

引用:杜正昌,赵军圣.一类基于 Barbalat 引理的非线性系统自适应控制分析[J].聊城大学学报(自然科学版),2026,39(3):336-345.

Citation:DU Zhengchang, ZHAO Junsheng. Adaptive control analysis of a class of nonlinear systems based on Barbalat's lemma[J]. Journal of Liaocheng University (National Science Edition), 2026,39(3):336-345.

文章编号 1672-6634(2026)03-0336-10

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2025070011

一类基于 Barbalat 引理的非线性系统自适应控制分析

杜正昌,赵军圣

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘要 研究了一类非线性系统自适应智能跟踪问题,旨在解决非线性系统中参数未知、控制律与 Barbalat 引理条件的兼容性等的挑战。通过 Barbalat 引理和反步法框架,提出了一种新型智能控制算法。该算法通过引入适配的调节函数,并采用在线估计的方法,有效地规避了传统方法中常见的过参现象。以此构造的新型智能控制器不仅结构简洁,而且具备快速响应跟踪信号的能力。这一改进突破了传统 Lyapunov 函数构造方法中控制器构建复杂、计算难度高、鲁棒性不足等局限。最后,通过仿真实验,验证了所提控制算法在非

关键词 Barbalat 引理;非线性系统;自适应控制;反步法

中图分类号 O231

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Adaptive control analysis of a class of nonlinear systems based on Barbalat's lemma

DU Zhengchang, ZHAO Junsheng

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract This paper investigates the adaptive intelligent tracking control problem for a class of nonlinear systems, aiming to address challenges such as unknown parameters and the compatibility between control laws and the conditions of Barbalat's lemma. Within the framework of Barbalat's lemma and the backstepping control technique, a novel intelligent control algorithm is proposed. By introducing suitable tuning functions and employing online estimation strategies, the method effectively avoids the over-parameterization issue commonly encountered in conventional approaches. The resulting intelligent controller not only exhibits a simple structure but also demonstrates the capability to rapidly respond to reference signals. This improvement overcomes limitations of traditional Lyapunov-based controller design methods, such as structural complexity, high computational burden, and insufficient robustness. Simulation results are provided to verify the effectiveness of the proposed control algorithm in nonlinear systems.

Keywords Barbalat's lemma; nonlinear system; adaptive control; backstepping control method

收稿日期:2025-07-31

基金项目:国家自然科学基金项目(62373302);山东省自然科学基金项目(ZR2025MS1073)资助

通信作者:赵军圣,男,汉族,博士,教授,研究方向:非线性随机系统控制、自适应理论和最优控制等,E-mail:zhaojunshao@163.com。

0 引言

近年来,随着自动化机械装置^[1-2]、航空航天、电力系统^[3-4]等尖端应用领域的快速发展,系统运行时表现出的动态行为呈现出高度复杂性及显著的非线性特征^[5-7]。在此背景下,非线性系统模型因其能够精准刻画系统动态特性,逐渐成为学术界和工程界的研究焦点。然而,在实际应用中,系统往往受到参数不确定性、未建模动态及外部干扰等因素的影响,使得传统固定参数控制策略难以同时满足稳定性、鲁棒性和控制精度,而自适应控制理论可根据系统实时反馈动态调整控制参数,为解决上述难题提供了有效路径^[8]。

目前,自适应控制的研究热点主要集中在与其他稳定性理论或控制技术的交叉融合。例如,将传统固定时间稳定性理论推广至随机情形和分数阶系统^[9],或与自适应神经网络控制、机器学习融合^[10],以提高系统自主优化能力。智能控制的核心优势在于赋予系统动态调整的能力,使其在参数未知或环境变化的情况下仍能够自主优化控制策略。鉴于智能控制具有独特优势,许多学者在反步法的基础上,将非线性系统和不同的自适应控制技术融合,以增强系统鲁棒性并解决“复杂度爆炸”问题。代表性研究包括:Imil Hamda Imran 等人利用新自适应方案,形成“监测-学习-调整”的闭环^[11];周绍生将线性多变量系统转化为海森伯格(MLHS)形式,基于 Lyapunov 函数和反步法设计控制器^[12];郭腾念通过设计精巧的参数并构造新型李雅普诺夫函数来设计随机自适应有限时间控制器^[13];孙强和与童止戈在控制器中引入自适应鲁棒控制项,提升了系统跟踪性能^[14];俞沛宙等人利用反步法和灰狼优化算法,实现了电机转速的自适应调节^[15];梁志鸿等采用事件驱动间歇控制,实现离散复杂网络的有限时间内快速同步;尤其重要的是,刘科力等提出的自适应反步容错控制策略,通过统一处理执行器故障与系统参数不确定性^[2],为本文解决非线性系统的参数估计问题提供了方法借鉴。

显然,国内外学者在非线性系统和智能自适应控制的交叉领域内已取得丰硕成果,然而现有的控制策略有时难以高效解决自适应控制问题^[17]。以含不确定参数的非线性系统为例,刘玉发等学者针对一类具有未知幂次的不确定非线性系统,通过融合积分反步法和障碍 Lyapunov 函数,成功设计了自适应状态反馈控制器^[18]。然而,这一过程的复杂性也充分体现了在参数不确定条件下构建自适应控制面临一定难度。同时,Barbalat 引理作为稳定性分析工具,能够有效弥补传统 Lyapunov 函数方法的局限性,为系统收敛性分析提供了新的理论视角^[19]。显然,该定理在此前已有研究的智能神经网络控制等领域已展现出良好的应用前景^[20]。

