

引用:刘雪,刘利英. 不确定扰动下传染病传播的动态系统建模与确信可靠性分析[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2026, 39(4):498-507.

Citation:LIU Xue, LIU Liying. Dynamic system modeling and belief reliability analysis of infectious disease transmission under uncertainty[J]. Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition), 2026, 39(4):498-507.

文章编号 1672-6634(2026)04-0498-10

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2025110010

不确定扰动下传染病传播的动态系统 建模与确信可靠性分析

刘雪, 刘利英

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 针对传染病传播过程中的不确定性特征,基于经典传染病动力学框架,构建一类具有不确定传播扰动的单种群传染病动力学模型。该模型将传染病传播视为一个受不确定因素影响的动态系统,其中感染率会受到人群流动、防控措施、环境变化等因素的影响,不确定扰动因素可以真实地反映传播过程中的动态行为。基于该模型,进一步求解了动态系统模型的首达时分布、确信可靠性函数及确信可靠性寿命,揭示了不确定扰动下传染病传播动力学的风险演化机制。在此基础上,对确信可靠性函数及确信可靠性寿命中的关键参数开展敏感性分析,通过绘制参数变化对系统可靠性的影响曲线,直观揭示了各参数与系统可靠性指标之间的动态关系。

关键词 不确定理论;不确定微分方程;首次击中时间;确信可靠性寿命

中图分类号 O29

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Dynamic system modeling and belief reliability analysis of infectious disease transmission under uncertainty

LIU Xue, LIU Liying

(School of Mathematical and Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract In response to the uncertain characteristics in the process of infectious disease transmission, this paper constructs a class of single-population infectious disease dynamic models with uncertain transmission perturbations based on the classical infectious disease dynamic framework. The model regards infectious disease transmission as a dynamic system affected by uncertain factors, where the infection rate is influenced by factors such as population mobility, prevention and control measures, and environmental changes. Uncertain perturbation factors can truly reflect the dynamic behavior during the transmission process. Based on this model, the paper further solves the first hitting time distribution, belief reliability function, and belief reliability life of the dynamic system model, revealing the risk evolution mechanism of infectious disease transmission dynamics under uncertain perturbations. On this basis, the paper conducts a sensitivity analysis on the key parameters in the credibility reliability function and credibility reliability life. By plotting the curves of the impact of parameter changes on system reliability, the dynamic relationships be-

收稿日期:2025-11-26

基金项目:山东省自然科学基金项目(ZR2020MA026);聊城大学博士科研基金项目(318051913)资助

通信作者:刘利英,女,汉族,博士,副教授,研究方向:可靠性分析,E-mail:lyliu001@163.com.

tween each parameter and the system reliability indicators are intuitively revealed.

Keywords uncertainty theory; uncertain differential equation; first hitting time; belief reliability lifetime

0 引言

传染病的爆发与传播一直是威胁人类生命健康与社会稳定发展的重大挑战。回顾历史,众多传染病如猴痘疫情^[1]、黑死病^[2]、西班牙流感^[3]、严重急性呼吸综合征以及新型冠状病毒肺炎^[4-6],都曾给人类社会带来沉重灾难。传染病传播模型作为研究传染病传播规律的重要工具,在疫情防控中发挥着关键作用。自Kermack 和 McKendrick^[7]在1927年提出经典SIR模型以来,确定性传染病模型凭借简洁的动力学机制,成为描述疾病传播的基础工具。Capasso 与 Serio^[8]针对实际疫情中感染率并非简单线性关系的问题,构建了非线性发生率模型。Arino 等^[9]在确定性系统中嵌入随机扰动项,模拟传播过程中的随机干扰。Zhang 等^[10]将多重因素整合进了LSTM模型中,捕捉登革热传播的复杂动态。然而在实际防疫场景中,新发突发传染病往往缺乏足够的流行病学数据支撑,同时,自然环境、人口流动、防控政策等人为因素带来的不确定性,也常呈现出非概率性的模糊特征,这使得传统随机模型的适用性与预测精度受到一定制约。

于是,为了应对不确定性问题,Liu^[11]于2007年提出了不确定理论,该数学分支以不确定测度为核心,为处理包括动态系统行为在内的各类不确定性现象提供了新的方法论基础。自提出以来,不确定理论在众多领域得到了广泛而深入的应用。在经济金融领域,Gao 等^[12]基于不确定统计研究了中国普通高校毕业生人数,验证了扰动项为不确定变量;在化学领域,Tang 等^[13]基于不确定微分方程推导了不确定化学反应方程;在传染病方面,Jia 等^[4]基于不确定微分方程推导了关于流行病学的SEIAR模型;在物理领域,Qiu 等^[14,27]考虑含不确定因素的单摆方程,研究了方程的稳定性与极值问题;在工程领域,Tian 等^[15]基于首次击中时间和不确定偏微分方程,重点研究了不确定热方程的可靠性;在生态学领域,Yang 等^[16]通过首达时对具有迁移源的不确定种群密度方程进行了可靠性分析。

不确定理论的发展为传染病动态系统的研究提供了新路径。将不确定理论引入传染病动力学模型,可以更全面、准确地考虑传染病传播过程中的各种不确定性因素,从而建立更加符合实际情况的传染病模型。传染病传播本质上是一个受偶然性与认知性不确定因素共同影响的动态过程,于是,Zeng 等^[17]指出,对动态系统进行可靠性分析时必须同时考虑偶然与认知两类不确定性。随后,Zhang 等^[18]提出“信念可靠性指标”的通用评估方法,通过将系统状态处于可行域的概率作为核心指标,有效衡量了系统可靠性。在此基础上,Zhang 等^[18]和 Zeng 等^[19]系统提出了确信可靠性的概念,并整合了对偶然与认知两类不确定性的统一分析。与此同时,Tian 等^[15]针对不确定热传导方程的首达时问题展开了深入探究,基于该研究成果进一步界定了确信可靠性函数与确信可靠性寿命的核心定义。在传染病动态系统中,首达时主要用于描述感染时间、爆发时间等关键事件的发生时刻,能够帮助我们预测疫情首次达到某一严重程度的时间;确信可靠性函数则评估系统状态在特定时间内维持在安全区域的可信度,为防控决策提供量化依据;确信可靠性寿命则反映系统在不确定扰动下维持可靠状态的时间,为制定长期防控策略提供参考。

