

引用:张美萍,张凤霞.模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子的统一框架[J].聊城大学学报(自然科学版),2026,39(3):346-356.

Citation:ZHANG Meiping, ZHANG Fengxia. A unified framework of fuzzy Sheffer stroke operation and fuzzy Peirce arrow operation[J]. Journal of Liaocheng University (National Science Edition), 2026,39(3):346-356.

文章编号 1672-6634(2026)03-0346-11

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2025090002

模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子的统一框架

张美萍,张凤霞

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘要 模糊逻辑算子在模糊控制中起着非常关键的作用。本文旨在提出模糊 Peirce arrow 算子的定义,并将模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子纳入到一个统一的框架中,即定义 HP 算子,进一步分析 HP 算子的结构,讨论其与模糊弱 HP 算子、模糊 Sheffer stroke 算子以及模糊 Peirce arrow 算子之间的关系,构造和刻画非平凡 HP 算子。最后,在某些非平凡 HP 算子集上提出两种特殊的运算,通过这两种运算可分别构成半群和可交换么半群。

关键词 模糊 Sheffer stroke 算子;模糊 Peirce arrow 算子;HP 算子

中图分类号 O142

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



A unified framework of fuzzy Sheffer stroke operation and fuzzy Peirce arrow operation

ZHANG Meiping, ZHANG Fengxia

(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract Fuzzy logic operations play a crucial role in fuzzy control. This paper aims to define the fuzzy Peirce arrow operation, and incorporate the fuzzy Sheffer stroke operation and the fuzzy Peirce arrow operation into a unified framework, namely defining the HP operation. It will further analyze the structure of the HP operation, discuss its relationships with the fuzzy weak HP operation, the fuzzy Sheffer stroke operation and the fuzzy Peirce arrow operation, as well as construct and characterize the non-trivial HP operation. Finally, two special operations are proposed on certain non-trivial HP operation sets, through which a semigroup and a commutative monoid can be obtained, respectively.

Keywords fuzzy Sheffer stroke operation; fuzzy Peirce arrow operation; HP operation

0 引言

模糊控制作为模糊逻辑在控制领域的核心应用方向,与依赖精确数学模型的传统控制方法之间存在显著差异——其核心优势在于构建控制器时可直接融入人类启发式经验知识,为解决控制过程中的不确定性

收稿日期:2025-09-04

基金项目:国家自然科学基金项目(12171220)资助

通信作者:张凤霞,女,汉族,博士,教授,研究方向:不确定性推理、非经典数理逻辑和聚合函数, E-mail: fengxiazhang@163.com。

问题提供了有效途径。这一技术最初由 Zadeh^[1]和 Mamdani^[2]奠定理论基础,凭借对系统模型不确定性、非线性及复杂性的强适应性,在过去数十年间已成功渗透至工业控制、机器人控制、交通系统等众多关键领域^[3-8],成为复杂系统控制研究中的重要分支。

模糊控制理论的发展与模糊逻辑算子的研究密不可分,三角模、三角余模、一致模、零模及模糊蕴涵等逻辑算子^[9-11]共同构成了模糊推理与控制决策的数学基础。近年来,新型模糊逻辑算子的探索成为该领域的研究热点;2021年,Baczyński 等人^[12]提出了一类新型模糊逻辑算子—模糊 Sheffer stroke 算子,并证明模糊 Sheffer stroke 算子可以用来定义模糊补、合取连接词、析取连接词和模糊蕴涵等模糊逻辑连接词,同时,在一定条件下,它还可以生成三角模和三角余模。2022年,Wang 和 Hu^[13]进一步拓展这一研究,提出了模糊 Sheffer stroke 算子序和的概念,系统构建了该算子的构造方法并分析了该算子的一些相关性质。2024年,Zhao 和 Liu^[14-15]基于方向单调性研究了 r -Sheffer stroke 算子和区间 r -Sheffer stroke 算子,推动了模糊 Sheffer stroke 算子理论的深化。值得注意的是,在经典逻辑体系中,Sheffer stroke 算子与 Peirce arrow 算子存在对偶关系,这一对偶性为逻辑算子的拓展研究提供了重要启发。然而,当前模糊逻辑算子的研究中存在明显空白,尽管模糊 Sheffer stroke 算子已取得丰富成果,但模糊 Peirce arrow 算子的概念尚未被提出,其与模糊 Sheffer stroke 算子的对偶关系及其相关性质等缺乏系统研究。

针对上述研究现状,本文围绕模糊 Peirce arrow 算子及新型统一算子展开研究,主要创新点如下:

(1) 填补概念:提出模糊 Peirce arrow 算子的定义,完善模糊逻辑算子的对偶体系,建立与经典 Peirce arrow 算子的理论衔接;

(2) 构建统一框架:受文献^[16-17]中算子统一思想启发,提出新型模糊逻辑算子-HP 算子,将模糊 Sheffer stroke 算子与模糊 Peirce arrow 算子纳入同一理论框架,揭示三者间的内在关联,并进一步分析 HP 算子与模糊弱 HP 算子的逻辑关系;

(3) 深化构造与刻画:系统研究非平凡 HP 算子的构造方法,通过严格的数学推导刻画其关键特征,为后续算子的实际应用提供构造依据;

(4) 探索代数结构:针对特定类型的非平凡 HP 算子集,分析其代数性质,构建相应的代数结构,为模糊逻辑代数理论的拓展提供新的研究对象。

1 预备知识

本节将主要介绍模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子的相关概念。

定义 1^[12] 二元函数 $H[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 被称为模糊 Sheffer stroke 算子,如果对于任意的 $x, y, z \in [0, 1]$, H 满足以下条件:

(H1) 对于任意的 $x \leq y$, 有 $H(x, z) \geq H(y, z)$;

(H2) 对于任意的 $y \leq z$, 有 $H(x, y) \geq H(x, z)$;

(H3) $H(0, 1) = H(1, 0) = 1$ 且 $H(1, 1) = 0$ 。

模糊 Sheffer stroke 算子 H 满足左边界和下边界条件,即:对于任意 $x, y \in [0, 1]$, 有 $H(0, y) = H(x, 0) = 1$ 。

定义 2 二元函数 $P[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 被称为模糊 Peirce arrow 算子,如果对于任意的 $x, y, z \in [0, 1]$, P 满足以下条件:

(P1) 对于任意的 $x \leq y$, 有 $P(x, z) \geq P(y, z)$;

(P2) 对于任意的 $y \leq z$, 有 $P(x, y) \geq P(x, z)$;

(P3) $P(0, 1) = P(1, 0) = 0$ 且 $P(0, 0) = 1$ 。

模糊 Peirce arrow 算子 P 满足右边界和上边界条件,即:对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 有 $P(1, y) = P(x, 1) = 0$ 。