传统方法常常依赖 Lyapunov 稳定性理论,要求 Lyapunov 函数导数严格负定^[7]。然而,该方法在处理高阶非线性系统时面临“复杂度爆炸”问题,且对参数不确定性或扰动缺乏鲁棒性。同时,经典研究如 Krstić 等提出的基于 Barbalat 引理的自适应控制方案解决了严格反馈系统的稳定性问题^[21],但其仍存在多重局限:其一,文中使用传统引理形式,虽然不要求 Lyapunov 函数导数严格负定,但并没有解决参数估计采用梯度法导致的过参数化现象,其二,缺乏对系统及外部扰动的鲁棒性处理。这表明 Barbalat 引理在非线性领域的研究早有应用,但其在含有未知参数的非线性系统中的理论拓展与应用仍有待深入探索。而将 Barbalat 引理与反步法的结合,可突破传统算法的双重局限:一方面,该策略通过放宽 Lyapunov 函数导数严格负定条件,减少中间虚拟控制器的冗余项,显著降低虚拟控制器高阶导数计算复杂度,提高计算效率;另一方面,其允许系统在未建模动态时仍保持稳定,并增强了控制器的鲁棒性。且此类方法可统一处理匹配/非匹配不确定性,扩展了自适应控制在复杂非线性系统中的适用范围。显然,Barbalat 引理在含有未知参数的非线性系统研究中具有效率高、限制小、控制器构造难度低、稳定性优越等独特优势。因此,将 Barbalat 引理与反步法结合的主要动机在于克服传统反步法的保守性与计算复杂程度。然而,这一结合也面临着三大挑战:Barbalat 引理的非构造性、自适应律与 Barbalat 引理条件的兼容性、非匹配不确定性的处理。基于此,本研究旨在前人研究的基础上,解决非线性系统含有未知参数问题、突破传统 Lyapunov 函数构造方法的局限,为非线性系统自适应控制提供更有效的理论与技术方案,推动相关领域的发展。为了实现这一目标,研究借助了 Barbalat 引理,设计了一种新的控制设计策略,该策略实现了以下三个方面的创新:

(1) 设计新型调节函数:将参数误差项融入到 Lyapunov 函数导数,将参数未知问题转化为在线估计和

有界性分析问题,并避免了过参数化现象,为 Barbalat 引理的应用奠定基础。

(2) 引入单调有界定理辅助证明:通过 $V \geq 0$ 且 $\dot{V} \leq 0$ 先证明 V 收敛,再结合 Barbalat 引理导出状态收敛,突破传统稳定性分析对瞬时负定条件的限制,为非线性系统收敛性证明提供新范式。

(3) 结合反步法的递推框架:在虚拟控制器中嵌入 Barbalat 引理的积分约束,逐级放宽稳定性要求,分析系统误差信号及其导数性质,实现 Barbalat 引理与反步法的有机结合。明显简化了虚拟控制构建过程,避免了传统反步法构造过程过于复杂的问题,为参数未知的非线性系统自适应控制与稳定性分析提供了新的强力工具。

1 问题陈述与预备知识

1.1 问题陈述

考虑以下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \theta \cdot f_i(x_1, x_2, \dots, x_i), i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u + \theta \cdot f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_1 = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

式中 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 是光滑函数,且满足 $f_1(0) = f_2(0, 0) = \dots = f_n(0, 0, \dots, 0) = 0$, 这里的 θ 是未知的常数。

1.2 符号

(1) $\hat{\theta}(t)$ 是通过在线计算方法获取的 θ 的估值,两者之间的误差用 $\tilde{\theta}$ 来表示,即 $\tilde{\theta}(t) \triangleq \theta - \hat{\theta}(t)$ 。

(2) 对于向量 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$, 约定 $\bar{x}_i \triangleq [x_1, \dots, x_i] \in \mathbf{R}^i, i = 1, 2, \dots, n$ 。

(3) 对连续可微的函数 $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+$, 如果 $V(\mathbf{x}) \geq 0, V(\mathbf{x}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = 0$ 时成立,则称 $V(\mathbf{x})$ 是正定的。如果 $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty$, 则称 $V(\mathbf{x})$ 是径向无界的^[22]。

1.3 预备知识

Barbalat 引理的基本形式虽然能够在一定程度上判断系统的渐近收敛性,但由于不易与 Lyapunov 理论相结合,故在实际应用中有一定局限性。本研究对 Barbalat 引理的基本形式进行一定程度的延展和变形,得到如下形式的 Barbalat 引理:

引理 1^[23] 对连续可微的标量函数 $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, 如果 $f, \dot{f} \in L_\infty$ 且 $f \in L_p$, 其中 $p \in [1, \infty)$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ 。

所谓单调有界定理指的是,实数范围内有界的单调数列必然存在极限,也就是说当实数数列单调上升(或单调下降)且有上界(或下界)时,该数列极限必存在。本研究使用单调有界定理的如下基本形式。

引理 2^[24] 若数列 $\{a_n\}$ 满足:

(1) 单调递增且存在实数 M 使得 $a_n \leq M$ 对所有 n 成立,则 $\{a_n\}$ 收敛,且极限为其上确界。

(2) 单调递减且存在实数 m 使得 $a_n \geq m$ 对所有 n 成立,则 $\{a_n\}$ 收敛,且极限为其下确界。

拉格朗日中值定理是高等数学中一个非常重要的定理,其完善了微积分的理论基础,该定理反映的是一阶可导的函数在一个区间上的增量与区间内部某一点的一阶导数值之间的关系。

引理 3^[25] 设函数 $f(x)$ 满足以下条件:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续。

(2) 在开区间 (a, b) 上可导,则在 (a, b) 内至少存在一点 c , 使得 $\dot{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 即函数在某点 c 的导数等于区间段点的平均变化率。