基于上述背景,考虑人群行为、环境条件、防控措施、病毒变异等多种不确定因素对系统动态的影响,基于不确定理论构建了一类含不确定传播扰动的传染病动态系统模型。通过推导系统状态的首达时分布、确信可靠性函数与确信可靠性寿命的理论表达式,揭示其数学结构与系统动态规律。通过代码实现,对传染病动态系统进行仿真,分析参数对系统演化的影响,直观展示疫情发展趋势与可靠性特征。

1 理论知识

不确定微分方程是刻画含有不确定干扰的动态系统的核心工具,其解的存在唯一性^[20]及数值模拟方法(如 α -路径^[21])是分析不确定动态系统行为的关键基础。本部分将围绕不确定微分方程及其解的定义、适定性条件、 α -路径的求解以及解的逆不确定分布展开阐述。

定义1 (Liu^[22]) 设 f 和 g 为连续函数, C_t 为Liu过程,称

$$dX_t = f(t, X_t) dt + g(t, X_t) dC_t, \quad (1)$$

为不确定微分方程,其解 X_t 为满足(1)的不确定过程。

定理 1 (Chen-Liu^[20]) 如果对于某个常数 L 以及 $\forall x, y \in \mathbf{R}, t \geq 0$, 函数 $f(t, x)$ 和 $g(t, x)$ 满足线性增长条件 $|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq L(1 + |x|)$, 和 Lipschitz 条件 $|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq L|x - y|$, 则不确定微分方程(1)存在唯一解。

定义 2 (Yao-Chen^[23]) 设 α 为 0 到 1 之间的常数。不确定微分方程(1)的 α -路径 X_t^α 满足对应的常微分方程 $dX_t^\alpha = f(t, X_t^\alpha)dt + |g(t, X_t^\alpha)|\Phi^{-1}(\alpha)dt$, 其中 $\Phi^{-1}(\alpha)$ 表示标准正态不确定分布的逆函数, 即

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

定理 2 (Yao-Chen^[23]) 若不确定微分方程(1)满足线性增长、Lipschitz 条件及正则条件, 则解 X_t 具有逆不确定分布 $\Psi_t^{-1}(\alpha) = X_t^\alpha$ 。

定义 3 (Liu^[24]) 设 $\rho \in (0, 1]$, ξ 为不确定变量, 则 ξ 的 ρ -乐观值与 ρ -悲观值分别定义为 $\xi_{\sup}(\rho) = \sup\{t | \mathcal{M}\{\xi \geq t\} \geq \rho\}$ 和 $\xi_{\inf}(\rho) = \inf\{t | \mathcal{M}\{\xi \leq t\} \geq \rho\}$, 其中, $\mathcal{M}$ 是不确定理论中的不确定测度。

2 不确定传染病传播模型与首次击中时间

2.1 传染病传播模型

传统随机微分方程基于概率测度, 事件发生的可能性由概率分布描述, “噪声”被定义为 dW_t/dt , 且 dW_t/dt 服从正态分布 $N(0, \infty)$, 其中 W_t 是维纳过程。随机微分方程的解为随机过程, 其统计特性可通过概率方法求解。如果将随机微分方程应用到传染病模型中, 那么感染人数随时间的增加趋于无穷, 这显然是不符合实际情况的。不确定微分方程基于不确定测度, 不确定性是模糊的、主观的, 事件的可信程度由不确定测度来描述。不确定微分方程的解为不确定过程, “噪声”被定义为 dC_t/dt , 且 dC_t/dt 服从正态分布 $N(0, 1)$, 其中 C_t 是 Liu 过程(由 Liu^[25] 提出)。传染病患病人数是一类具有 Logistic 增长趋势、连续动态变化的非线性序列数据。本文在传统 Logistic 增长模型^[26] $\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{C}\right)$, $r > 0, C > 0$ 的基础上, 引入一个不确定扰动项以反映非系统性不确定因素对传播过程的影响。本文基于 Liu 提出的 Lipschitz 连续 Liu 过程, 对时变不确定变量进行建模, 得到如下表达式

$$dI_t = (q - m \ln I_t) I_t dt + \sigma I_t dC_t, \quad (2)$$

式中 I_t 为 t 时刻的感染人数, C_t 为 Liu 过程, 扰动项 $\sigma I_t dC_t$ 刻画传播过程中的非系统性的不确定干扰, q 为基础增长贡献项, m 为抑制或衰减系数, σ 表示不确定扰动的强度, 模型参数 q, m, σ 均为正数。

由定义 2, 可以求解出式(2)的 α -路径为 $I_t^\alpha = \exp(\ln I_0 \exp(-mt) + \frac{1}{m}(1 - \exp(-mt))(q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)))$, 其中 I_0 为疫情发现时的感染人数, 即初始感染人数。

2.2 首次击中时间

首达时 τ_z 定义为感染人数首次到达预设阈值 z 的时间, 即 $\tau_z = \inf\{t \geq 0 | I_t = z\}$, 其中 z 通常取公共卫生应急响应阈值(例如千人感染率 1% 对应的人数)。Liu^[28] 给出了首达时的精确定义。

定义 4 (Liu^[28]) 首达时 τ_z 是不确定过程 I_t 首次达到预设值 z 的时刻, 因此 τ_z 被视为一个不确定变量,

$$\tau_z = \begin{cases} \inf\{t | I_t \geq z, t \geq 0\}, & z > I_0, \\ \inf\{t | I_t \leq z, t \geq 0\}, & z < I_0. \end{cases}$$

通常情况下, 传染病发生的短时间内, 感染人数会呈上升趋势, 于是, 设置阈值 $z > I_0$, 我们可以根据定义 4 得出不确定传染病传播方程首达时的定义。

