

本文引用格式:刘夏夏,宗浩,张凤霞. 广义弗雷格方程的两类模糊蕴涵解[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2025, 38(1): 147-158.

Citation format: LIU Xiaxia, ZONG Hao, ZHANG Fengxia. Two types of fuzzy implication solutions of generalized Frege's equation[J]. Journal of Liaocheng University(Natural Science Edition), 2025, 38(1): 147-158.

文章编号 1672-6634(2025)01-0147-12

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2024100006

广义弗雷格方程的两类模糊蕴涵解

刘夏夏, 宗浩, 张凤霞

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 由于模糊蕴涵是经典(布尔)蕴涵的推广,探究布尔定律在模糊环境下成立的条件是必要的。在模糊环境下,布尔定律将作为函数方程或函数不等式进行研究,这被称为类布尔定律。在模糊数学领域,特别是在模糊逻辑的框架内,类布尔定律中的广义弗雷格定律因其在模糊控制系统,模糊关系方程等方面的应用,近几年已经得到广泛的关注和研究。本文旨在基于 Cruz, Peng 以及 Zhang 等人的研究工作,进一步研究两类模糊蕴涵,即常见的一致模剩余蕴涵和生成蕴涵,是否满足广义弗雷格方程,并刻画使方程成立的模糊蕴涵结构。这项工作将进一步丰富广义弗雷格方程的研究成果,并为相关应用领域提供更多的算子选择空间。

关键词 一致模剩余蕴涵;生成蕴涵;广义弗雷格方程

中图分类号 O159

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Two Types of Fuzzy Implication Solutions of Generalized Frege's Equation

LIU Xiaxia, ZONG Hao, ZHANG Fengxia

(School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract As fuzzy implication serves as a generalization of classical (Boolean) implication, it is essential to investigate the conditions which Boolean Law holds in fuzzy environment. In this setting, Boolean laws will be examined as functional equations or inequalities, referred to as Boolean-like laws. Within the realm of fuzzy mathematics—particularly in the framework of fuzzy logic—the generalized Frege's law among these Boolean-like laws has garnered significant attention and research interest in recent years due to its applications in fuzzy control systems and fuzzy relational equations. Building upon the foundational work by Cruz, Peng, and Zhang et al., this paper seeks to further investigate whether the generalized Frege's equation holds for two specific types of fuzzy implications: namely, the residual implications derived from common uninorms and generated implications. Additionally, we aim to characterize the structure of those implications that satisfy this equation. This study not only aims to enrich research on the generalized Fre-

收稿日期:2024-10-16

基金项目:国家自然科学基金项目(12171220);聊城大学强特色学科建设-智能科学与技术项目(319462208)资助

通信作者:张凤霞,女,汉族,博士,教授,研究方向:不确定性推理,非经典数理逻辑和聚合函数, E-mail: fengxiazhang@163.com。

ge's equation but also intends to expand operator selection options for related application domains.

Key words residual implications of uninorms; generated implications; generalized Frege's equation

0 引言

模糊控制是一种基于模糊逻辑的控制方法,它通过模糊化,模糊推理和清晰化等过程,对复杂系统进行控制。模糊控制在交通系统^[1],无人机^[2]和神经网络^[3]等领域有广泛的应用。模糊推理是模糊控制器的核心,模糊蕴涵在其中起到了重要作用,根据不同的模糊控制系统,模糊蕴涵需要满足不同的函数方程。

模糊蕴涵作为经典(布尔)蕴涵在单位区间 $[0,1]$ 上的推广,除了在模糊控制中具有重要作用,在模糊关系方程^[4],模糊粗糙集^[5],模糊神经网络^[6],图像处理^[7]和数据挖掘^[8]等诸多领域也有着广泛的应用价值。关于模糊蕴涵的研究主要集中在以下几个方面:(1) 模糊蕴涵的构造和基本特征的研究^[9,10];(2) 模糊蕴涵的应用研究^[11];(3) 模糊蕴涵的代数结构研究^[10,12,13];(4) 模糊蕴涵的性质研究,例如,Massanet 等人研究了对于固定的 t -模或者固定的一致模满足输入法则的模糊蕴涵^[14];Mas 等人研究了满足 Modus Ponens (MP),Modus Tollens (MT)或 MPT 的离散蕴涵^[15];Balasubramaniam 等人研究了蕴涵算子在 t -模和 t -余模上的分配性^[16];Qiao 等人研究了模糊蕴涵在重叠函数和分组函数上的分配性^[17]。