引理 4 对于 $\forall a, b \in \mathbf{R}, |a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ 。

引理 5 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的可测函数列,若存在非负可积函数 $F(x)$, 使得对几乎所有的 $x \in E$,

及所有的 n , 都有 $|f_n(x)| \leq F(x)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ 几乎处处成立,若将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 看作部分函

数列 $S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$ 的极限,则积分与求和可交换次序,即 $\int_e \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_e f_n(x) dx$ 。

2 自适应控制器设计

在本节中,将针对非线性系统(1),利用反步法,设计出一种控制器,目的是对该非线性系统自适应控制问题,实现跟踪控制目标。需要注意的是,控制器的设计对参数的收敛与否并不关注,因为非线性系统的参数收敛几乎是不可解的。

由于参数 θ 是未知的,为此,舍弃常规的方法,转而寻求一种新的方法来处理未知参数 θ 。一种常规的方法是通过在线计算的方式来获取它的一个估值 $\hat{\theta}(t)$,并用这个 $\hat{\theta}(t)$ 替代 θ ,两者之间的误差用 $\tilde{\theta}$ 来表示,即

$$\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t), \quad (2)$$

且需要注意的是: θ 虽然是未知数,但其自身是一个常数,求导后为 0。

为了控制目标的可实现性,修正误差变量为

$$z_1 = x_1, z_i = x_i - \alpha_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_i, \hat{\theta}), (i = 1, 2, \dots, n), u(x, \hat{\theta}) = \alpha_n(x, \hat{\theta}), \quad (3)$$

上面的 $\alpha_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ 称为虚拟控制。

自适应控制器设计过程如下:

第1步 由于要考虑到参数误差对系统的影响,所以选择

$$V_1 = \frac{z_1^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2}, \quad (4)$$

作为本节用到的 Lyapunov 函数。

该函数对 t 求导,不难得到:

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 + \tilde{\theta} \dot{\theta} = z_1 z_2 + z_1 \alpha_1 + \theta z_1 f_1 - \tilde{\theta} \dot{\theta}, \quad (5)$$

其中

$$\theta z_1 f_1 = (\tilde{\theta} + \hat{\theta}) \cdot z_1 f_1 = \tilde{\theta} z_1 f_1 + \hat{\theta} z_1 f_1, \quad (6)$$

所以由式(5)、(6)可以得到 $\dot{V}_1 = z_1 z_2 + z_1 \alpha_1 + \hat{\theta} \cdot z_1 f_1 + \tilde{\theta} z_1 f_1 - \tilde{\theta} \dot{\theta}$, 从而

$$\dot{V}_1 = z_1 z_2 - z_1^2 + z_1 \cdot (\alpha_1 + z_1 + \theta f_1) + \tilde{\theta} \cdot (z_1 f_1 - \dot{\theta}), \quad (7)$$

此处,引入调节函数 $\tau_1(x_1) = z_1 f_1 \triangleq z_1 \delta_1$, 进一步引入第1个虚拟控制

$$\alpha_1(x_1, \hat{\theta}) = -z_1 - \tilde{\theta} \delta_1. \quad (8)$$

注1 通过引入调节函数和虚拟控制的递推构造,有效避免了传统反步法中常见的过参数化问题,显著降低了控制器结构的复杂性;通过在虚拟控制器 α_i 中引入调节函数 τ_i 的递推更新机制,使每一级虚拟控制均累积历史误差信息,为 Lyapunov 函数导数的积分有界性提供有力支撑。

式(7)化为

$$\dot{V}_1 = -z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta} \cdot (\tau_1 - \dot{\theta}). \quad (9)$$

如果研究对象系统是一个一阶非线性系统,那么有 $z_2 = 0$, 由(9)可知: $\dot{V}_1 = -z_1^2 + \tilde{\theta} \cdot (\tau_1 - \dot{\theta})$, 同时,选择自适应律为 $\dot{\theta} = \tau_1$, 则 $\dot{V}_1 = -z_1^2 \leq 0$, 利用前文中提到的 Barbalat 引理,可以证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = 0$ (详细证明见第3节),但研究的非线性系统(1)显然不是一阶的,所以要继续进行控制器的设计,证明 $\dot{V}_n \leq 0$, 继而得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_n(t) = 0$, 完成一系列相关分析与证明。

在接下来的步骤中,将遵循以下技巧:

(1) 为了避免过参数化现象^[26],对第1步中给出的调节函数 τ_1 进行修正,将原来的 τ_1 转化为 τ_2 , 从而用参数估计替代难以处理的未知参数。

(2) 在该步骤中, $\hat{\theta}$ 的最终表达式并没有被确定, 采用“新引入的调节函数 τ_2 代替 $\hat{\theta}$ ”的方法进行处理。

比如在第 2 步中(将 $i=2$ 代入到下文第 i 步中可得), 不能把虚拟控制 α_1 求导产生的项 $\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}$ 进行简单

运算, 而是对其进行如下处理: $\alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) = -z_1 - z_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \hat{\theta} \delta_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}$ 。

(3) 按上述方式以此类推, 完成剩余步骤。

第 i 步 选择

$$V_i = V_{i-1} + \frac{z_i^2}{2}, (4 \leq i \leq n-1), \quad (10)$$

对 V_i 进行求导 $\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + z_i \dot{z}_i$, 遵循第 1 步中给出的技巧,