命题 1 二元函数 $P[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是模糊 Peirce arrow 算子当且仅当存在模糊 Sheffer stroke 算子 H , 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 使得

$$P(x, y) = 1 - H(1 - x, 1 - y). \quad (1)$$

证明 如果 H 是模糊 Sheffer stroke 算子, 显然, 由等式(1)定义的 P 算子满足定义 2 中的 $(P1) \sim (P3)$, 是模糊 Peirce arrow 算子。反之, 如果 P 是模糊 Peirce arrow 算子, 则定义函数 $H: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 为

$$H(x, y) = 1 - P(1 - x, 1 - y). \quad (2)$$

显然, 由等式(2)定义的算子 H 满足定义 1 中的 $(H1) \sim (H3)$, 是模糊 Sheffer stroke 算子。

根据以上命题可以看出, 模糊 Sheffer stroke 算子 H 与模糊 Peirce arrow 算子 P 之间存在对偶关系。通过放宽模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子的边界条件, 能够得到一个范围更广的算子, 即以下定义的模糊弱 HP 算子。

定义 3 二元函数 $W: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 被称为模糊弱 HP 算子, 若对于任意的 $x, y, z \in [0, 1]$, W 满足以下条件:

(W1) 对于任意的 $x \leq y$, 有 $W(x, z) \geq W(y, z)$;

(W2) 对于任意的 $y \leq z$, 有 $W(x, y) \geq W(x, z)$;

(W3) $W(1, 1) = 0$ 且 $W(0, 0) = 1$ 。

显然, 当 $W(0, 1) = W(1, 0) = 1$ 时, 模糊弱 HP 算子 W 就是模糊 Sheffer stroke 算子; 当 $W(0, 1) = W(1, 0) = 0$ 时, 模糊弱 HP 算子 W 就是模糊 Peirce arrow 算子。

定义 4 称既不是模糊 Sheffer stroke 算子也不是模糊 Peirce arrow 算子的模糊弱 HP 算子为真模糊弱 HP 算子。

2 HP 算子

上一节的最后, 通过弱化模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子的边界条件得到了模糊弱 HP 算子, 那么能否通过统一模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子的边界条件得到更为广泛的算子呢? 为了解决这一问题, 在本节中首先提出 HP 算子的概念, 即模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子的统一形式。其次, 详细讨论 HP 算子的结构。最后, 分析 HP 算子与其相关算子之间的关系。

2.1 HP 算子的定义和结构

定义 5 任取 $a, b \in [0, 1]$ 且 $a \neq b$, 称二元函数 $V_{ab}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 为 HP 算子, 如果对于任意的 $x, y, z \in [0, 1]$, V_{ab} 满足以下条件:

(V1) 对于任意的 $x \leq y$, 有 $V_{ab}(x, z) \geq V_{ab}(y, z)$;

(V2) 对于任意的 $y \leq z$, 有 $V_{ab}(x, y) \geq V_{ab}(x, z)$;

(V3) $V_{ab}(a, y) = V_{ab}(x, a) = b$;

(V4) $V_{ab}(b, b) = a$ 。

此外, 若 HP 算子不是模糊弱 HP 算子, 则称它是真 HP 算子; 若 HP 算子是真模糊弱 HP 算子, 则称它为特殊 HP 算子; 若 $a, b \in (0, 1)$ 且 $a \neq b$, 则称它为非凡 HP 算子, 否则称它为平凡 HP 算子。

注 1 HP 算子与模糊 Sheffer stroke 算子、模糊 Peirce arrow 算子和模糊弱 HP 算子的定义中前两个条件均相同。若 $a = 0$ 且 $b = 1$, 则 HP 算子就转化成了模糊 Sheffer stroke 算子, 若 $a = 1$ 且 $b = 0$, 则 HP 算子就转化成了 Peirce arrow 算子, 即模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子都是平凡 HP 算子。

例 1 取 $0 < a < b < 1$, 则二元函数 $V_{ab}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 如下式:

$$V_{ab}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in [0, a]^2, \\ b, & (x, y) \in [0, a] \times [a, 1] \cup [a, 1] \times [0, a], \\ b - \frac{(x-a)(y-a)}{b-a}, & (x, y) \in [a, b]^2, \\ 0, & (x, y) = (1, 1), \\ a, & \text{其它}, \end{cases}$$

是非凡的特殊 HP 算子。

例2 取 $0 < b < a < 1$, 则二元函数 $V_{ab}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 如下式:

$$V_{ab}(x,y) = \begin{cases} 0, (x,y) \in (a,1]^2, \\ b, (x,y) \in [a,1] \times [0,a] \cup [0,a] \times [a,1], \\ b + \frac{(a-x)(a-y)}{a-b}, (x,y) \in [b,a]^2, \\ a, \text{其它}, \end{cases}$$

是非平凡的真 HP 算子。

由下面的例子可以看出,并不是所有的真模糊弱 HP 算子都是 HP 算子。

例3 设 $h \in (0,1)$, $W: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是由下式给出的二元函数,

$$W(x,y) = \begin{cases} 0, (x,y) \in (h,1]^2, \\ 1, (x,y) \in [0,h]^2, \\ h, \text{其它}. \end{cases}$$

显然, W 是真模糊弱 HP 算子,但不是 HP 算子。

如例1~3所示,所有模糊弱 HP 算子的集合和所有 HP 算子的集合是不同的集合,但它们具有非空交集。因此,在讨论 HP 算子、模糊弱 HP 算子、模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子之间的关系之前,必须先分析 HP 算子的结构。

命题2 设 $V_{ab}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是平凡 HP 算子,则以下条件成立:

(1) 如果 $0 = a < b < 1$, 则对于任意的 $(x,y) \in [b,1]^2$, 有 $V_{ab}(x,y) = 0$; 对于任意的 $(x,y) \in (0,b) \times (0,1] \cup [b,1] \times (0,b)$, 有 $0 \leq V_{ab}(x,y) \leq b$; 对于任意的 $(x,y) \in \{0\} \times [0,1] \cup (0,1] \times \{0\}$, 有 $V_{ab}(x,y) = b$ 。

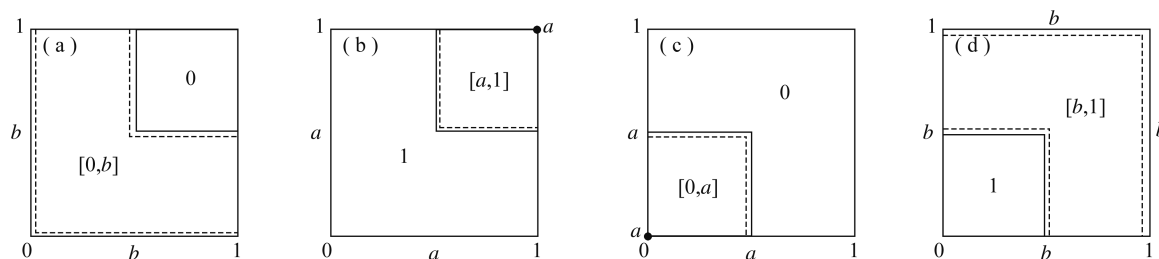
(2) 如果 $0 < a < b = 1$, 则对于任意的 $(x,y) \in (a,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$, 有 $a \leq V_{ab}(x,y) \leq 1$; 对于 $(x,y) = (1,1)$, 有 $V_{ab}(x,y) = a$; 对于任意的 $(x,y) \in [0,a] \times [0,1] \cup (a,1] \times [0,a]$, 有 $V_{ab}(x,y) = 1$ 。