定义 5 假设 I_t 是不确定微分方程方程(2)的解。那么, 当 I_t 的上确界首次达到临界值 z 时, 对应的时刻记为 τ_z , 即 $\tau_z = \inf_{t \geq 0}\{t | \sup I_t = z\}$, 其中 z 是感染人数的预设阈值。

定理 3 令 I_t 和 I_t^α 分别是不确定微分方程(2)的解和 α -路径。若 $Q(I_t)$ 严格单调递增, 则对于任意给定水平 z , 不确定过程 $Q(I_t)$ 达到该水平的首次击中时间 τ_z 具有不确定分布

$$N(s) = \begin{cases} \sup\{\alpha | \inf_{0 \leq t \leq s} Q(I_t^\alpha) \leq z\}, & z < Q(I_0), \\ 1 - \inf\{\alpha | \sup_{0 \leq t \leq s} Q(I_t^\alpha) \geq z\}, & z > Q(I_0), \end{cases}$$

式中 s 是给定的非负时刻。

证 (1) 当 $z < Q(I_0)$ 时, 令 $\alpha_0 = \sup\{\alpha \mid \inf_{0 \leq t \leq s} Q(I_t^\alpha) \leq z\}$ 。由于 $Q(I_t)$ 是一个关于 I_t 的单调递增函数, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\tau_z \leq s\} &= \mathcal{M}\{\inf_{0 \leq t \leq s} Q(I_t) \leq z, \forall t \geq 0\} \\ &\geq \mathcal{M}\{Q(I_t) \leq Q(I_t^{\alpha_0}), \forall t \geq 0\} \\ &\geq \mathcal{M}\{I_t \leq I_t^{\alpha_0}, \forall t \geq 0\} \\ &= \alpha_0. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\tau_z \leq s\} &= 1 - \mathcal{M}\{\tau_z > s\} \\ &= 1 - \mathcal{M}\{\inf_{0 \leq t \leq s} Q(I_t) > z, \forall t \geq 0\} \\ &\leq 1 - \mathcal{M}\{Q(I_t) > Q(I_t^{\alpha_0}), \forall t \geq 0\} \\ &\leq 1 - \mathcal{M}\{I_t > I_t^{\alpha_0}, \forall t \geq 0\} \\ &= 1 - (1 - \alpha_0) \\ &= \alpha_0. \end{aligned}$$

可得 $\mathcal{M}\{\tau_z \leq s\} = \alpha_0$ 。首达时 τ_z 的不确定分布为 $N(s) = \alpha_0 = \sup\{\alpha \mid \inf_{0 \leq t \leq s} Q(I_t^\alpha) \leq z\}$, $z < Q(I_0)$ 。

(2) 当 $z > Q(I_0)$ 时, 令 $\beta_0 = \inf\{\alpha \mid \sup_{0 \leq t \leq s} Q(I_t^\alpha) \geq z\}$, 由于 $Q(I_t)$ 是一个关于 I_t 的单调递增函数, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\tau_z \leq s\} &= \mathcal{M}\{\sup_{0 \leq t \leq s} Q(I_t) \geq z, \forall t \geq 0\} \\ &\geq \mathcal{M}\{Q(I_t) \geq Q(I_t^{\beta_0}), \forall t \geq 0\} \\ &\geq \mathcal{M}\{I_t \geq I_t^{\beta_0}, \forall t \geq 0\} \\ &= 1 - \beta_0. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\tau_z \leq s\} &= 1 - \mathcal{M}\{\tau_z > s\} \\ &= 1 - \mathcal{M}\{\sup_{0 \leq t \leq s} Q(I_t) < z, \forall t \geq 0\} \\ &\leq 1 - \mathcal{M}\{Q(I_t) < Q(I_t^{\beta_0}), \forall t \geq 0\} \\ &\leq 1 - \mathcal{M}\{I_t < I_t^{\beta_0}, \forall t \geq 0\} \\ &= 1 - \beta_0. \end{aligned}$$

可得 $\mathcal{M}\{\tau_z \leq s\} = 1 - \beta_0$ 。首达时 τ_z 的不确定分布为 $N(s) = 1 - \beta_0 = 1 - \inf\{\alpha \mid \sup_{0 \leq t \leq s} Q(I_t^\alpha) \geq z\}$, $z > Q(I_0)$ 。

综上所述, 首达时 τ_z 的不确定分布为

$$N(s) = \begin{cases} \sup\{\alpha \mid \inf_{0 \leq t \leq s} Q(I_t^\alpha) \leq z\}, & z < Q(I_0), \\ 1 - \inf\{\alpha \mid \sup_{0 \leq t \leq s} Q(I_t^\alpha) \geq z\}, & z > Q(I_0). \end{cases}$$

定理4 令 I_t 和 I_t^α 分别是不确定微分方程(2)的解和 α -路径。若 $Q(I_t)$ 严格单调递减, 则对于任意给定水平 z , 不确定过程 $Q(I_t)$ 达到该水平的首次击中时间 τ_z 具有不确定分布

$$\tilde{N}(s) = \begin{cases} 1 - \inf\{\alpha \mid \inf_{0 \leq t \leq s} Q(I_t^\alpha) \leq z\}, & z < Q(I_0), \\ \sup\{\alpha \mid \sup_{0 \leq t \leq s} Q(I_t^\alpha) \geq z\}, & z > Q(I_0). \end{cases}$$

该定理的推导过程与定理3类似, 因此此处不再赘述证明过程。

鉴于传染病传播初期病例数呈快速增长特征, 而后续受人为干预措施的影响, 增长速率逐渐放缓, 本文

采用不确定过程 $Q(I_t) = \ln I_t$ 构建传染病传播动力学系统并展开研究。

定理 5 设函数 $Q(I_t) = \ln I_t$ 为连续且严格单调递增函数。若 $Q(I_t)$ 满足线性增长条件、Lipschitz 条件及正则条件, 则 $Q(I_t)$ 存在逆不确定分布 $\Omega_t^{-1}(\alpha) = \tilde{I}_0 \exp(-mt) + \frac{1}{m}(1 - \exp(-mt))(q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha))$, 其中, $\tilde{I}_0 = \ln I_0$ 。