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & - \sum_{p=1}^i z_p^2 + z_i z_{i+1} + z_i \cdot (\alpha_i + z_{i-1} + z_i - \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_p} x_{p+1} + \hat{\theta} \delta_i - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_i - \sum_{p=1}^{i-1} z_{p+1} \frac{\partial \alpha_p}{\partial \hat{\theta}} \delta_i) + \\ & \tilde{\theta}(\tau_i - \dot{\hat{\theta}}) - \sum_{p=2}^i z_p \frac{\partial \alpha_{p-1}}{\partial \hat{\theta}} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_i), \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$\begin{cases} \delta_i = f_n - \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_p} f_p, \\ \tau_i = \sum_{p=1}^i z_p \delta_p, \end{cases}$$

此处的 τ_i 是引入的第 i 个调节函数。

可以得到虚拟控制

$$\alpha_i = -z_{i-1} - z_i + \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_p} x_{p+1} - \hat{\theta} \delta_i + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_i + \sum_{p=1}^{i-1} z_{p+1} \frac{\partial \alpha_{p-1}}{\partial \hat{\theta}} \delta_i, \quad (12)$$

将式(12)代入式(11), 整理可得

$$\dot{V}_i = - \sum_{p=1}^i z_p^2 + z_i z_{i+1} + \tilde{\theta}(\tau_i - \dot{\hat{\theta}}) - \sum_{p=2}^i z_p \frac{\partial \alpha_{p-1}}{\partial \hat{\theta}} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_i)。$$

第 n 步 选择

$$V_n = V_{n-1} + \frac{z_n^2}{2}, \quad (13)$$

对 V_n 进行求导 $\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + z_n \dot{z}_n$, 类似地可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & - \sum_{p=1}^{n-1} z_p^2 + z_n \cdot (u + z_{n-1} + z_n - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_p} x_{p+1} + \hat{\theta} \delta_n - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_n - \sum_{p=1}^{n-1} z_{p+1} \frac{\partial \alpha_p}{\partial \hat{\theta}} \delta_n) + \\ & \tilde{\theta}(\tau_n - \dot{\hat{\theta}}) - \sum_{p=2}^n z_p \frac{\partial \alpha_{p-1}}{\partial \hat{\theta}} (\dot{\hat{\theta}} - \tau_n), \end{aligned} \quad (14)$$

式中

$$\begin{cases} \delta_n = f_n - \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_p} f_p, \\ \dot{\hat{\theta}} = \tau_n = \sum_{p=1}^n z_p \delta_p, \end{cases}$$

此处的 τ_n 是引入的第 n 个调节函数。

最终可以得到虚拟控制

$$u(x, \hat{\theta}) = -z_{n-1} - z_n + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_p} x_{p+1} - \hat{\theta} \delta_n + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_n + \sum_{p=3}^n z_{p-1} \frac{\partial \alpha_{p-2}}{\partial \hat{\theta}} \delta_n, \quad (15)$$

将式(15)代入式(14),整理可得

$$\dot{V}_n = - \sum_{p=1}^i z_p^2 \leq 0. \quad (16)$$

式(15)中的 $u(x, \hat{\theta})$ 是关于参数估计 $\hat{\theta}$ 和系统状态 x 的函数,所以将(15)称为状态反馈自适应控制器。在这一步骤中,关于参数处理等问题的具体技巧采取了和前几步同样的方法,即对 τ_i 进行修正,令 $\tau_i = \tau_{i+1} - z_{i+1} \delta_{i+1}, (1 \leq i \leq n-1)$ 。

注2 采用在线参数估计机制,增强了控制器在实际系统中的适用性,并且控制器形式简洁,易于实现,适用于一类甚至多类具有未知参数的非线性系统,具有良好的应用前景。

3 稳定性分析

现在对状态反馈自适应控制器(15)进行稳定性分析。

首先证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ 。

第一步:由式(4)、(10)、(13)可得 $V_n = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n z_p^2 + \tilde{\theta}^2 \leq V_n(0) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n z_p^2(0) = a < \infty, \dot{V}_n = - \sum_{p=1}^i z_p^2 \leq 0$, 其中 a 是一个常数。再结合式(12)可知, $V_n(t)$ 是单调递减的。

根据不等式的基本性质可以得到

$$\begin{cases} |z_i(t)| \leq \sqrt{2V_n(0)} < \infty, 1 \leq i \leq n, \\ |\tilde{\theta}(t)| \leq \sqrt{2V_n(0)} < \infty, \end{cases}$$

从而有 $\tilde{\theta} \in L_\infty, z_i \in L_\infty (1 \leq i \leq n)$ 。

由式(2)以及引理4不难得到 $|\dot{\theta}(t)| = |\theta - \tilde{\theta}(t)| \leq |\theta| + |\tilde{\theta}(t)| \leq |\theta| + \sqrt{2V_n(0)} < \infty$, 因此 $\dot{\theta} \in L_\infty$ 。

第二步: $V_n(t) \geq 0$, 对(16)作 $t \in [0, \infty]$ 的积分,由引理5,有 $\sum_{p=1}^n \int_0^\infty z_p^2(t) dt = V_n(0) - V_n(\infty) \leq V_n(0) < \infty$, 因此 $z_i \in L_2, (1 \leq i \leq n)$ 。由式(3)可知 $x_1 \in L_\infty$, 又 f_1 是关于 x_2 的光滑函数,所以 $f_1 \in L_\infty$ 。

将式(8)代入到式(3)可得 $|x_2(t)| = |z_2(t) + \alpha_1(x_1(t), \hat{\theta}(t))| = |z_2(t) - z_1(t) - \hat{\theta}(t)f_1(x_1(t))|$, 再由引理4可得 $|x_2(t)| \leq |z_2(t)| + |z_1(t)| + |\hat{\theta}(t)| \cdot |f_1(x_1(t))|$ 。