(3) 如果 $0 = b < a < 1$, 则对于任意的 $(x,y) \in [0,a]^2 \setminus \{(0,0)\}$, 有 $0 \leq V_{ab}(x,y) \leq a$; 对于 $(x,y) = (0,0)$, 有 $V_{ab}(x,y) = a$; 对于任意的 $(x,y) \in [a,1] \times [0,1] \cup [0,a] \times [a,1]$, 有 $V_{ab}(x,y) = 0$ 。

(4) 如果 $0 < b < a = 1$, 则对于任意的 $(x,y) \in [0,b]^2$, 有 $V_{ab}(x,y) = 1$; 对于任意的 $(x,y) \in (b,1) \times [0,1] \cup [0,b] \times (b,1)$, 有 $b \leq V_{ab}(x,y) \leq 1$; 对于任意的 $(x,y) \in \{1\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{1\}$, 有 $V_{ab}(x,y) = b$ 。

证明 根据定义5中 HP 算子的单调性及其边界条件性质即可得该结论成立。

图1给出平凡 HP 算子的结构。



注: (a) $0 = a < b < 1$; (b) $0 < a < b = 1$; (c) $0 = b < a < 1$; (d) $0 < b < a = 1$ 。

图1 平凡 HP 算子的结构

Fig. 1 Structures of the trivial HP operators

由图1的结构分析可知以下结论成立。

命题3 HP 算子是模糊 Sheffer stroke 算子(模糊 Peirce arrow 算子)当且仅当 $a = 0$ 且 $b = 1$ ($a = 1$ 且 $b = 0$)。

命题4 设 $V_{ab}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是非平凡 HP 算子,

(1) 如果 $0 < a < b < 1$, 则下述结论成立: 1) 当 $(x,y) \in [a,1] \times [0,a] \cup [0,a] \times [a,1]$ 时, 有

$V_{ab}(x, y) = b$ 。

2) 当 $(x, y) \in [0, a]^2$ 时, $b \leq V_{ab}(x, y) \leq V_{ab}(0, 0)$; 当 $(x, y) \in (a, b) \times (b, 1]$ 时, 有 $V_{ab}(b, 1) \leq V_{ab}(x, y) \leq b$; 当 $(x, y) \in [b, 1]^2$ 时, 有 $V_{ab}(1, 1) \leq V_{ab}(x, y) \leq a$; 当 $(x, y) \in (b, 1] \times (a, b)$ 时, 有 $V_{ab}(1, b) \leq V_{ab}(x, y) \leq b$ 。3) 存在模糊 Sheffer stroke 算子 H , 使得 V_{ab} 在 $[a, b]^2$ 上由以下形式给出

$$V_{ab}(x, y) = a + (b - a)H\left(\frac{x - a}{b - a}, \frac{y - a}{b - a}\right). \quad (3)$$

(2) 如果 $0 < b < a < 1$, 则下述结论成立: 1) 当 $(x, y) \in [0, a] \times [a, 1] \cup [a, 1] \times [0, a]$ 时, 有 $V_{ab}(x, y) = b$ 。

2) 当 $(x, y) \in [0, b]^2$ 时, 有 $a \leq V_{ab}(x, y) \leq V_{ab}(0, 0)$; 当 $(x, y) \in (b, a) \times [0, b)$ 时, 有 $b \leq V_{ab}(x, y) \leq V_{ab}(b, 0)$; 当 $(x, y) \in [0, b) \times (b, a)$ 时, 有 $b \leq V_{ab}(x, y) \leq V_{ab}(0, b)$; 当 $(x, y) \in (a, 1]^2$ 时, 有 $V_{ab}(1, 1) \leq V_{ab}(x, y) \leq b$ 。3) 存在模糊 Peirce arrow 算子 P , 使得 V_{ab} 在 $[b, a]^2$ 上由以下形式给出:

$$V_{ab}(x, y) = b + (a - b)P\left(\frac{x - b}{a - b}, \frac{y - b}{a - b}\right).$$

证 因为(2)的证明过程与(1)相似, 所以在下面的证明中仅证明(1)。

1) 如果 $0 < a < b < 1$, 当 $(x, y) \in [a, 1] \times [0, a]$ 时, 有 $b = V_{ab}(x, a) \leq V_{ab}(x, y) \leq V_{ab}(a, y) = b$, 当 $(x, y) \in [0, a] \times [a, 1]$ 时, 有 $b = V_{ab}(a, y) \leq V_{ab}(x, y) \leq V_{ab}(x, a) = b$, 即当 $(x, y) \in [a, 1] \times [0, a] \cup [0, a] \times [a, 1]$ 时, $V_{ab}(x, y) = b$ 。

2) 由定义 5 得: 当 $(x, y) \in [0, a]^2$ 时, 有 $b = V_{ab}(a, a) \leq V_{ab}(x, y) \leq V_{ab}(0, 0)$; 当 $(x, y) \in (a, b) \times (b, 1]$ 时, 有 $V_{ab}(b, 1) \leq V_{ab}(x, y) \leq V_{ab}(a, y) = b$; 当 $(x, y) \in [b, 1]^2$ 时, 有 $V_{ab}(1, 1) \leq V_{ab}(x, y) \leq V_{ab}(b, b) = a$; 当 $(x, y) \in (b, 1] \times (a, b)$ 时, 有 $V_{ab}(1, b) \leq V_{ab}(x, y) \leq V_{ab}(x, a) = b$ 。

3) 对于任意 $x, y \in [0, 1]$, 定义二元函数 $H: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 如

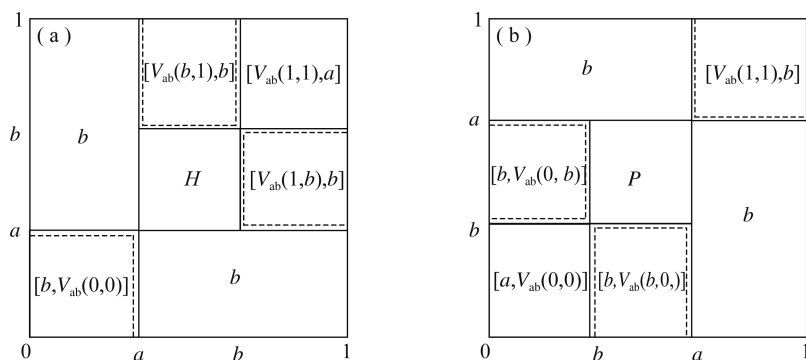
$$H(x, y) = \frac{V_{ab}(a + (b - a)x, a + (b - a)y) - a}{b - a}. \quad (4)$$