证 因为 $Q(I_t) = \ln I_t$ 为连续且严格单调递增的函数, 于是 $\mathcal{M}\{Q(I_t) \leq Q(I_t^a)\} \geq \mathcal{M}\{I_t \leq I_t^a, \forall t > 0\} = \alpha$, $\mathcal{M}\{Q(I_t) > Q(I_t^a)\} \geq \mathcal{M}\{I_t > I_t^a, \forall t > 0\} = 1 - \alpha$, 根据对偶公理 $\mathcal{M}\{Q(I_t) \leq Q(I_t^a)\} + \mathcal{M}\{Q(I_t) > Q(I_t^a)\} = 1$, 可得 $\mathcal{M}\{Q(I_t) \leq Q(I_t^a)\} = \alpha$ 。因此, $Q(I_t)$ 的逆不确定分布为 $\Omega_t^{-1}(\alpha) = Q(I_t^a) = \ln I_t^a = \ln(\exp(\ln I_0 \exp(-mt) + \frac{1}{m}(1 - \exp(-mt))(q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)))) = \tilde{I}_0 \exp(-mt) + \frac{1}{m}(1 - \exp(-mt))(q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha))$, 式中, $\tilde{I}_0 = \ln I_0$ 。

3 确信可靠性分析

3.1 确信可靠性函数

确信可靠性函数是一类依赖时间演化的函数, 其核心作用在于量化模型在不同时间节点的可靠程度。在公共卫生研究场景中, “可靠状态” 被定义为感染人数未突破预设应急阈值 z (即 $I_t \leq z$), 据此, 确信可靠性函数 $G_B(T)$ 可表述为: 当 $t \in [0, T]$, 感染人数 I_t 仍维持在可靠状态的测度, $G_B(T) = \mathcal{M}\{\sup_{0 \leq t \leq T} Q(I_t) \leq z\}$ 。

定理 6 设 α 为 0 到 1 之间的常数, z 是事先设置的应急阈值, 则传染病传播系统的确信可靠性函数可表示为

$$G_B(T) = \inf\{\alpha \mid \sup_{0 \leq t \leq T} Q(I_t^a) \geq z, z > I_0\} = \left[1 + \exp\left(\frac{q\pi}{\sqrt{3}\sigma} - \frac{z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)}{1 - \exp(-mT)} \frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right]^{-1}, \quad (3)$$

式中 I_t 与 I_t^a ($0 < \alpha < 1$) 分别是式(2)的解与迁移路径。

证 首先, 考虑传染病感染人数是呈上升趋势的, 于是, 应急阈值的设置为 $z > \ln I_0$ 。根据定理 3 可得出不确定传染病传播模型(2)的首达时分布函数为

$$N(T) = 1 - \inf\{\alpha \mid \sup_{0 \leq t \leq T} \ln I_t^a \geq z\} = 1 - \inf\left\{\alpha \mid \sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{I}_0 \exp(-mt) + \frac{1}{m}(1 - \exp(-mt))(q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)) \geq z\right\}.$$

因为 $\ln I_t^a = \tilde{I}_0 \exp(-mt) + \frac{1}{m}(1 - \exp(-mt))(q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)) = \left(\tilde{I}_0 - \frac{q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)}{m}\right) \exp(-mt) + \frac{q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)}{m}$, 所以, 令 $h_1 = \left\{\alpha \in (0, 1) \mid \tilde{I}_0 - \frac{q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)}{m} < 0\right\}$, $h_2 = \left\{\alpha \in (0, 1) \mid \tilde{I}_0 - \frac{q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)}{m} \geq 0\right\}$,

易见, $h_1 \cup h_2 = (0, 1)$, 且 $h_1 \neq \emptyset$ 。当 $\alpha \in h_2$, $\ln I_t^a$ 关于 t 单调递减, $\sup_{0 \leq t \leq T} \ln I_t^a = \ln I_0^a = \tilde{I}_0 + \frac{q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)}{m} \leq z$; 当 $\alpha \in h_1$, $\ln I_t^a$ 关于 t 单调递增, 且满足 $\ln I_0^a \leq z$ 。

因此, 基于定理 2, 可得

$$\begin{aligned} V(T) &= \mathcal{M}\{\tau_z \leq T\} \\ &= 1 - \inf\{\alpha \mid \sup_{0 \leq t \leq T} \ln I_t^a \geq z\} \\ &= 1 - \inf\left\{\alpha \in h_2 \mid \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\tilde{I}_0 - \frac{q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)}{m}\right) \exp(-mt) + \frac{q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)}{m} \geq z\right\} \\ &= 1 - \inf\left\{\alpha \mid \left(\tilde{I}_0 - \frac{q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)}{m}\right) \exp(-mT) + \frac{q + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)}{m} \geq z\right\} \\ &= 1 - \inf\left\{\alpha \mid \ln \frac{\alpha}{1 - \alpha} \geq \frac{z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)}{1 - \exp(-mT)} \frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma} - \frac{q\pi}{\sqrt{3}\sigma}\right\} \\ &= \left[1 + \exp\left(\frac{z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)}{1 - \exp(-mT)} \frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma} - \frac{q\pi}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right]^{-1}. \end{aligned}$$

根据 $G_B(T)$ 的定义和首达时与 $V(T)$ 的关系,我们可以得到

$$\begin{aligned} G_B(T) &= \mathcal{M}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} Q(I_t^a) \leq z\right\} \\ &= \mathcal{M}\{\tau_z \geq T\} \\ &= 1 - V(T) \\ &= \inf\{\alpha \mid \sup_{0 \leq t \leq T} \ln I_t^a \geq z\} \\ &= 1 - \left[1 + \exp\left(\frac{z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)}{1 - \exp(-mT)} \frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma} - \frac{q\pi}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right]^{-1} \\ &= \left[1 + \exp\left(\frac{q\pi}{\sqrt{3}\sigma} - \frac{z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)}{1 - \exp(-mT)} \frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right]^{-1}. \end{aligned}$$