同理可得 $|\dot{x}_1(t)| \leq |x_2(t)| + |\theta| \cdot |f_1(x_1(t))|$, 再根据 $z_1 \in L_\infty, z_2 \in L_\infty, \hat{\theta} \in L_\infty$, 易知 $x_2 \in L_\infty, \dot{x}_1 \in L_\infty$ 。

由于 α_2 是关于变量 $x_1, x_2, \hat{\theta}$ 的连续可微函数,同时 $x_1, x_2, \hat{\theta}$ 都是有界的,所以 $\alpha_2 \in L_\infty$, 也就有 $x_3 \in L_\infty$, 可知 $\dot{x}_2 \in L_\infty$ 。

类似可得 $u \in L_\infty, \dot{x}_i \in L_\infty, (1 \leq i \leq n)$ 。值得注意的是,要先证明 $u \in L_\infty$, 再去证明 $\dot{x}_n \in L_\infty$ 。这样的证明顺序取决于该状态反馈自适应控制的设计过程中相关量的定义顺序。

第三步:由前两步证明可知 $x_1 \in L_\infty \cap L_2, \dot{x}_1 \in L_\infty$, 并由 Barbalat 引理可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ 。

注3 通过结合 Barbalat 引理与 Lyapunov 方法,放宽了对 Lyapunov 函数导数严格负定的要求,拓展了稳定性分析的途径。

再证 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 (1 \leq i \leq n)$ 。

已知 f_1 光滑且 $f_1(0) = 0$, 由引理3可以得到 $f_1(x_1) = f_1(0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi_1)x_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi_1)x_1, \xi_1 \in (0, x_1)$, 由于 $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi_1)$ 依旧是一个光滑函数,并且 $|\xi_1| \leq |x_1| \leq \sqrt{2V_n(0)}$, 据此由引理2可知:存在有限

正数 M_1 , 使得 $\left| \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi_1) \right| \leq M_1$ 。此处, 我们定义函数 $N_1 \triangleq |\theta| + \sqrt{2V_n(0)}$, 有 $|\dot{\theta}(t)| \leq N_1$, 所以有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \alpha_1^2(t) dt &= \int_0^\infty (-z_1(t) - \dot{\theta}(t)f_1(x_1(t)))^2 dt \\ &\leq \int_0^\infty 2(z_1^2(t) + \dot{\theta}^2(t)f_1^2(x_1(t))) dt \\ &= 2(1 + M_1^2 N_1^2) \int_0^\infty z_1^2(t) dt < \infty, \end{aligned}$$

因此 $\alpha_1 \in L_2$ 。又由 $z_2 \in L_2$ 可知 $\int_0^\infty x_2^2(t) dt = \int_0^\infty (z_2(t) + \alpha_1(t))^2 dt \leq \int_0^\infty (z_2^2(t) + \alpha_1^2(t)) dt < \infty$, 从而有 $x_2 \in L_2$ 。

由上述证明可得: $x_2 \in L_\infty \cap L_2, \dot{x}_2 \in L_\infty$, 再由 Barbalat 引理可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$ 。

以此类推, 通过同样的循环步骤, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ (状态收敛至平衡点)。至此, 完成稳定性分析。

注 4 最终证明了系统输出跟踪误差和状态变量均能渐近收敛至零, 确保了闭环系统的全局一致最终有界性。同时, 该分析方法不仅适用于本文所研究的系统结构, 还可推广至更广泛的非线性系统类, 如其它高阶系统、多输入多输出系统等, 具有较强的理论通用性和实际指导意义。

4 仿真

接下来, 通过数值仿真的具体例子来验证上文提出的方法的可行性。

例 1 考虑如下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \theta \cdot x_1 \sin 2x_1, \\ \dot{x}_2 = u - \theta \cdot x_1 x_2, \end{cases}$$

已知系统的输出为 $y = x_1$, 给定跟踪信号 $y_r(t) = \cos 4t$ 。设计控制 u , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0$ 。给出状态反馈自适应控制器 $u = -z_2 + 2\hat{\theta} \cdot (x_1 x_2 + 1 + \hat{\theta} \cdot (\sin 2x_1 + 2x_1 \cos 2x_1) \cdot x_1 \sin 2x_1) - 1 - \hat{\theta} \cdot (\sin 2x_1 + 2x_1 \cos 2x_1) \cdot x_2 + x_1 x_2 \sin 2x_1$, 式中 $\hat{\theta} = z_1 x_1 \sin 2x_1 - z_2 (x_1 x_2 - (-1 - \hat{\theta}(\sin 2x_1 + 2x_1 \cos 2x_1) \cdot x_1 \sin 2x_1))$ 。设置参数 $\theta = 1$, 初始状态 $x_0 = [0; 0]$, 时间范围 $[0, 20]$ 。

如图 1 所示, 系统输出 $y = x_1$ 逐渐跟踪参考信号 y_r , 这表明所设计的控制器能实现预期跟踪目标。此外, 由图 2 可知, 状态变量 x_1 和 x_2 随时间收敛至平衡点, 验证了控制器在保证输出跟踪的同时实现了内部状态的镇定。仿真结果证明控制器能同时满足跟踪性能和镇定需求, 表明了该方法的正确性和可行性。

例 2 考虑如下非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \theta \cdot \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = x_3 + \theta \cdot x_1 \sin x_2, \\ \dot{x}_3 = u + \theta \cdot (x_1 x_2 - \sin x_3), \end{cases}$$

已知系统输出为 $y = x_1$, 给定跟踪信号 $y_r(t) = \sin t$ 。设计控制 u , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0$ 。

给出以下状态反馈自适应控制器

$$\begin{aligned} u &= -(x_1 + x_2 + \hat{\theta} \sin x_1) - (x_3 - \alpha_2) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 - \\ &\quad \hat{\theta} \delta_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \tau_3 - (x_1 + x_2 + \hat{\theta} \sin x_1) \sin x_1 \delta_3, \end{aligned}$$