显然, H 的定义是良好的, 根据定义 5 中的 (V3) 和 (V4) 易验证等式(4)满足定义 1 中的 (H3), 下面仅需证明 (H1) 和 (H2)。

(H1) 任取 $x_1, x_2, y \in [0, 1]$, 使得 $x_1 \leq x_2$, 则 $a + (b - a)x_1 \leq a + (b - a)x_2$ 。由定义 5 中的 (V1) 得, $V_{ab}(a + (b - a)x_1, a + (b - a)y) \geq V_{ab}(a + (b - a)x_2, a + (b - a)y)$, 不等式两边同时除 $b - a$ 得, $H(x_1, y) \geq H(x_2, y)$ 。

(H2) 该证明过程与 (H1) 相似。最后, 容易验证由等式(4)给出的 $H(x, y)$ 满足等式(3)。

图 2 给出非平凡 HP 算子的结构。



注: (a) $0 < a < b < 1$; (b) $0 < b < a < 1$ 。

图 2 非平凡 HP 算子的结构

Fig. 2 Structures of the non-trivial HP operators

2.2 HP 算子与相关算子之间的关系。

本小节主要讨论 HP 算子与模糊弱 HP 算子、模糊 Sheffer stroke 算子、模糊 Peirce arrow 算子之间的

关系。

首先,定义以下符号: $\mathcal{V}$ 、 $\mathcal{V}_{NT}$ 、 $\mathcal{V}_T$ 分别表示所有 HP 算子构成的集合、所有非平凡 HP 算子构成的集合和所有平凡 HP 算子构成的集合; $\mathcal{V}_S$ 、 $\mathcal{V}_P$ 、 $\mathcal{W}$ 分别表示所有特殊 HP 算子构成的集合、所有真 HP 算子构成的集合和所有模糊弱 HP 算子构成的集合; $\mathcal{H}$ 、 $\mathcal{P}$ 分别表示所有模糊 Sheffer stroke 算子构成的集合和所有模糊 Peirce arrow 算子构成的集合。

根据 HP 算子的结构可以直接得出以下结论。

命题 5 以下关系式成立: $\mathcal{V}=\mathcal{V}_{NT} \cup \mathcal{V}_T$; $\mathcal{H} \cup \mathcal{P} \subseteq \mathcal{V}_T$; $\mathcal{V}_{NT}=\mathcal{V}_S \cup \mathcal{V}_P$; $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_T=\mathcal{H} \cup \mathcal{P}$; $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{NT}=\mathcal{V}_S$ 。

例 4 取 $0=a < b < 1$, $V:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是二元函数,表达式如

$$V(x,y)=\begin{cases} 0, & x,y \in (0,b) \times [b,1] \cup [b,1] \times (0,1] \\ b, & \text{其它。} \end{cases}$$

显然, V 既不是模糊 Sheffer stroke 算子 H , 也不是模糊 Peirce arrow 算子 P , 但它是平凡 HP 算子, 因此 $\mathcal{H} \cup \mathcal{P} \subseteq \mathcal{V}_T$ 。

图 3 给出 HP 算子与模糊弱 HP 算子、模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子之间的关系。

3 非平凡 HP 算子的构造和刻画

本节将主要研究非平凡 HP 算子的构造和刻画。

3.1 非平凡 HP 算子的构造

在本小节中,将主要通过一些特殊的二元函数和一元函数,给出非平凡 HP 算子的两种构造方法。

命题 6 设 $a, b \in (0,1)$, 其中 $a \neq b, m, n:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是二元函数,对于任意的 $x, y \in [0,1]$, 则如下定义的二元函数

$$V_{ab}^*(x,y)=\frac{m(x,y)}{m(x,y)+n(x,y)}, \quad (5)$$

是非平凡 HP 算子,其中 m, n 满足以下条件:1) m 是递减的二元函数;2) n 是递增的二元函数;3) 如果 $x=a$ 或 $y=a$, 则 $m(x,y)$

$=b, n(x,y)=1-b$;4) $\frac{n(b,b)}{m(b,b)}=\frac{1-a}{a}$;5) 对于任意的 $x, y \in$

$[0,1]$, 有 $m(x,y)+n(x,y) \neq 0$ 。

证 首先,因为条件 5),所以 V_{ab}^* 的定义是良好的。其次,定义 5 中的 (V3) 能够直接通过条件 3) 得出。(V2) 的证明与 (V1) 是相似的,所以仅需要证明 V_{ab}^* 满足定义 5 中的 (V1) 和 (V4)。

(V1) 任取 $x_1, x_2, y \in [0,1], x_1 \leq x_2$ 。由条件 1) 和 2) 得, $m(x_1, y) \geq m(x_2, y)$ 且 $n(x_1, y) \leq n(x_2, y)$ 。因此,

$m(x_1, y)n(x_2, y) \geq m(x_2, y)n(x_1, y) \Rightarrow m(x_1, y)[m(x_2, y) + n(x_2, y)] \geq m(x_2, y)[m(x_1, y) + n(x_1, y)] \Rightarrow V_{ab}^*(x_1, y) \geq V_{ab}^*(x_2, y)$ 。

(V4) 将 (b, b) 点代入等式 (5), 根据条件 4) 通过简单计算易验证, $V_{ab}^*(b, b) = a$

例 5 取 $a=0.4, b=0.6$, 在闭区间 $[0,1]$ 上的二元函数

$$m(x,y)=\begin{cases} 0.6, & (x,y) \in [0,0.4] \times [0.4,1] \cup [0.4,1] \times [0,0.4], \\ \max\{0, 0.6 - \frac{(x-0.4)(y-0.4)}{0.2}\}, & (x,y) \in (0.4,1]^2, \\ 1 - \sqrt{xy}, & (x,y) \in [0,0.4]^2, \end{cases}$$

和

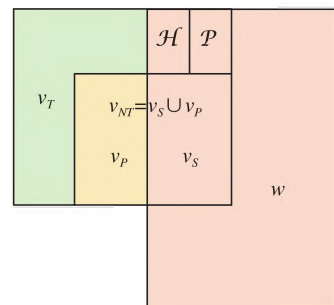


图 3 HP 算子与模糊弱 HP 算子、模糊 Sheffer stroke 算子、模糊 Peirce arrow 算子之间的关系

Fig. 3 Relationships between the HP operator, fuzzy weak HP operator, fuzzy Sheffer stroke operator, and fuzzy Peirce arrow operator

$$n(x, y) = \begin{cases} 0.4, (x, y) \in [0, 0.4] \times [0.4, 1] \cup [0.4, 1] \times [0, 0.4], \\ 1 - \max\{0, 0.6 - \frac{(x-0.4)(y-0.4)}{0.2}\}, (x, y) \in (0.4, 1]^2, \\ \sqrt{xy}, (x, y) \in [0, 0.4]^2, \end{cases}$$

