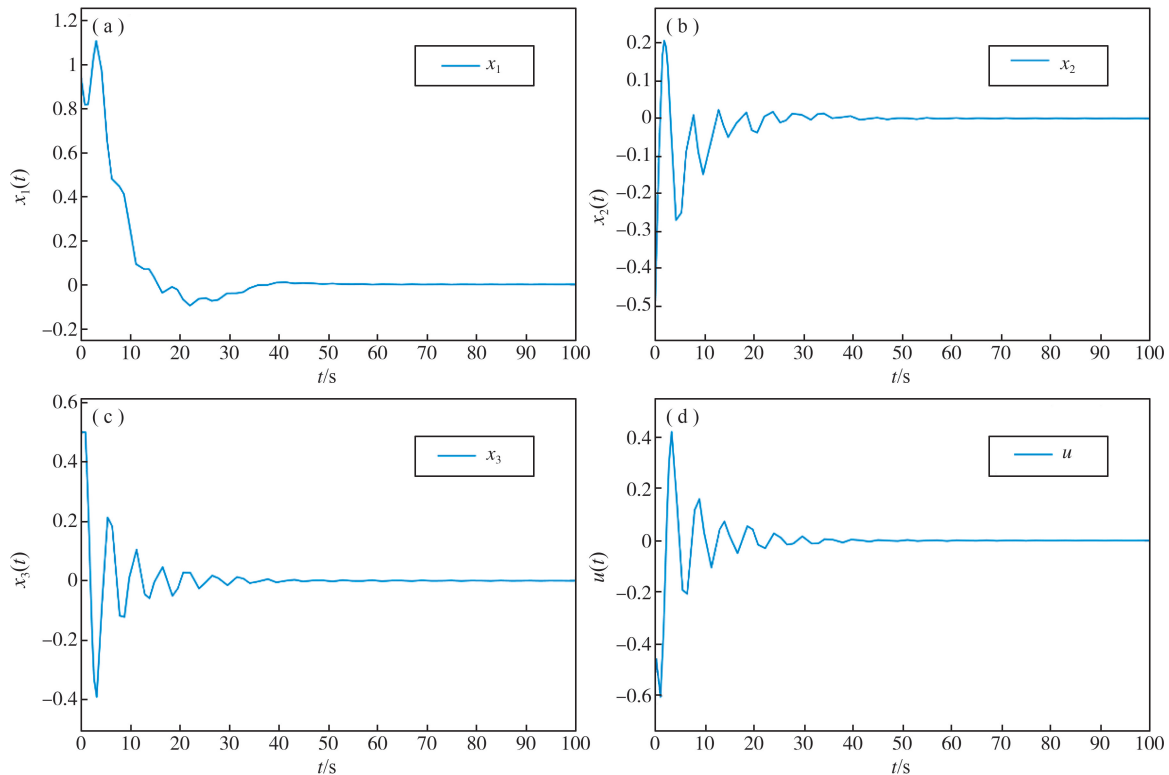
$$u = -\frac{2}{5\lambda^3}x_1 - \frac{8}{5\lambda^2}x_2 - \frac{5}{2\lambda}x_3. \quad (46)$$

考虑 L-K 泛函

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \xi^T Q \xi + 0.3631 \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^3 \int_{t-\tau_i}^t |\xi_i(\sigma)|^2 d\sigma + 0.0428 \left(\frac{1}{\lambda^4} + \frac{3}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^2} \right) \sum_{i=1}^3 \int_{t-4}^t \int_t^\mu |\xi_i(\sigma)|^2 d\sigma d\mu.$$

取 $\lambda = 2.1$ 时, 满足定理 1 的条件。

在仿真中, 取初始数据 $x_1(0) = 1, x_2(0) = -0.5, x_3(0) = 0.5$, 观察图 2 可以看到, 系统状态最终收敛到稳定状态且控制输入在合理范围内波动, 这证实了该方法同样适用于积分器中不包含时滞的严格前馈非线性系统。



注: (a) 状态 x_1 的轨迹; (b) 状态 x_2 的轨迹; (c) 状态 x_3 的轨迹; (d) 输入 u 的轨迹。

图 2 闭环系统(45)和(46)的响应

Fig. 2 The response of the closed-loop systems (45) and (46)

5 结论

通过引入 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 并将稳定性判据应用于时滞系统, 本文提出了一种新型参数相关状态反馈控制器, 来保证积分器、非线性函数及输入中均包含时滞的严格前馈非线性系统全局渐近稳定。一些有意义的问题仍然存在: (1) 是否存在一种通用的方法, 可以适用于各种类型的前馈非线性系统稳定性分析? (2) 对于积分器、非线性函数及输入中都包含时滞的随机非线性系统, 能否设计参数相关状态反馈控制器?