因为模糊蕴涵的性质来自于具体应用,而对模糊蕴涵性质的研究又归结为对某个函数方程的求解,所以对函数方程的研究吸引了众多学者的目光。近几年,Cruz 等人^[18]指出了在控制系统-UFRN 污水处理系统中,广义弗雷格方程对蕴涵算子成立是必要的;同时,文献^[18]给出了 (S,N) -蕴涵满足广义弗雷格方程的充分条件;指出了满足该方程的左连续 t -模生成的 R -蕴涵只有 Gödel 蕴涵,满足广义弗雷格方程和(IP)性质的 QL -蕴涵, D -蕴涵只有 Weber 蕴涵, h -蕴涵不满足广义弗雷格方程。

随后,Peng 等人^[19]给出了广义弗雷格方程成立的一个新的必要条件,即,模糊蕴涵的自然否定不连续,根据这个必要条件,他指出了文献^[18]中存在矛盾假设的命题,并对文献^[18]中的一些结论进行了修正;给出了三类常见一致模生成的 (U,N) -蕴涵满足广义弗雷格方程的充分条件以及必要条件;指出了 f -蕴涵, g -蕴涵, T -power 蕴涵不满足该方程。Zhang 等人^[20]进一步研究了满足广义弗雷格方程的 (U,N) -蕴涵,引入了该方程成立的新的必要条件,即,模糊否定 N 非连续且在区间 $[0,e]$ 上的值为常数1,给出了 (U,N) -蕴涵满足广义弗雷格方程的一般结论,同时,刻画了广义弗雷格方程的 (U,N) -蕴涵解。

从以上研究成果可以看出,满足广义弗雷格方程的解并不是很多,本文针对常见的一致模剩余蕴涵和生成蕴涵,对广义弗雷格定律进行研究,刻画满足广义弗雷格方程的模糊蕴涵的结构特征,这些工作将进一步丰富广义弗雷格定律的研究成果,并为相关应用领域提供更多的算子选择空间。

1 预备知识

本节中我们将介绍 t -模、 t -余模、模糊蕴涵、剩余蕴涵、一致模等基本概念以及相关结论。

定义1^[21] 如果二元函数 $T:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 满足交换性、结合性、递增性,且以1为单位元,即对任何的 $x \in [0,1]$,有 $T(x,1)=x$,则称 T 为三角模,简称 t -模。

类似地,如果二元函数 $S:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 满足交换性、结合性、递增性,且以0为单位元,即对任何的 $x \in [0,1]$,有 $S(x,0)=x$,则称 S 为三角余模,简称 t -余模。

常见的 t -模和 t -余模分别有:

- (1) Lukasiewicz t -模和 t -余模: $T_{LK}(x,y) = \max(x+y-1,0)$, $S_{LK}(x,y) = \min(x+y,1)$;
- (2) Product t -模和 t -余模: $T_P(x,y) = xy$, $S_P(x,y) = x+y-xy$;
- (3) Minimum t -模和 Maximum t -余模: $T_M(x,y) = \min(x,y)$, $S_M(x,y) = \max(x,y)$;
- (4) Drastic Product t -模和 Drastic Sum t -余模:

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0, 1]^2, \\ \min(x, y), & \text{其它}, \end{cases} \quad S_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in (0, 1)^2, \\ \max(x, y), & \text{其它}. \end{cases}$$

定义 2^[22] 如果二元函数 $U: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 满足结合性, 交换性, 关于两个变元递增并且存在一个单位元 $e \in [0, 1]$, 即对于任意的 $x \in [0, 1]$, 有 $U(x, e) = x$, 则称 U 为一致模。

特别的, 当 $e = 1$ 时, 一致模 U 为 t -模; 当 $e = 0$ 时, 一致模 U 为 t -余模; 当 $e \in (0, 1)$ 时, 记此类一致模为 $\mathcal{U}^e$ 。一致模 U 在 $[0, e]^2$ 和 $[e, 1]^2$ 可以分别用基础 t -模 T 和基础 t -余模 S 表示为

$$U(x, y) = \begin{cases} eT\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right), & x, y \in [0, e], \\ e + (1 - e)S\left(\frac{x - e}{1 - e}, \frac{y - e}{1 - e}\right), & x, y \in [e, 1]. \end{cases}$$

当 $x, y \in [0, e) \times (e, 1] \cup (e, 1] \times [0, e)$ 时, 有 $\min(x, y) \leq U(x, y) \leq \max(x, y)$ 。为明确起见, 记此类一致模 U 为 $U = \langle T, e, S \rangle$, 其中 T 和 S 分别称为一致模 U 的基础 t -模和基础 t -余模。