式中 $\hat{\theta} = x_1 \sin x_1 + x_1 x_2 \sin x_2 + x_1^2 \sin x_2 + \hat{\theta} x_1 \sin x_1 \sin x_2 + x_3 (x_1 x_2 - \sin x_3) - \alpha_2 (x_1 x_2 - \sin x_3)$,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -(x_1 + x_2 + \hat{\theta} \sin x_1) + (-1 - \hat{\theta} \cos x_1) \cdot x_2 - \hat{\theta} \cdot (x_1 \sin x_2 + \sin x_1 + \hat{\theta} \sin x_1 \cos x_1) - \\ &\quad (x_1 \sin x_1 + (x_1 + x_2 + \hat{\theta} \sin x_1) \cdot x_1 \sin x_2) \cdot \sin x_1 - x_1, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} = -2\sin x_1 - x_2 \cos x_1 - x_1 \sin x_2 - \hat{\theta} \sin 2x_1 - x_1 \sin^2 x_1 \sin x_2,$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} = -2 - 2\hat{\theta} \cos x_1 + 2x_2 \hat{\theta} \sin x_1 - \hat{\theta} \sin x_2 - \sin^2 x_1 - x_1 \sin 2x_1 - \hat{\theta} \sin^2 x_1 \sin x_2 +$$

$$(-2x_1 - x_2 - 2\hat{\theta} x_1 \cos x_1) \cdot \sin x_1 \sin x_2 - (x_1 x_2 + x_1^2) \cdot \sin x_2 \cos x_1 - (\cos^2 x_1 - \sin^2 x_1) \cdot \hat{\theta}^2,$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} = -2 - \hat{\theta} \cos x_1 + \cos x_2 (-\hat{\theta} x_1 - x_1 \sin x_1 - x_1 x_2 \sin x_1 - x_1^2 \sin x_1 - \hat{\theta} x_1 \sin^2 x_1).$$

设置参数 $\theta = 0.5$, 初始状态 $x_0 = [0; 0]$, 时间范围 $[0, 20]$ 。

如图3所示, 系统输出 $y = x_1$ 逐渐跟踪参考信号 y_r , 这表明所设计的控制器能实现预期跟踪目标。此外, 据图4可知, 状态变量 x_1 和 x_2 随时间收敛至平衡点, 验证了控制器在保证输出跟踪的同时实现了内部状态的镇定。仿真结果证明了该方法的正确性和可行性。

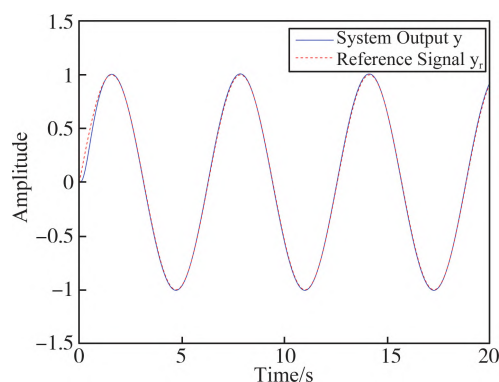


图1 y 与 y_1 的轨迹

Fig. 1 The trajectory of y and y_1

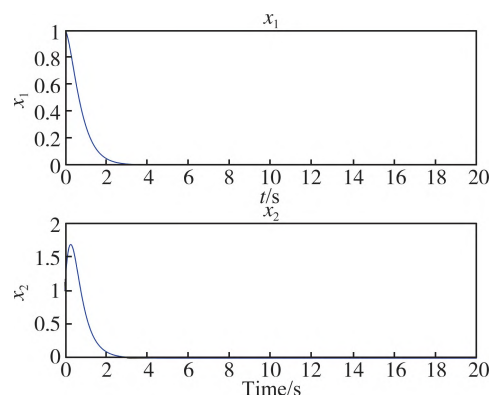


图2 x_1 与 x_2 的轨迹

Fig. 2 The trajectory of x_1 and x_2

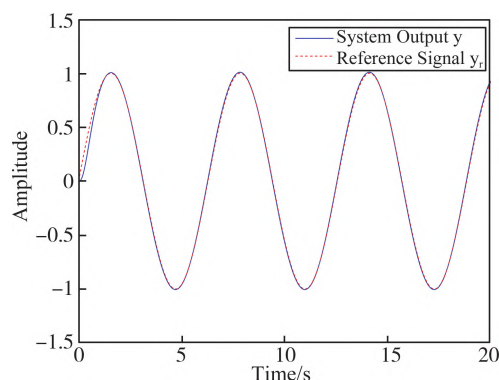


图3 y 与 y_1 的轨迹

Fig. 3 The trajectory of y and y_1

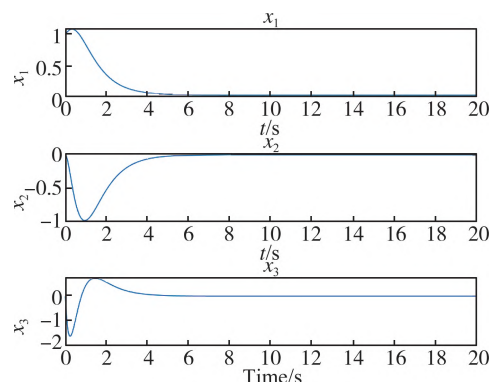


图4 x_1 与 x_2 的轨迹

Fig. 4 The trajectory of x_1 and x_2

例3 考虑单连杆机械臂动力学方程(含未知参数)

$$\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + mgl \sin \mathbf{q} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}(t),$$