满足命题 6 中的 1)~5), 使得 $V_{ab}^*(x, y) = \frac{m(x, y)}{m(x, y) + n(x, y)}$ 是非平凡 HP 算子。

定义 6 设 $a, b \in (0, 1)$, 其中 $a \neq b$, 函数 $M_{ab}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 被称为弱自同构函数, 如果 M_{ab} 是递增的, $M_{ab}(a) = a$ 且 $M_{ab}(b) = b$ 。

命题 7 设 $a, b \in (0, 1)$, 其中 $a \neq b$, 函数 $M_{ab}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是弱自同构函数, $V_{ab}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是 HP 算子, 则二元函数 $V_{ab}^{M_{ab}}(x, y) = M_{ab}(V_{ab}(x, y))$ 是 HP 算子。

证 由定义 6 很容易验证 $V_{ab}^{M_{ab}}(x, y) = M_{ab}(V_{ab}(x, y))$ 满足定义 5 中 (V1) ~ (V4)。

例 6 取 $a = 0.2, b = 0.8$, 在闭区间 $[0, 1]$ 上的二元函

$$M_{ab}(x) = \begin{cases} 1.2x - 0.04, 0.2 < x \leq 0.5, \\ 0.8x + 0.16, 0.5 < x \leq 0.8, \\ x, \text{其它}, \end{cases}$$

$$V_{ab}(x, y) = \begin{cases} 0.8, (x, y) \in [0, 0.2] \times [0, 1] \cup (0.2, 1] \times [0, 0.2], \\ 0.6, (x, y) \in (0.2, 0.8)^2, \\ 0.2, \text{其它}, \end{cases}$$

满足命题 7 中的条件, 所以 $V_{ab}^{M_{ab}}(x, y) = M_{ab}(V_{ab}(x, y))$ 是 HP 算子。

3.2 非平凡 HP 算子的刻画

在本小节中主要针对 $a < b$ 和 $a > b$ 两种不同的情况完成非平凡 HP 算子的刻画。

定理 1 设 $a, b \in (0, 1)$, 其中 $a < b$, 则以下结论是等价的:

- (1) 二元函数 $V_{ab}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是非平凡 HP 算子;
- (2) 存在二元函数 $m, n: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 使得

$$V_{ab}(x, y) = a + (b - a) \frac{m(x, y) - a}{m(x, y) + n(x, y) + b - a - 1}, \quad (6)$$

式中 m, n 满足以下条件: 1) $m(b, b) = a$; 2) 如果 $x = a$ 或 $y = a$, 则 $n(x, y) = 1 - b$; 3) 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 有 $bm(x, y) + an(x, y) \geq a$; 4) 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 有 $n(x, y) \geq \frac{b-1}{1-a}(m(x, y) - 1)$; 5) 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 有 $m(x, y) + n(x, y) > 1 + a - b$; 6) 对于任意的 $x_1, x_2, y \in [0, 1]$, 有 $m(x_1, y)[n(x_2, y) + b - 1] + a[n(x_1, y) - n(x_2, y)] \geq m(x_2, y)[n(x_1, y) + b - 1]$, 其中 $x_1 \leq x_2$; 7) 对于任意的 $x, y_1, y_2 \in [0, 1]$, 有 $m(x, y_1)[n(x, y_2) + b - 1] + a[n(x, y_1) - a[n(x, y_1) - n(x, y_2)]] \geq m(x, y_2)[n(x, y_1) + b - 1]$, 其中 $y_1 \leq y_2$ 。

此外, V_{ab} 是真 HP 算子当且仅当 $m(1, 1) \neq \frac{a}{b}(1 - n(1, 1))$ 或 $m(0, 0) \neq \frac{a-1}{1-b}n(0, 0) + 1$ 。

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 取二元函数 $m, n: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 令 $m(x, y) = V_{ab}(x, y)$ 且 $n(x, y) = 1 - V_{ab}(x, y)$ 显然, m 和 n 的定义是良好的且 V_{ab} 的表达式为等式 (6)。1) 与 2) 的证明可直接由定义 5 中 (V4) 和 (V3) 以及等式 (6) 通过简单计算得出, 接下来只需证明 m 和 n 满足条件 3) ~ 7)。

3) 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 有 $bm(x, y) + an(x, y) = bV_{ab}(x, y) + a(1 - V_{ab}(x, y)) = (b - a)V_{ab}(x, y) + a \geq a$ 。

4) 因为 $0 < a < b < 1$, 所以 $-1 < \frac{b-1}{1-a} < 0$ 。因此, 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 有 $\frac{b-1}{1-a}(m(x, y) - 1) = \frac{b-1}{1-a}(V_{ab}(x, y) - 1) \leq -(V_{ab}(x, y) - 1) = n(x, y)$ 。

5) 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 有 $m(x, y) + n(x, y) = V_{ab}(x, y) + 1 - V_{ab}(x, y) = 1 > 1 + a - b$ 。

6) 任取 $x_1, x_2, y \in [0, 1]$ 且 $x_1 \leq x_2$, 由定义 5 的 (V1) 得: $(b - a)V_{ab}(x_1, y) \geq (b - a)V_{ab}(x_2, y) \Rightarrow V_{ab}(x_1, y)[b - V_{ab}(x_2, y)] + a[V_{ab}(x_2, y) - V_{ab}(x_1, y)] \geq V_{ab}(x_2, y)[b - V_{ab}(x_1, y)] \Rightarrow m(x_1, y)[n(x_2, y) + b - 1] + a[n(x_1, y) - n(x_2, y)] \geq m(x_2, y)[n(x_1, y) + b - 1]$ 。

7) 证明过程与 6) 相似。

(2) $\Rightarrow$ (1) 首先, 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 由条件 5) 得, $m(x, y) + n(x, y) + b - a - 1 > 0$ 。其次, 由条件 3) 和 4) 易验证 $0 \leq V_{ab}(x, y) \leq 1$, 因此, V_{ab} 的定义是良好的。下面根据条件 2) 和 1), 通过简单计算易证明等式 (6) 满足定义 5 中的 (V3) 和 (V4)。(V1) 与 (V2) 证明相似, 因此, 下面仅证明 (V1)。

任取 $x_1, x_2, y \in [0, 1]$, 其中 $x_1 \leq x_2$, 由条件 6) 得 $m(x_1, y)[n(x_2, y) + b - 1] + a[n(x_1, y) - n(x_2, y)] \geq m(x_2, y)[n(x_1, y) + b - 1] \Rightarrow [m(x_1, y) - a][m(x_2, y) + n(x_2, y) + b - a - 1] \geq [m(x_2, y) - a][m(x_1, y) + n(x_1, y) + b - a - 1] \Rightarrow V_{ab}(x_1, y) \geq V_{ab}(x_2, y)$ 。