定义 3^[22] 如果二元函数 $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 关于第一变元递减, 关于第二变元递增, 且

$$I(0, 0) = 1, I(1, 1) = 1, I(1, 0) = 0,$$

则称 I 为模糊蕴涵。

定义 4^[22] 如果一元函数 $N: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 单调递减, 满足 $N(0) = 1$ 且 $N(1) = 0$, 则称 N 为模糊否定。

定义 5^[22] 如果 I 是模糊蕴涵, 定义一元函数 $N_I: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 为: $N_I(x) = I(x, 0)$, 此时, N_I 是一个模糊否定, 称 N_I 为模糊蕴涵 I 的自然否定。

定义 6^[22] 对于函数 $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, 如果存在 t -模 T 使得对所有的 $x, y \in [0, 1]$, 有

$$I(x, y) = \sup\{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y\},$$

则称 I 为由 t -模 T 生成的剩余算子。容易验证, I 是一个模糊蕴涵, 称为 T 的剩余蕴涵, 简称 R -蕴涵, 记作 I_T 。

类似地, 如果存在 t -余模 S 使得对所有的 $x, y \in [0, 1]$, 有

$$I(x, y) = \sup\{t \in [0, 1] \mid S(x, t) \leq y\},$$

则称 I 为由 t -余模 S 生成的剩余算子, 记作 I_S 。由于 $I_S(0, 0) = 0$, 所以 t -余模 S 的剩余算子 I_S 不是一个模糊蕴涵。

如果存在一致模 U 使得对所有的 $x, y \in [0, 1]$, 有

$$I(x, y) = \sup\{t \in [0, 1] \mid U(x, t) \leq y\},$$

则称 I 为由一致模 U 生成的剩余算子, 记作 I_U 。

注 1 设 $I_T: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是 t -模 T 的剩余蕴涵, 则 $I_T(x, y) = I_{GD}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ y, & x > y, \end{cases}$ 当且仅当

$$T = T_M; I_T(x, y) = I_{WB}(x, y) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ y, & x = 1, \end{cases} \text{ 当且仅当 } T = T_D。$$

命题 1^[22] 设 $U \in \mathcal{U}^e$, 则以下陈述等价:

(1) 由一致模 U 生成的剩余算子 I_U 是模糊蕴涵。

(2) 对所有的 $z \in [0, 1]$, 有 $U(0, z) = 0$ 。

以下是几类常见的一致模和它们的剩余蕴涵。

定理 1^[22] 设 $U \in \mathcal{U}^e$, 且除了在点 $x = e$ 外, $U(x, 1), U(x, 0)$ 都是连续的。

(1) 如果 $U(0, 1) = 0$, 那么存在 t -模 T 和 t -余模 S 使得

$$U(x, y) = \begin{cases} eT(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}), x, y \in [0, e], \\ e + (1-e)S(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}), x, y \in [e, 1], \\ \min(x, y), \text{其它}, \end{cases}$$

记这类一致模为 $\mathcal{U}_{\min}$, 其剩余蕴涵为

$$I_U(x, y) = \begin{cases} eI_T(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}), x, y \in [0, e], \\ e + (1-e)I_S(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}), x, y \in [e, 1], \\ I_{GD}(x, y), \text{其它}, \end{cases}$$

式中 I_T 是由 t -模 T 生成的剩余蕴涵, I_S 是由 t -余模 S 生成的剩余算子。

(2) 如果 $U(0, 1) = 1$, 那么存在 t -模 T 和 t -余模 S 使得

$$U(x, y) = \begin{cases} eT(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}), x, y \in [0, e], \\ e + (1-e)S(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}), x, y \in [e, 1], \\ \max(x, y), \text{其它}. \end{cases}$$

记这类一致模为 $\mathcal{U}_{\min}$ 。根据命题 1, 该类一致模剩余算子不是剩余蕴涵。

定义 7 ^[22] 如果 $U \in \mathcal{U}^e$, 若存在一个严格单调递增的连续函数 $h: [0, 1] \rightarrow [-\infty, \infty]$, 满足 $h(0) = -\infty$, $h(e) = 0, h(1) = \infty$, 使得对任何 $x, y \in [0, 1]$, 有

$$U(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ 或 } 1, (x, y) \in \{(0, 1), (1, 0)\}, \\ h^{-1}(h(x) + h(y)), (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0)\}, \end{cases}$$

则称 U 为可表示一致模, h 为 U 的加法生成子, 记这类一致模为 $\mathcal{U}_h$, 其剩余蕴涵为

$$I_U(x, y) = \begin{cases} 1, (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}, \\ h^{-1}(h(y) - h(x)), \text{其它}. \end{cases}$$