参 考 文 献

- [1] BLANA D, KIRSCH R F, CHADWICK E K. Combined feedforward and feedback control of a redundant, nonlinear, dynamic musculo-skeletal system[J]. Medical & Biological Engineering & Computing, 2009, 47: 533-542.
- [2] WANG D, HUANG J. Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form[J]. Automatica, 2002, 38(8): 1365-1372.
- [3] 梁志鸿, 丁三波, 解相朋. 基于事件驱动间歇控制的离散复杂网络有限时间同步[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2023, 36(1): 1-10.
- [4] MAZENC F, BOWONG S. Tracking trajectories of the cart-pendulum system[J]. Automatica, 2003, 39(4): 677-684.
- [5] YE X. Universal stabilization of feedforward nonlinear systems[J]. Automatica, 2003, 39(1): 141-147.
- [6] MARCONI L, ISIDORI A. Robust global stabilization of a class of uncertain feedforward nonlinear systems[J]. Systems & Control Let-

- ters, 2000, 41(4): 281-290.
- [7] KALIORA G, ASTOLFI A. Nonlinear control of feedforward systems with bounded signals[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(11): 1975-1990.
- [8] LIU L, XIE X J. State feedback stabilization for stochastic feedforward nonlinear systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2013, 49(4): 936-942.
- [9] HU H, WANG Z, SCHAECHTER D B. Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback[J]. Applied Mechanics Reviews, 2003, 56(3): B37-B37.
- [10] 董伟, 蒋蒙蒙, 牛霄. 具有未知输出函数的非线性时滞系统的输出反馈稳定[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2024, 37(5): 29-40.
- [11] 陈国梁. 多定常时滞离散系统的时滞相关稳定性分析[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2014, 27(4): 16-21.
- [12] 郑远广, 王在华. 含时滞的快慢耦合系统的动力学研究进展[J]. 力学进展, 2011, 41(4): 400-410.
- [13] ZHANG X, LIN W, LIN Y. Nonsmooth feedback control of time-delay nonlinear systems: a dynamic gain based approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(1): 438-444.
- [14] LEE J, YOO C, PARK Y S, et al. An experimental study on time delay control of actuation system of tilt rotor unmanned aerial vehicle [J]. Mechatronics, 2012, 22(2): 184-194.
- [15] RICHARD J P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems[J]. Automatica, 2003, 39(10): 1667-1694.
- [16] ZHANG H, DUAN G, XIE L. Linear quadratic regulation for linear time-varying systems with multiple input delays[J]. Automatica, 2006, 42(9): 1465-1476.
- [17] MENG G, MA K. Global output feedback stabilization of upper-triangular nonlinear time-delay systems[J]. Journal of Control Theory and Applications, 2012, 10(4): 533-538.
- [18] YE X. Adaptive stabilization of time-delay feedforward nonlinear systems[J]. Automatica, 2011, 47(5): 950-955.
- [19] ZHOU B, YANG X. Global stabilization of feedforward nonlinear time-delay systems by bounded controls[J]. Automatica, 2018, 88: 21-30.
- [20] ZHAO C R, XIE X J. Global stabilization of stochastic high-order feedforward nonlinear systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2014, 50(1): 203-210.
- [21] JIANG M M, ZHANG K, XIE X J. Output feedback stabilization of high-order nonlinear time-delay systems with low-order and high-order nonlinearities[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2024, 11(5): 1304-1306.
- [22] ZHANG X, LIN Y. Global stabilization of high-order nonlinear time-delay systems by state feedback[J]. Systems & Control Letters, 2014, 65: 89-95.
- [23] MICHELIS W, NICULESCU S I. Stability and Stabilization of Time-Delay Systems; An Eigenvalue-Based Approach[M]. Singapore: SIAM, 1965.
- [24] ZHANG X, LIU Q, BARON L, et al. Feedback stabilization for high order feedforward nonlinear time-delay systems[J]. Automatica, 2011, 47(5): 962-967.
- [25] YE X. Universal stabilization of feedforward nonlinear systems[J]. Automatica, 2003, 39(1): 141-147.
- [26] ZHANG X, GAO H, ZHANG C. Global asymptotic stabilization of feedforward nonlinear systems with a delay in the input[J]. International Journal of Systems Science, 2006, 37(3): 141-148.
- [27] CHOI H L, LIM J T. Stabilization of a chain of integrators with an unknown delay in the input by adaptive output feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(8): 1359-1363.
- [28] ZHA W, ZHAI J, FEI S. Global output feedback control for a class of high-order feedforward nonlinear systems with input delay[J]. ISA Transactions, 2013, 52(4): 494-500.
- [29] QIN X, MIN H. State feedback stabilisation for stochastic high-order feedforward nonlinear systems with input time-delay[J]. International Journal of Systems Science, 2018, 49(5): 1012-1020.
- [30] ZHAO C R, LIN W. Global stabilization by memoryless feedback for nonlinear systems with a limited input delay and large state delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 66(8): 3702-3709.
- [31] ZHAO C R, LIN W. Homogeneous output feedback design for time-delay nonlinear integrators and beyond: an emulation[J]. Automatica, 2022, 146: 110641.
- [32] GU K, CHEN J, KHARITONOV V L. Stability of Time-Delay Systems[M]. Berlin: Birkhauser, 2003.
- [33] LIU L, KONG M. A new design method to global asymptotic stabilization of strict-feedforward stochastic nonlinear time delay systems [J]. Automatica, 2023, 151: 110932.
- [34] ZHANG X, BOUKAS E K, LIU Y, et al. Asymptotic stabilization of high-order feedforward systems with delays in the input[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(12): 1395-1406.

(责任编辑:赵海军)