最后, 根据定义 5 中真 HP 算子的定义和等式 (6) 得

$$V_{ab} \text{ 是真 HP 算子} \Leftrightarrow m(0, 0) \neq \frac{a-1}{1-b}n(0, 0) + 1 \text{ 或 } m(1, 1) \neq \frac{a}{b}(1 - n(1, 1))。$$

定理 2 设 $a, b \in (0, 1)$, 其中 $a > b$, 则以下结论是等价的,

(1) 二元函数 $V_{ab}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是非平凡 HP 算子;

(2) 存在两个二元函数 $m, n: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 使得

$$V_{ab}(x, y) = a - (a - b) \frac{m(x, y) + a - 1}{m(x, y) + n(x, y) + a - b - 1},$$

式中 m, n 满足以下条件: 1) $m(b, b) = 1 - a$; 2) 如果 $x = a$ 或 $y = a$, 则 $n(x, y) = b$; 3) $\forall x, y \in [0, 1]$, 有 $bm(x, y) + an(x, y) \geq b$; 4) $\forall x, y \in [0, 1]$, 有 $m(x, y) \geq \frac{a-1}{b-1}(1 - n(x, y))$; 5) $\forall x, y \in [0, 1]$, 有 $m(x, y) + n(x, y) > 1 + b - a$; 6) $\forall x_1, x_2, y \in [0, 1]$, 有 $m(x_1, y)[n(x_2, y) - b] - (a - 1)[n(x_1, y) - n(x_2, y)] \leq m(x_2, y)[n(x_1, y) - b]$, 其中 $x_1 \leq x_2$; 7) $\forall x, y_1, y_2 \in [0, 1]$, 有 $m(x, y_1)[n(x, y_2) - b] - (a - 1)[n(x, y_1) - n(x, y_2)] \leq m(x, y_2)[n(x, y_1) - b]$, 其中 $y_1 \leq y_2$ 。

此外, V_{ab} 是真 HP 算子当且仅当 $m(1, 1) \neq 1 - \frac{a}{b}n(1, 1)$ 或 $m(0, 0) \neq \frac{a-1}{1-b}n(0, 0) + \frac{1-a}{1-b}$ 。

证 该证明过程与定理 1 相似。

4 一些 $\mathcal{V}_{NT}$ 子集上的代数结构

在本节中, 将给出 $\mathcal{V}_{NT}$ 的某些子集 $\mathcal{V}_{ab} = \{V_{ab} \in \mathcal{V}_{NT} | a, b \in (0, 1) \text{ 且 } a < b\}$ 上的两个二元运算 Δ , $\blacktriangle$, 并证明一定条件下 $(\mathcal{V}_{ab}, \Delta)$ 形成半群, $(\mathcal{V}_{ab}, \blacktriangle)$ 形成可交换么半群。对于 $\mathcal{V}_{ab}^* = \{V_{ab} \in \mathcal{V}_{NT} | a, b \in (0, 1) \text{ 且 } a > b\}$ 的情况是类似的, 因此不再赘述。

4.1 一些 $\mathcal{V}_{NT}$ 子集上的半群结构

在本小节中, 给出一种由给定的非平凡 HP 算子和聚合算子 A 生成非平凡 HP 算子的方法, 这种方法使得子集 $\mathcal{V}_{ab}$ 构成半群。

定义 7 ^[18] 二元函数 $A: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 被称为聚合算子, 如果它是递增的且满足 $A(0, 0) = 0, A(1, 1) = 1$ 。称元素 $x \in [0, 1]$ 为 A 的幂等元, 如果 $A(x, x) = x$ 。

定义 8 设 $V_{ab}^1, V_{ab}^2 \in \mathcal{V}_{ab}$, $A: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是以 a, b 为幂等元的聚合算子, 函数 $V_{ab}^1 \Delta V_{ab}^2: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 定义为 $(V_{ab}^1 \Delta V_{ab}^2)(x, y) = A(V_{ab}^1(x, y), V_{ab}^2(x, y)), x, y \in [0, 1]$ 。

命题 8 由定义 8 所定义的函数 $V_{ab}^1 \Delta V_{ab}^2$ 是非平凡 HP 算子, 即 $V_{ab}^1 \Delta V_{ab}^2 \in \mathcal{V}_{ab}$ 。

证 由聚合算子 A 的单调性和幂等元性质易验证 $V_{ab}^1 \Delta V_{ab}^2$ 满足定义 5 中的 (V1) $\sim$ (V4)。

定理 3 若 $A: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是具有结合性的且以 a, b 为幂等元的聚合算子, 则 $(\mathcal{V}_{ab}, \Delta)$ 是半群。

证 由命题 8 得, Δ 是子集 $\mathcal{V}_{ab}$ 上的封闭二元运算。因为聚合函数 A 具有结合性所以对于任意的 x, y

$\in [0,1]$ 易证, $((V_{ab}^1 \Delta V_{ab}^2) \Delta V_{ab}^3)(x, y) = (V_{ab}^1 \Delta (V_{ab}^2 \Delta V_{ab}^3))(x, y)$, 即 Δ 在 $\mathcal{V}_{ab}$ 上满足结合性, 所以 $(\mathcal{V}_{ab}, \Delta)$ 是半群。

注 2 $(\mathcal{V}_{ab}, \Delta)$ 是可交换半群当且仅当 A 满足交换性。

4.2 一些 $\mathcal{V}_{NT}$ 子集上的幺半群结构

本小节给出一种特殊的生成非平凡 HP 算子的方法, 该方法使子集 $\mathcal{V}_{ab}$ 构成可交换幺半群。为此, 首先回忆一些关于一致零模的概念和结论, 在此假设读者已熟悉三角模, 三角余模、一致模、零模的相关概念。

定义 9^[19] 设 $G: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是可交换二元算子, 对于 $0 \leq a_1 \leq b \leq a_2 \leq 1$, $\{a_1, a_2\}_b$ 被称为 G 的 2-单位元, 如果满足: 当 $x \leq b$ 时, $G(a_1, x) = x$; 当 $x \geq b$ 时, $G(a_2, x) = x$ 。

定义 10^[19] 称二元算子 $G: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 为 2-一致模, 如果 G 有 2-单位元 $\{a_1, a_2\}_b$ 且满足交换性、结合性和递增性。

定义 11^[20] 一致零模是具有 2-单位元 $\{a, 1\}_b$ 的 2-一致模, 其中 b 是闭区间 $[a, 1]$ 上的零元。

注意, 一致零模推广了一致模和零模。对于具有 2-单位元 $\{a, 1\}_b$ 的一致零模 G , 当 $b=1$ 时, G 是一致模; 当 $a=0$ 时, G 是零模; 当 $a=0$ 且 $b=1$ 时, G 是三角余模; 当 $a=b=0$ 或 $a=b=1$ 时, G 是三角模。当 $0 < a < b < 1$ 时, 我们称具有 2-单位元 $\{a, 1\}_b$ 的一致零模是真一致零模。