命题 2 ^[22] 设 $U \in \mathcal{U}_h$, 则对所有的 $x \in (0, 1)$, 有 $I_U(x, x) = e$ 。

我们知道, 若对所有的 $x \in [0, 1]$, 有 $U(x, x) = x$ 成立, 则称 U 为幂等一致模^[2]。这类一致模的基本结构如下:

定理 2 ^[22] 对于二元函数 $U: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, 以下陈述是等价的:

(1) U 是幂等一致模。

(2) 存在一个递减函数 $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $g(e) = e$, 满足 $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (g(0), 1], \\ 1, & x \in [0, g(1)), \end{cases}$ 以及对所有的 $x \in [0, 1]$, 有 $\inf\{y \mid g(y) = g(x)\} \leq g(g(x)) \leq \sup\{y \mid g(y) = g(x)\}$, 使得对任意的 $x, y \in [0, 1]$,

$$U(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), y < g(x) \text{ 或者 } (y = g(x) \text{ 且 } x < g(g(x))), \\ \max(x, y), y > g(x) \text{ 或者 } (y = g(x) \text{ 且 } x > g(g(x))), \\ \max(x, y) \text{ 或者 } \min(x, y), y = g(x) \text{ 且 } x = g(g(x)), \end{cases}$$

称 g 为 U 的相关函数, 记这类一致模为 $\mathcal{U}_{\text{Idem}}$ 。

注 2 由命题 1 可知, 由 $U \in \mathcal{U}_{\text{Idem}}$ 生成的剩余算子 I_U 是模糊蕴涵当且仅当 $g(0) = 1$ 。因此, 下文中将假设幂等一致模的相关函数 g 满足 $g(0) = 1$ 。该类一致模 U 的剩余蕴涵为^[2, 20]

$$I_U(x, y) = \begin{cases} \max(g(x), y), & x \leq y, \\ \min(g(x), y), & x > y. \end{cases}$$

命题 3 ^[23] 设 $U \in \mathcal{U}^e$ 是在 $(0, 1)^2$ 上连续的一致模, 则 U 满足以下任意一种情况,

(1) 存在 $\beta \in [0, e), \alpha \in [0, \beta]$ 两个连续的 t -模 T 和 T^* 以及一个可表示一致模 R 使得

$$U(x, y) = \begin{cases} \alpha T'(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}), x, y \in (0, \alpha), \\ \alpha + (\beta - \alpha) T'(\frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, \frac{y - \alpha}{\beta - \alpha}), x, y \in (\alpha, \beta), \\ \beta + (1 - \beta) R(\frac{x - \beta}{1 - \beta}, \frac{y - \beta}{1 - \beta}), x, y \in (\beta, 1), \\ 1, \min(x, y) \in (\alpha, 1] \text{ 且 } \max(x, y) = 1, \\ \alpha \text{ 或者 } 1, (x, y) \in \{(\alpha, 1), (1, \alpha)\}, \\ \min(x, y), \text{其它}, \end{cases}$$

记这类一致模为 $\mathcal{U}_{\cos, \min}$ 。

(2) 存在 $\gamma \in (e, 1], \delta \in [\gamma, 1]$ 两个连续的 t -余模 S' 和 S'' 以及一个可表示一致模 R 使得

$$U(x, y) = \begin{cases} \gamma R(\frac{x}{\gamma}, \frac{y}{\gamma}), x, y \in (0, \gamma), \\ \gamma + (\delta - \gamma) S'(\frac{x - \gamma}{\delta - \gamma}, \frac{y - \gamma}{\delta - \gamma}), x, y \in (\gamma, \delta), \\ \delta + (1 - \delta) S''(\frac{x - \delta}{1 - \delta}, \frac{y - \delta}{1 - \delta}), x, y \in (\delta, 1), \\ 0, \max(x, y) \in [0, \delta) \text{ 且 } \min(x, y) = 0, \\ \delta \text{ 或者 } 0, (x, y) \in \{(0, \delta), (\delta, 0)\}, \\ \max(x, y), \text{其它}, \end{cases}$$

记这类一致模为 $\mathcal{U}_{\cos, \max}$ 。

相应地, 一致模 U 的剩余蕴涵有两种, 如下。

(3) 当 $U \in \mathcal{U}_{\cos, \min}$ 时, 一致模 U 的剩余蕴涵为^[24]

$$I_U(x, y) = \begin{cases} 1, x \in [0, \beta] \text{ 且 } y \geq x, \\ \alpha I_{T'}(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}), x \in [0, \alpha] \text{ 且 } y < x, \\ \alpha + (\beta - \alpha) I_{T^*}(\frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, \frac{y - \alpha}{\beta - \alpha}), x \in [\alpha, \beta] \text{ 且 } y < x, \\ \beta + (1 - \beta) I_R(\frac{x - \beta}{1 - \beta}, \frac{y - \beta}{1 - \beta}), x, y \in (\beta, 1)^2, \\ \alpha, x = 1 \text{ 且 } y > \alpha, \\ y, \text{其它}, \end{cases}$$