式中 $q, \dot{q}, \ddot{q}$ 依次为关节角度、角速度、角加速度; $\mathbf{J}$ 为转动惯量(未知); $\mathbf{B}$ 为阻尼系数(未知); $mgl \sin q$ 为重力矩; $\boldsymbol{\tau}$ 为控制输入; $\mathbf{d}(t)$ 为外部扰动(如 $\mathbf{d}(t) = 0.1 \sin(2t)$)。将单连杆机械臂动力学方程改写为下述非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{B}x_2 - mgl \sin x_1) + \mathbf{d}(t), \\ y = x_1, \end{cases}$$

设为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) = x_2, \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + \theta_1 \tau + d(t), \\ y = x_1, \end{cases}$$

式中 $f_2(x) = -\frac{1}{J}(Bx_2 + mgl \sin x_1) = -\theta_2 x_2 - \theta_3 \sin x_1$, $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$ 为状态变量; $\theta = [\frac{1}{J}, \frac{B}{J}, \frac{mgl}{J}]^T$ 为未知参数向量(即 θ 通过系数 $\frac{1}{J}, \frac{B}{J}, \frac{mgl}{J}$ 隐含在 $\dot{x}_2$ 的表达式中, 仅 θ 整体未知, 不需再单独识别 J, B, mgl); $d(t)$ 为扰动(假设 $|d(t)| \leq \bar{d}$); 非线性项 $f(x) = [x_2, -\frac{1}{J}(Bx_2 + mgl \sin x_1)]^T$ 是“光滑函数”(即 $f(x)$ 对应状态导数中只由状态 x 决定的非线性部分, 也即 $\dot{x}_1 = x_2$ 和 $\dot{x}_2$ 中不含 τ 和 $d(t)$ 的部分)。给定跟踪信号 $y_d(t) = \sin t$, 设计 τ 以使 $y(t) \rightarrow y_d(t)$ 。给出如下状态反馈自适应控制器

$$\begin{cases} \tau = \hat{J}(\dot{\alpha}_1 - c_2 z_2 - z_1) + \hat{B}x_2 + mgl \sin x_1, \\ \dot{\hat{\theta}} = \Gamma \varphi z_2, \varphi = [\dot{\alpha}_1 - c_2 z_2 - z_1, -x_2, -\sin x_1]^T, \end{cases}$$

此处引入了增益项 c_1, c_2 , 用于调节误差动态的收敛速率, 其中 $c_1 = 10, c_2 = 5$ 。选择系统参数 $J = 2, B = 0.5, mgl = 1$, 初始状态 $x_0 = [0; 0]$, 时间范围 $[0, 20]$ 。

如图 5、6 所示, 在系统存在模型不确定性和外部扰动的情况下, 仍能借助所设计的控制器实现精确的轨迹跟踪和快速的误差收敛, 如图 7、8 所示, 误差在 2 秒内衰减至可接受范围, 且误差大小随时间的正向变化递减。上述仿真结果清晰地表明, 所设计的控制器能有效镇定系统, 证明了所提方法在实际应用中的可行性。