定理 7 对于含初始感染人数 $\tilde{I}_0$, 时间上限 T 与应急阈值 z 的不确定传染病传播模型,其确信可靠性函数为 $G_B(T)$ 。通过分析该确信可靠性函数(3)对各参数的敏感性,可得如下结论:(1) $G_B(T)$ 关于 q 单调递减;(2) $G_B(T)$ 关于 σ 单调递减;(3) $G_B(T)$ 关于 z 单调递增;(4) $G_B(T)$ 关于 T 单调递减。

证 (1) 因为 m, σ 均为正数,所以 $\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} > 0$, 易得出 $G_B(T)$ 关于 q 是一个单调递减的函数。(2) 化简

$G_B(T)$, 得 $G_B(T) = \left[1 + \exp\left(\left(\frac{q\pi}{\sqrt{3}} - \frac{z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)}{1 - \exp(-mT)} \frac{m\pi}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sigma}\right)\right]^{-1} = \left[1 + \exp\left(\frac{C}{\sigma}\right)\right]^{-1}$, 其中 $C < 0$, 显而易见,随着 σ 的增大, $G_B(T)$ 减小,因此, $G_B(T)$ 关于 σ 是一个单调递减的函数。(3) 因为 m, σ 均为正数,所以 $\frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma} > 0$, 易得出 $G_B(T)$ 关于 z 是一个单调递增的函数。(4) 对 $G_B(T)$ 关于 T 求偏导数,设

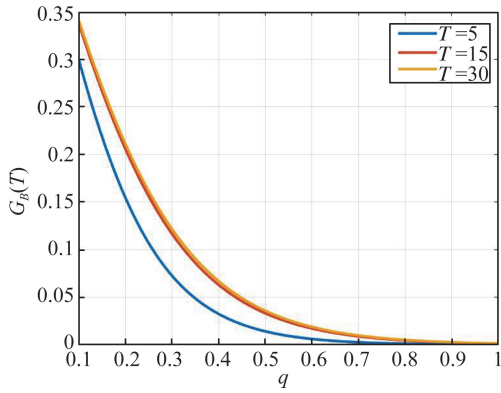
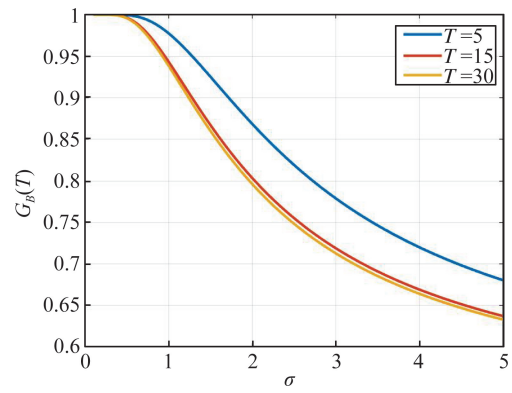
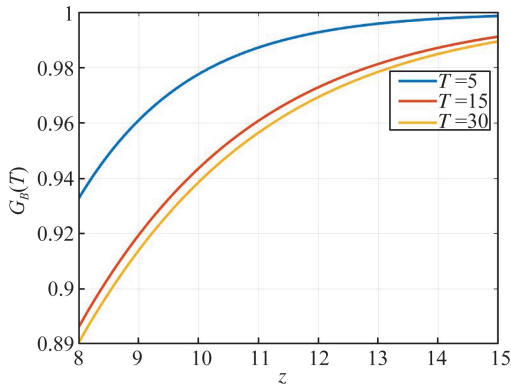
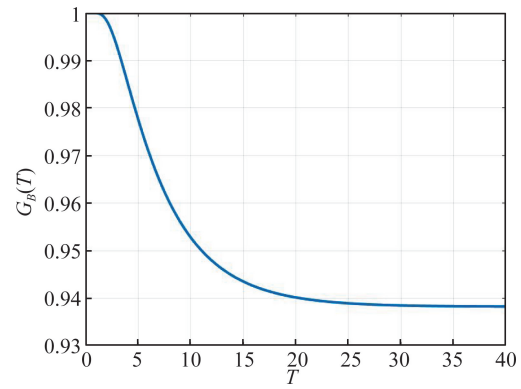
$G_B(T) = u^{-1}$, 其中 $u = 1 + \exp(v)$, $v = \frac{q\pi}{\sqrt{3}\sigma} - \frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma} \times \frac{z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)}{1 - \exp(-mT)}$, 于是 $\frac{\partial G_B(T)}{\partial T} = -u^{-2} \frac{\partial u}{\partial T} = -\frac{1}{u^2} \exp(v) \frac{\partial v}{\partial T}$, 又

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial T} &= -\frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma} \times \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)}{1 - \exp(-mT)} \right) \\ &= -\frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma} \times \frac{-\tilde{I}_0 \exp(-mT) (-m) (1 - \exp(-mT)) - (z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)) (-\exp(-mT)) (-m)}{(1 - \exp(-mT))^2} \\ &= -\frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma} \times \frac{m \exp(-mT) [\tilde{I}_0 (1 - \exp(-mT)) - (z - \tilde{I}_0 \exp(-mT))]}{(1 - \exp(-mT))^2} \\ &= -\frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma} \times \frac{m \exp(-mT) (\tilde{I}_0 - z)}{(1 - \exp(-mT))^2}, \end{aligned}$$

因此, $\frac{\partial G_B(T)}{\partial T} = -[G_B(T)]^2 \exp\left(\frac{q\pi}{\sqrt{3}\sigma} - \frac{z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)}{1 - \exp(-mT)} \frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma}\right) \left(\frac{m^2\pi}{\sqrt{3}\sigma}\right) \frac{\exp(-mT) (z - \tilde{I}_0)}{(1 - \exp(-mT))^2} < 0$ 。由此可得, $G_B(T)$ 关于 T 是一个单调递减的函数。