定义 12^[20] 设 $G: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是具有 2-单位元 $\{a, 1\}_b$ 的真一致零模, 对于任意的 $x, y \in [0,1]$, 定义算子: $T_1(x, y) = \frac{G(ax, ay)}{a}$; $S(x, y) = \frac{G(a + (b-a)x, a + (b-a)y) - a}{b-a}$; $T_2(x, y) = \frac{G(b + (1-b)x, b + (1-b)y) - b}{1-b}$; $\underline{U}(x, y) = \frac{G(bx, by)}{b}$; $\underline{F}(x, y) = \frac{G(a + (1-a)x, a + (1-a)y) - a}{1-a}$ 。

定理 4^[19-20] 设 $G: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是真一致零模, 其中 $T_1, S, T_2, \underline{U}, \underline{F}$ 由定义 12 给出, 则 T_1 和 T_2 是三角模, S 是三角余模; $\underline{U}$ 是一致模, 单位元为 $\frac{a}{b}$; $\underline{F}$ 是零模, 零元为 $\frac{b-a}{1-a}$ 。

定理 4 指出 $[0, a]^2, [a, b]^2, [b, 1]^2, [0, b]^2$ 和 $[a, 1]^2$ 上的真一致零模的结构分别与三角模, 三角余模, 三角模, 一致模和零模密切相关。我们将 T_1, T_2 分别称为 G 的基础左下三角模、右上三角模, $S, \underline{U}$ 和 $\underline{F}$ 分别称为 G 的基础三角余模、一致模和零模。真一致零模的基础一致模和零模享有共同的基础三角余模。对于真一致零模的其余部分结构如下。

定理 5^[20] 设 $G: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是真一致零模, 则

- (1) 当 $x \leq a \leq y \leq b$ 或 $y \leq a \leq x \leq b$ 时, $\min(x, y) \leq G(x, y) \leq \max(x, y)$;
- (2) 当 $a \leq x \leq b \leq y$ 或 $a \leq y \leq b \leq x$ 时, $G(x, y) = b$;
- (3) 当 $x \leq a \leq b \leq y$ 或 $y \leq a \leq b \leq x$ 时, $\min(x, y) \leq G(x, y) \leq b$ 。

在接下来的内容中, 我们将用 G_{ab} 表示具有 2-单位元 $\{a, 1\}_b$ 的真一致零模。图 4 给出真一致零模的结构。

定义 13 设 $V_{ab}^1, V_{ab}^2 \in \mathcal{V}_{ab}$, $G_{ab}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是真一致零模, 函数 $V_{ab}^1 \blacktriangle V_{ab}^2: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 定义如下:

$$(V_{ab}^1 \blacktriangle V_{ab}^2)(x, y) = G_{ab}(V_{ab}^1(x, y), V_{ab}^2(x, y)), \quad x, y \in [0,1]。$$

因为真一致零模 G_{ab} 是递增的结合的且满足 $G_{ab}(a, a) = a, G_{ab}(b, b) = b$ 的聚合函数, 所以由命题 8 可得 $V_{ab}^1 \blacktriangle V_{ab}^2 \in \mathcal{V}_{ab}$ 。

定理 6 $(\mathcal{V}_{ab}, \blacktriangle)$ 是幺半群, 其中, $0 < a < b < 1$, 单位元如下:

$$V_{ab}^{ie}(x, y) = \begin{cases} b, & (x, y) \in [0, a] \times [a, 1] \cup [a, 1] \times [0, a], \\ a, & (x, y) \in (a, 1]^2, \\ 1, & (x, y) \in [0, a]^2. \end{cases}$$

证 由定理 3 知 $(\mathcal{V}_{ab}, \blacktriangle)$ 是半群, 因此只需证单位元性质。取 $V_{ab} \in \mathcal{V}_{ab}$, 对于任意的 $x, y \in [0,1]$, 有

				1
		$[\min, b]$	b	T_2
	b	$[\min, \max]$	S	b
	a	T_1	$[\min, \max]$	$[\min, b]$
	0	a	b	1

图 4 真一致零模的结构

Fig. 4 Structure of the proper uni-nullnorm

$$\begin{aligned}
(V_{ab}^{ie} \blacktriangle V_{ab})(x, y) &= G_{ab}(V_{ab}^{ie}(x, y), V_{ab}(x, y)) \\
&= \begin{cases} G_{ab}(b, b), (x, y) \in [0, a] \times [a, 1] \cup [a, 1] \times [0, a], \\ G_{ab}(a, V_{ab}(x, y)), (x, y) \in (a, 1]^2, \\ G_{ab}(1, V_{ab}(x, y)), (x, y) \in [0, a)^2. \end{cases} \\
&= \begin{cases} b, (x, y) \in [0, a] \times [a, 1] \cup [a, 1] \times [0, a], \\ V_{ab}(x, y), \end{cases} \\
&= V_{ab}(x, y).
\end{aligned}$$

注2 (1) 因为 $V_{ab}^{ie}(1, 1) = a \neq 0$, 所以由等式(7)给出的非平凡 HP 算子 V_{ab}^{ie} 是真 HP 算子。

(2) 因为真一致零模具有可交换性所以 $(\mathcal{V}_{ab}, \blacktriangle)$ 是可交换么半群。

对于任意的 $a, b \in (0, 1)$ 且 $a \neq b$, 定义 φ 表示所有递增双射 $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 的集合, 其中 $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ 。在下文中, 引入了 φ -共轭的概念。

定义14 假设 $\varphi \in \varphi, F: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是二元函数, 称函数 $(F)_{\varphi}(x, y) = \varphi^{-1}(F(\varphi(x), \varphi(y)))$, $x, y \in [0, 1]$ 为 F 的 φ -共轭。若对于任意的 $\varphi \in \varphi$, 有 $(F)_{\varphi} = F$, 则称 F 是自共轭的。

下面给出自共轭的真一致零模的一个具体例子。

例7 对于任意 $x, y \in [0, 1]$, 二元函数 $G_{ab}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 表达式如下:

$$G_{ab}(x, y) = \begin{cases} b, (x, y) \in [a, b] \times (b, 1] \cup (b, 1] \times [a, b], \\ \max(x, y), (x, y) \in [a, b]^2 \cup (a, b] \times [0, a), \\ \min(x, y), \text{其它}. \end{cases}$$

显然, G_{ab} 是自共轭的真一致零模。

对于任意的 $\varphi \in \varphi$, 容易验证 $(V_{ab})_{\varphi} \in \mathcal{V}_{ab}$ 。下面用 $\mathcal{V}_{SC}$ 表示所有自共轭的非平凡 HP 算子的集合, 记 $\mathcal{V}_{SC}^{ab} = \mathcal{V}_{SC} \cap \mathcal{V}_{ab}$ 。