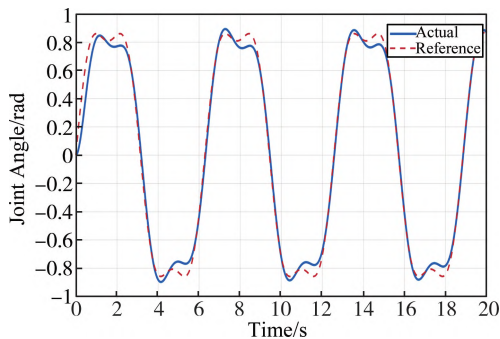


图 5 轨迹跟踪性能

Fig. 5 Trajectory tracking performance

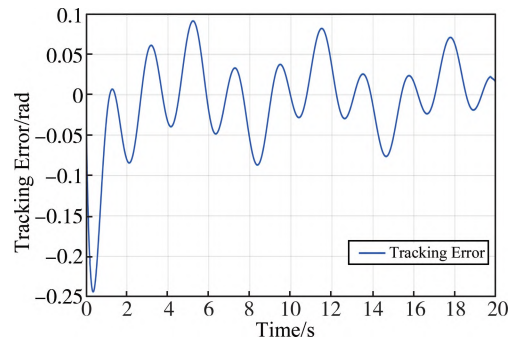


图 6 跟踪误差

Fig. 6 Tracking error

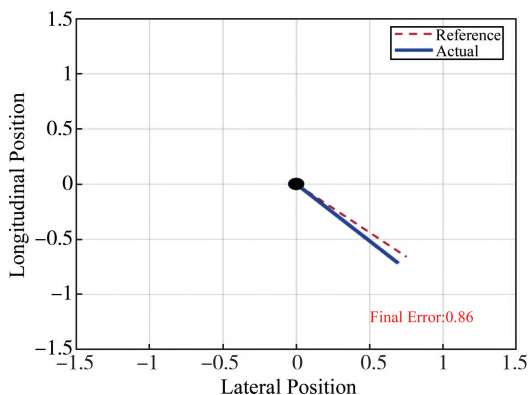


图 7 $t=2$ 时期望位置和实际位置对比

Fig. 7 Comparison of Desired and Actual Positions at $t=2$

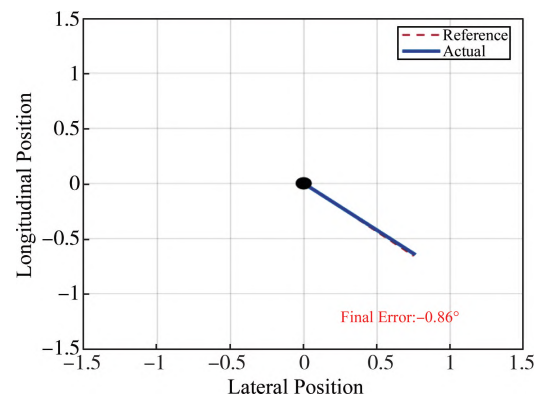


图 8 $t=20$ 时期望位置和实际位置对比

Fig. 8 Comparison of Desired and Actual Positions at $t=20$

5 结论

本文基于 Barbalat 引理研究了一类含未知参数的非线性系统的自适应控制问题。在非线系统含有未知参数的情况下,所设计的控制器不仅有效保证了系统输出有效跟踪给定信号,状态变量稳定收敛至平衡点,而且大大降低了 Lyapunov 函数的构造难度,在很大程度上降低了控制设计的复杂性,为含参数未知的非线性系统自适应控制与稳定性分析提供了新的强力工具。

参 考 文 献

- [1] YANG J Z, PENG H J, WU S N, et al. A combined kinodynamic motion planning method for multisegment continuum manipulators in confined spaces[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(4):2721-2744.
- [2] 刘科力, 孙宗耀, 李娇娇, 等. 单连杆机械臂多智能体系统的鲁棒自适应容错一致性跟踪控制[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2025, 38(6):823-830.
- [3] 谈竹奎, 文贤旭, 杨涛, 等. 面向新型电力系统的双馈风力发电机并网控制策略研究[J]. *电力系统保护与控制*, 2023, 51(3): 181-187.
- [4] HU Z Y, GAO B T, MAO Y H. Nonlinear model predictive control-based active power dispatch strategy for wind power plant considering dynamic wake effect[J]. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2023, 148:108996.
- [5] WU Y, XIE X J. Stabilisation of high-order nonlinear systems with full-state constraints and input saturation[J]. *International Journal of Control*, 2021, 94(4):999-1009.
- [6] Motamedi M A. *Nonlinear Vibration Analysis of Cracks in Aerospace Structures*[D]. Tehran: Iran University of Science and Technology, 2019.
- [7] WANG X D, SONG C Q. Analysis on nonlinear dynamic characteristic of synchronous generator rotor system[J]. *Complexity*, 2019(1): 3603172.
- [8] KRSTIĆ M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIĆ P. *Nonlinear and adaptive control design*[M]. New York: Wiley, 1995.
- [9] LI Y, ZHANG J H, YE X Y, et al. Adaptive fixed-time control of strict-feedback high-order nonlinear systems[J]. *Entropy*, 2021, 23(8):963.
- [10] QIN X Y. The adaptive neural control for a class of high - order uncertain stochastic nonlinear systems[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018(1):4620125.
- [11] IMRAN I H, CAN A, STOLKIN R, et al. Real-time nonlinear parameter estimation and tracking control of unmanned aerial vehicles in closed-loop[J]. *Scientific Reports*, 2023, 13(1):3125.
- [12] 周绍生. 应用反推技术设计 H_∞ 及自适应控制系统的研究[D]. 南京:东南大学, 2001.
- [13] 郭腾念. 一类随机非线性系统的自适应有限时间镇定[J]. *应用数学进展*, 2025, 14(4): 427-436.
- [14] 孙强和, 童止戈. 一种改进的非线性 MIMO 系统鲁棒自适应反推控制[J]. *电光与控制*, 2012, 19(1):61-65.
- [15] 俞沛宙, 王澍, 杨继辉, 等. 基于灰狼优化的永磁同步电机自适应反推鲁棒控制策略[J]. *电力系统保护与控制*, 2021, 49(2): 39-46.
- [16] 梁志鸿, 丁三波, 解相朋. 基于事件驱动间歇控制的离散复杂网络有限时间同步[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2023, 36(1):1-10+31.
- [17] JU P L, JU Y F, SONG J C Fuzzy adaptive asymptotic control for a class of large-scale high-order unknown nonlinear systems[J]. *Applied Sciences*, 2023, 13(15):8968.
- [18] 刘玉发, 刘勇华, 苏春翌, 等. 一类具有未知幂次的高阶不确定非线性系统的自适应控制[J]. *自动化学报*, 2022, 48(8):2018-2027.
- [19] NAEIJIAN M, KHOSRAVI A. Stability analysis of model reference adaptive control with the new theorem of stability[C]//Proceedings of 28th Iranian Conference on Electrical Engineering IEEE, 2020:1-6.
- [20] 程玉娟, 俞辉. 多智能体切换网络自适应组一致性[J]. *计算机工程与应用*, 2017, 53(11):50-55+84.
- [21] KRSTIĆ M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIĆ P V. Adaptive nonlinear control without overparametrization[J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(3):177-185.
- [22] HARA T, YONEYAMA T, SAITOH S, et al. Relation between ultimate boundedness and radially unbounded Liapunov function[J]. *Nonlinear Analysis*, 1986, 10(5):471-482.
- [23] 闵颖颖, 刘允刚. Barbalat 引理及其在系统稳定性分析中的应用[J]. *山东大学学报(工学版)*, 2007, 37(1): 51-55.
- [24] 郑敏. 试论单调有界定理及其应用[J]. *时代教育(教育教学)*, 2012(9):277.
- [25] 李海霞, 聂东明, 王兴龙. 拉格朗日中值定理的推广和应用[J]. *钦州学院学报*, 2016, 31(7):42-44.
- [26] LARROCCA M, JU N, GARCÍA-MARTÍN D, et al. Theory of overparametrization in quantum neural networks[J]. *Nature Computational Science*, 2023, 3(6):542-551.

(责任编辑:刘庆松)