例 1 在传染病传播系统的确信可靠性函数 $G_B(T)$ 中, 给定 $q = 0.5, m = 0.2, \sigma = 1, \tilde{I}_0 = 5, T = \{5, 15, 30\}$, $z = 10$, 分析传染病传播系统的确信可靠性函数中参数的敏感性, 确信可靠性函数(3)随参数 q 的变化规律见图 1, 随参数 σ 的变化规律见图 2, 随应急阈值 z 的变化规律见图 3, 随时间上限 T 的变化规律见图 4。

例 2 为了更加直观地看出各参数对确信可靠性函数的影响情况, 我们又给出了 $G_B(T)$ 关于 q, m, σ, z, T 中两个参数的变化三维图像, 见图 5~8。

图1 $G_B(T)$ 关于 q 的变化曲线Fig. 1 The variation curve of $G_B(T)$ with respect to q 图2 $G_B(T)$ 关于 σ 的变化曲线Fig. 2 The variation curve of $G_B(T)$ with respect to σ 图3 $G_B(T)$ 关于 z 的变化曲线Fig. 3 The variation curve of $G_B(T)$ with respect to z 图4 $G_B(T)$ 关于 T 的变化曲线Fig. 4 The variation curve of $G_B(T)$ with respect to T

3.2 确信可靠性寿命

确信可靠性寿命指的是在给定的条件下,传染病传播模型能够保持可靠状态的最长时间。这里的可靠状态意味着模型对传染病传播过程的描述和预测与实际情况的偏差在可接受范围内。确信可靠性寿命是基于确信可靠性函数确定的一个特定时间值,是确信可靠性函数在可靠性评估中的一个具体应用。

定理 8 假设 $\beta \in (0, 1)$, 传染病传播系统的确信可靠性寿命 $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 可表示为

$$[\tau_z]_{\sup}(\beta) = \sup\{T \mid G_B(T) \geq \beta\}$$

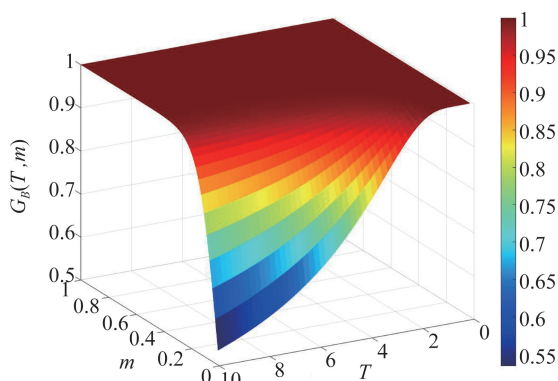
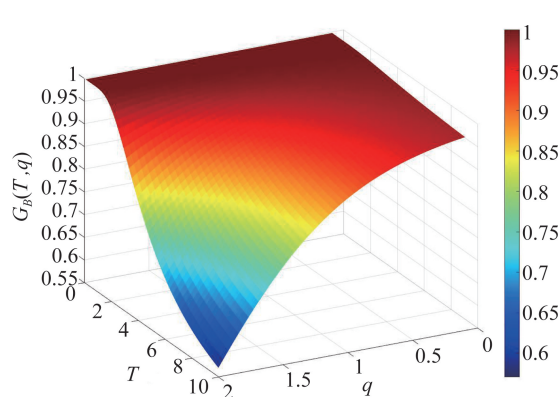
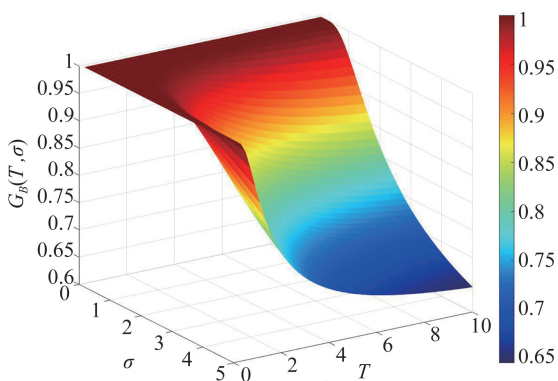
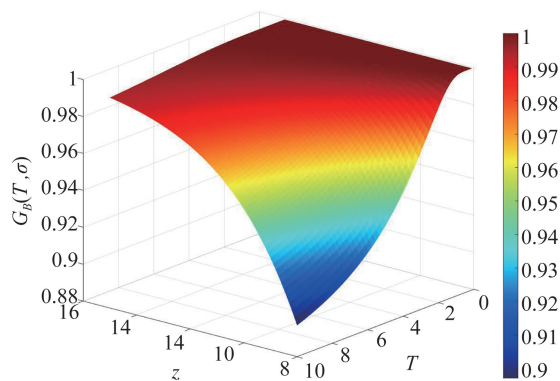
$$= \begin{cases} +\infty, & \frac{\tilde{I}_0 - z}{\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0} \geq 1, \\ -\frac{1}{m} \ln \left(1 - \frac{\tilde{I}_0 - z}{\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0} \right), & \frac{\tilde{I}_0 - z}{\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0} < 1. \end{cases} \quad (4)$$

证 对 $\forall \alpha, \beta \in (0, 1)$, 根据定义 3 和定理 3, 我们可以得到

$$\begin{aligned} [\tau_z]_{\sup}(\beta) &= \sup\{T \mid \mathcal{M}\{\tau_z \geq T\} \geq \beta\} \\ &= \sup\{T \mid 1 - V(T) \geq \beta\} \\ &= \sup\{T \mid \inf\{\alpha \mid \sup_{0 \leq t \leq T} \ln I_t^\alpha \geq z\} \geq \beta\} \\ &= \sup\{T \mid G_B(T) \geq \beta\}. \end{aligned}$$