命题9 对任意的 $a, b \in (0, 1)$, 若 $G_{ab}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是自共轭的真一致零模, 则 $\mathcal{V}_{SC}^{ab}$ 是 $(\mathcal{V}_{ab}, \blacktriangle)$ 的子么半群。

证 首先证明 $\mathcal{V}_{SC}^{ab}$ 关于 $\blacktriangle$ 的运算是封闭的。取 $V_{ab}^1, V_{ab}^2 \in \mathcal{V}_{SC}^{ab}$ 且 $\varphi \in \Phi$, 对于任意的 $x, y \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned}
(V_{ab}^1 \blacktriangle V_{ab}^2)_{\varphi}(x, y) &= \varphi^{-1}((V_{ab}^1 \blacktriangle V_{ab}^2)(\varphi(x), \varphi(y))) \\
&= \varphi^{-1}(G_{ab}(\varphi((V_{ab}^1)_{\varphi}(x, y)), \varphi((V_{ab}^2)_{\varphi}(x, y)))) \\
&= (G_{ab})_{\varphi}(V_{ab}^1(x, y), V_{ab}^2(x, y)) \\
&= (V_{ab}^1 \blacktriangle V_{ab}^2)(x, y).
\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}
(V_{ab}^{ie})_{\varphi}(x, y) &= \varphi^{-1}(V_{ab}^{ie}(\varphi(x), \varphi(y))) \\
&= \begin{cases} \varphi^{-1}(b), (\varphi(x), \varphi(y)) \in [0, a] \times [a, 1] \cup [a, 1] \times [0, a] \\ \varphi^{-1}(a), (\varphi(x), \varphi(y)) \in (a, 1]^2 \\ \varphi^{-1}(\varphi(1)), (\varphi(x), \varphi(y)) \in [0, a)^2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} b, (x, y) \in [0, a] \times [a, 1] \cup [a, 1] \times [0, a] \\ a, (x, y) \in (a, 1]^2 \\ 1, (x, y) \in [0, a)^2 \end{cases} \\
&= V_{ab}^{ie}(x, y).
\end{aligned}$$

因此, $\mathcal{V}_{SC}^{ie} \in \mathcal{V}_{SC}^{ab} \not\subseteq \mathcal{V}_{ab}$ 。所以 $\mathcal{V}_{SC}^{ab}$ 是 $(\mathcal{V}_{ab}, \blacktriangle)$ 的子么半群。

5 结论与展望

本文围绕模糊逻辑算子体系的拓展与统一展开研究, 主要通过分析模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子的边界特性, 找到了二者可兼容的边界条件, 进而提出 HP 算子的概念。这一概念的引入

并非简单的算子组合,而是构建了一个能够将两种模糊算子同时纳入的统一理论框架。证明了非平凡 HP 算子在 $[a, b]^2$ ($[b, a]^2$) 上的结构与模糊 Sheffer stroke 算子(模糊 Peirce arrow 算子)密切相关。同时,讨论了 HP 算子、模糊弱 HP 算子、模糊 Sheffer stroke 算子和模糊 Peirce arrow 算子之间的关系,还分别给出了非平凡 HP 算子的两种构造和等价刻画。最后,给出了某些非平凡 HP 算子集上的一些代数结构。从理论层面看,HP 算子的提出进一步丰富了模糊逻辑算子的理论体系,同时,非平凡 HP 算子的结构分析、构造方法与代数结构研究,也为后续模糊算子的理论创新提供了可借鉴的研究框架。从应用层面看,HP 算子为模糊控制领域提供了更具灵活性的算子选择空间。

尽管本文对 HP 算子的基础理论作了一定的研究,但仍存在可进一步拓展的方向:其一,可探索 HP 算子与其它模糊逻辑系统(如直觉模糊逻辑、区间值模糊逻辑)的融合路径,将 HP 算子的定义从 $[0, 1]^2$ 论域拓展至直觉模糊数、区间值模糊数的论域,进一步扩大其理论覆盖范围;其二,可深化 HP 算子的应用研究,结合具体工程场景(如工业温度控制、机器人路径规划),设计基于 HP 算子的模糊控制算法,并通过实验验证其控制性能优于传统算子的优势。

参 考 文 献

- [1] ZADEH L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 1973, 3(1): 28-44.
- [2] MAMDANI E H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant[J]. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 1974, 121(12): 1585-1588.
- [3] 彭勇, 江常青, 谢丰, 等. 工业控制系统信息安全研究进展[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2012, 52(10): 1396-1408.
- [4] 谢正泰, 樊佳亮, 刘梅, 等. 基于神经网络的机器人学习与控制:回顾与展望[J]. 信息与控制, 2023, 52(1): 37-58.
- [5] 武晓雯, 刘赫, 高铁洪. 工业机器人单目视觉安全辅助系统设计[J]. 哈尔滨理工大学学报(自然科学版), 2022, 27(3): 90-96.
- [6] 秦侨, 杨超, 杨海涛, 等. 结合模糊控制的深度强化学习交通灯控制策略[J]. 计算机应用研究, 2024, 41(1): 165-169.
- [7] 徐琳, 曲仕茹. 智能交通系统网格资源的服务质量评价技术[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2013, 44(11): 4736-4744.
- [8] 郑江华, 晏磊, 刘岳峰, 等. 基于混合传感器网络的城市智能交通系统构建[J]. 武汉大学学报(工学版), 2009, 42(3): 362-367.
- [9] BALASUBRAMANIAM JAYARAM M B. Fuzzy implications[M]. Berlin: Springer New York, 2008.
- [10] KLEMENT E P, MESIAR R, PAP E. Triangular norms[M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2000.
- [11] CALVO T, DE BAETS B, FODOR J. The functional equations of frank and alsina for uninorms and nullnorms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 120(3): 385-394.
- [12] BACZYŃSKI M, BERRUEZO P, HELBIN P, et al. On the Sheffer stroke operation in fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2022, 431: 110-128.
- [13] WANG Y T, HU B Q. On fuzzy Sheffer strokes: new results and the ordinal sums[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023, 456: 144-172.
- [14] ZHAO Y F, LIU H W. Interval r-Sheffer strokes and interval fuzzy Sheffer strokes endowed with admissible orders[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2024, 166: 109-120.
- [15] ZHAO Y F, LIU H W. On r-Sheffer strokes: a new class of directionally monotone functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2025, 498: 109-149.
- [16] QIAO J S. A unified framework of 0-overlap functions and 1-grouping functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2024, 676: 120-853.
- [17] ZHAO Y F, LIU H W. A unified framework of fuzzy implications and coimplications[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2024, 485: 108-962.
- [18] CALVO T, KOLESÁROVÁ A, KOMORNÍKOVÁ M, et al. Aggregation operators: properties, classes and construction methods[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 2002.
- [19] AKELLA P. Structure of n-uninorms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(15): 1631-1651.
- [20] SUN F, WANG X P, QU X B. Uni-nullnorms and null-uninorms[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017, 32(3): 1969-1981.

(责任编辑:刘庆松)