由定理 6 可知 $G_B(T) = \left[1 + \exp\left(\frac{q\pi}{\sqrt{3}\sigma} - \frac{z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)}{1 - \exp(-mT)} \frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma}\right) \right]^{-1}$, 于是, 我们有

$$\begin{aligned}
[\tau_z]_{\sup}(\beta) &= \sup \left\{ T \left| \left[1 + \exp \left(\frac{q\pi}{\sqrt{3}\sigma} - \frac{z - \tilde{I}_0 \exp(-mT)}{1 - \exp(-mT)} \frac{m\pi}{\sqrt{3}\sigma} \right) \right]^{-1} \geq \beta \right. \right\} \\
&= \sup \left\{ T \left| 1 - \frac{\tilde{I}_0 - z}{\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0} \leq \exp(-mT) \right. \right\} \\
&= \begin{cases} +\infty, & \frac{\tilde{I}_0 - z}{\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0} \geq 1, \\ -\frac{1}{m} \ln \left(1 - \frac{\tilde{I}_0 - z}{\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0} \right), & \frac{\tilde{I}_0 - z}{\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0} < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

图5 $G_B(T)$ 关于 m, T 的变化曲线Fig. 5 The variation curve of $G_B(T)$ with respect to m, T 图6 $G_B(T)$ 关于 q, T 的变化曲线Fig. 6 The variation curve of $G_B(T)$ with respect to q, T 图7 $G_B(T)$ 关于 σ, T 的变化曲线Fig. 7 The variation curve of $G_B(T)$ with respect to σ, T 图8 $G_B(T)$ 关于 z, T 的变化曲线Fig. 8 The variation curve of $G_B(T)$ with respect to z, T

定理9 对于含初始感染人数 $\tilde{I}_0$ 与应急阈值 z 的不确定传染病传播模型,其确信可靠性寿命为 $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 。通过分析确信可靠性寿命(4)对不同参数的敏感性,可得如下结论:(1) $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 β 单调递增;(2) $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 q 单调递增;(3) $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 m 单调递减;(4) $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 σ 单调递增。

证 (1) 因为 $\ln\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)$ 关于 β 单调递增,易得出 $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 β 单调递增。(2) 因为 $m > 0$, $\tilde{I}_0 - z < 0$, 于是 $\ln\left(1 - \frac{\tilde{I}_0 - z}{\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0}\right)$ 关于 q 单调递减,最终 $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 q 单调递增。(3) 对

$[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 m 求偏导数 $\frac{\partial [\tau_z]_{\sup}(\beta)}{\partial m} = \frac{1}{m^2} \ln \left(1 - \frac{\tilde{I}_0 - z}{\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0} \right) + \frac{1}{m^3} \left(1 - \frac{\tilde{I}_0 - z}{\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0} \right)^{-1} \frac{(\tilde{I}_0 - z) \left(q + \frac{\sqrt{3}\sigma}{\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} \right)}{\left(\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0 \right)^2}$, 由于 $\frac{\tilde{I}_0 - z}{\frac{q}{m} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} - \tilde{I}_0} < 1, \tilde{I}_0 - z < 0$, 因此 $\frac{\partial [\tau_z]_{\sup}(\beta)}{\partial m} < 0$, 即 $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 m 单调递减。(4) 当 $\beta \in (0, 0.5)$ 时, $\ln \frac{\beta}{1-\beta} < 0$, 于是 $\frac{\sqrt{3}}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} < 0$, $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 σ 单调递减; 当 $\beta \in (0.5, 1)$ 时, $\ln \frac{\beta}{1-\beta} > 0$, 于是 $\frac{\sqrt{3}}{m\pi} \ln \frac{\beta}{1-\beta} > 0$, $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 σ 单调递增。

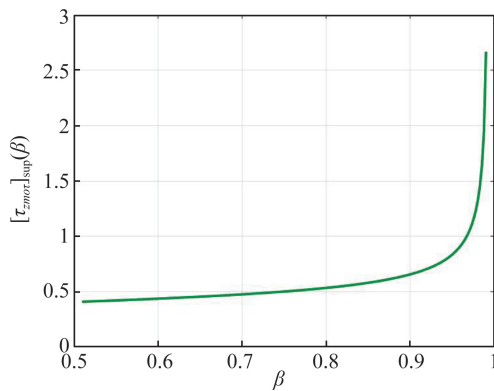


图9 $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 β 的变化曲线

Fig. 9 The variation curve of $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ with respect to β

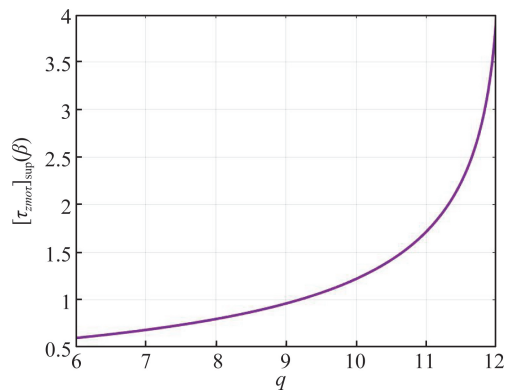


图10 $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 q 的变化曲线

Fig. 10 The variation curve of $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ with respect to q

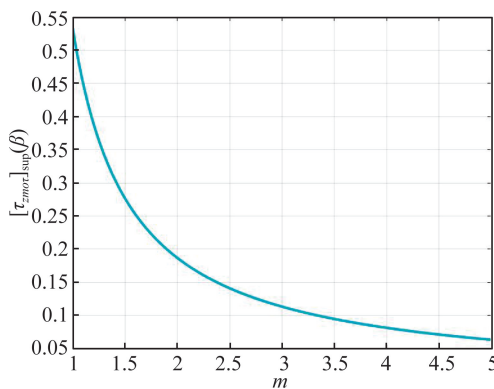


图11 $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 m 的变化曲线

Fig. 11 The variation curve of $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ with respect to m

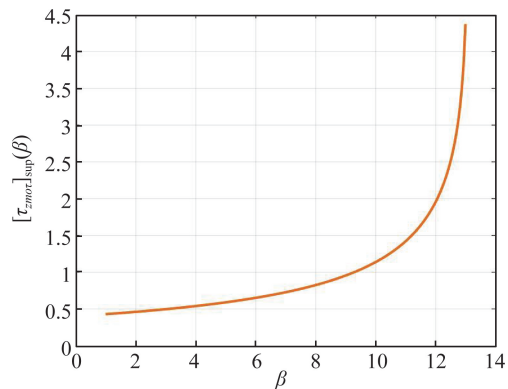


图12 $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 关于 σ 的变化曲线

Fig. 12 The variation curve of $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ with respect to σ

例3 在传染病传播系统的确信可靠性寿命 $[\tau_z]_{\sup}(\beta)$ 中, 给定 $q=5, m=1, \sigma=3.8, \tilde{I}_0=20, z=25, \beta=0.8$, 分析传染病传播系统的确信可靠性寿命中参数的敏感性, 确信可靠性寿命(4)随 β 的变化规律见图9, 随参数 q 的变化规律见图10, 随参数 m 的变化规律见图11, 随参数 σ 的变化规律见图12。

4 结论

本文围绕含不确定传播扰动的传染病动态系统可靠性展开研究, 系统分析了该类系统在不确定性下的动态行为与可靠性特征。针对传统传染病模型难以准确刻画“传播概率波动”“人员流动”等不确定因素对系统动态演化影响的局限, 本文将不确定理论引入动态系统建模框架, 并基于不确定测度描述系统参数的不确定性范围, 构建了一类含不确定传播扰动的传染病动力学模型。该模型能真实地反映系统状态的演化过程。

在此基础上,本文推导了传染病动态系统的首达时表达式,用于量化系统状态(如感染人数)首次达到预设预警阈值的时间特征。进一步通过研究系统的确信可靠性函数与确信可靠性寿命,揭示了系统在不同时刻处于安全运行状态的可信度,以及系统在不确定扰动下能够持续保持可靠性的最长时间,为预测系统行为与制定防控策略提供了理论依据。

需要指出的是,本文所构建的动态系统模型暂未将“人群空间移动”“多病原体共传播”等更复杂的不确定性机制区分为不同的结构扰动项,可能在对大规模、多群体耦合系统的可靠性分析中存在一定局限。未来研究可进一步从多群体、多变量动态系统的角度,构建更贴合实际传播场景的高维不确定系统模型,以增强对复杂传染病动态系统可靠性行为的刻画能力。

参 考 文 献

- [1] 陈丽丽,丁春晓. 尼日利亚猴痘疫情不确定 Logistic 增长模型分析[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(12): 49-54.
- [2] 李书龙. 早期奥斯曼帝国黑死病研究(1347-1600)[D]. 临汾:山西师范大学, 2023.
- [3] 陈矜伶, 陈爱梅. 西班牙流感在英属马来亚的传染与华人社会的应对[J]. 八桂侨刊, 2024(2): 77-86.
- [4] JIA L F, CHEN W. Uncertain SEIAR model for COVID-19 cases in China[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2021, 20(2): 243-259.
- [5] 金启轩. 中国新冠肺炎疫情预测建模与理性评估[J]. 统计与决策, 2020, 36(5): 11-14.
- [6] 曹文静, 刘小菲, 韩卓, 等. 新型冠状病毒肺炎疫情确诊病例的统计分析及其自回归建模[J]. 物理学报, 2020, 69(9): 40-46.
- [7] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. A contribution to the mathematical theory of epidemics[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1927, 115(772): 700-721.
- [8] CAPASSO V, SERIO G. A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model[J]. Mathematical Biosciences, 1978, 42(1-2): 43-61.
- [9] ARINO J, BRAUER F, et al. A final size relation for epidemic models[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2007, 4(2): 159.
- [10] CHEN X, MORAGA P. Forecasting dengue across Brazil with LSTM neural networks and SHAP-driven lagged climate and spatial effects[J]. BMC Public Health, 2025, 25(1): 973.
- [11] LIU B D. Uncertainty Theory[M]. 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [12] GAO C H, LIU Y, NING Y F, et al. Analysis of the number of students in general colleges and universities in China with uncertain statistics[J]. Soft Computing, 2024: 1-12.
- [13] TANG H, YANG X. Uncertain chemical reaction equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 411: 126479.
- [14] QIU X Y, ZHU J X, LIU S Q, et al. The establishment of uncertain single pendulum equation and its solutions[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2024, 57(12): 125202.
- [15] TIAN C L, JIN T, YANG X F, et al. Reliability analysis of the uncertain heat conduction model[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2022, 119: 131-140.
- [16] YANG L, JIN T, LU K L. Reliability analysis of uncertain population density equation with a migration source[J]. Information Sciences, 2025, 713: 122176.
- [17] ZENG Z G, KANG R, WEN M L, et al. A model-based reliability metric considering aleatory and epistemic uncertainty[J]. IEEE Access, 2017, 5: 15505-15515.
- [18] ZHANG Q Y, KANG R, WEN M. Belief reliability for uncertain random systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(6): 3605-3614.
- [19] ZENG Z G, KANG R, WEN M L, et al. Uncertainty theory as a basis for belief reliability[J]. Information Sciences, 2018, 429: 26-36.
- [20] CHEN X W, LIU B D. Existence and uniqueness theorem for uncertain differential equations[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2010, 9(1): 69-81.
- [21] YAO K. A type of uncertain differential equations with analytic solution[J]. Journal of Uncertainty Analysis and Applications, 2013, 1(1): 8.
- [22] LIU B D. Fuzzy process, hybrid process and uncertain process[J]. Journal of Uncertain Systems, 2008, 2(1): 3-16.
- [23] YAO K, CHEN X W. A numerical method for solving uncertain differential equations[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2013, 25(3): 825-832.
- [24] LIU B D. Uncertainty Theory[M]. 5nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 2025.
- [25] LIU B D. Some research problems in uncertainty theory[J]. Journal of Uncertain Systems, 2009, 3(1): 3-10.
- [26] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法[M]. 北京:科学出版社, 1985.
- [27] QIU X Y, LIU L Y. Stability analysis of uncertain simple pendulum equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2024, 57(19): 195205.
- [28] LIU B D. Extreme value theorems of uncertain process with application to insurance risk model[J]. Soft Computing, 2013, 17(4): 549-556.

(责任编辑:刘庆松)