式中 $I_{T'}, I_{T^*}, I_R$ 分别为由 t -模 T 和 T^* 生成的剩余蕴涵以及由可表示一致模 R 生成的剩余蕴涵。

(4) 当 $U \in \mathcal{U}_{\cos, \max}$ 时, 一致模 U 的剩余算子是剩余蕴涵当且仅当 $\delta = 1$, 且剩余蕴涵为^[24]

$$I_U(x, y) = \begin{cases} \gamma I_R(\frac{x}{\gamma}, \frac{y}{\gamma}), (x, y) \in (0, \gamma]^2, \\ \gamma + (1 - \gamma) I_S(\frac{x - \gamma}{1 - \gamma}, \frac{y - \gamma}{1 - \gamma}), (x, y) \in (\gamma, 1)^2 \text{ 且 } y \geq x, \\ 0, x \in (\gamma, 1) \text{ 且 } y < x, \\ y, (x, y) \in (0, \gamma] \times [\gamma, 1), \\ 1, y = 1 \text{ 或者 } x = 0, \\ 0, y = 0 \text{ 且 } x \neq 0, \end{cases}$$

式中 I_R 是由可表示一致模 R 生成的剩余蕴涵, I_S 是由 t -余模 S 生成的剩余算子。

定义 8^[18] 如果 $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是模糊蕴涵, 称方程

$$I(x, I(y, z)) = I(I(x, y), I(x, z)), \quad (1)$$

为广义弗雷格方程。本文主要围绕此方程进行讨论研究。

命题 4 ^[18,19] 对于广义弗雷格方程,我们有:

- (1) 由左连续 t -模 T 生成的 R -蕴涵 I_T 满足方程(1)当且仅当 $I_T(x, y) = I_{GD}(x, y)$ 。
- (2) 设 I 是模糊蕴涵,如果 I 满足方程(1),则 N_I 是不连续的。
- (3) g -蕴涵不满足方程(1)。

命题 5 ^[25] 设 $s: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ 是严格递增且连续的一元函数, S 是以 s 为加法生成子的连续阿基米德 t -余模, 则 $I_S(x, y) = \begin{cases} s^{-1}(\max(0, s(y) - s(x))), & y \neq 1, \\ 1, & y = 1. \end{cases}$

2 广义弗雷格方程的一致模剩余蕴涵解

本节中,根据几类常见的一致模,讨论一致模的剩余蕴涵是否满足广义弗雷格方程,并找出满足该方程的剩余蕴涵。

2.1 $U = \langle T, e, S \rangle \in \mathcal{U}_{\min}$

定理 3 设 $U = \langle T, e, S \rangle \in \mathcal{U}_{\min}$, 如果一致模 U 的基础 t -模 T 和基础 t -余模 S 均连续, 那么 U 的剩余蕴涵 I_U 满足方程(1)当且仅当 $T = T_M, S = S_M$ 。此时, 剩余蕴涵 I_U 可表示为

$$I_U(x, y) = \begin{cases} y, & x, y \in [e, 1] \text{ 且 } x \leq y, \\ e, & x, y \in [e, 1] \text{ 且 } x > y, \\ I_{GD}(x, y), & \text{其它。} \end{cases}$$

证 当 $T = T_M, S = S_M$ 时, $I_U(x, y) = \begin{cases} y, & x, y \in [e, 1] \text{ 且 } x \leq y, \\ e, & x, y \in [e, 1] \text{ 且 } x > y, \\ I_{GD}(x, y), & \text{其它。} \end{cases}$ 容易验证, 它满足方程(1)。

反过来, 当 I_U 满足方程(1)时, 对于所有的 $x, y, z \in [0, e]$, 由于 $I_U(x, y) \in [0, e], I_U(x, z) \in [0, e], I_U(y, z) \in [0, e]$, 所以

$$I_U(x, I_U(y, z)) = eI_T\left(\frac{x}{e}, \frac{I_U(y, z)}{e}\right) = eI_T\left(\frac{x}{e}, \frac{eI_T(\frac{y}{e}, \frac{z}{e})}{e}\right) = eI_T\left(\frac{x}{e}, I_T\left(\frac{y}{e}, \frac{z}{e}\right)\right)。$$

$$\begin{aligned} \text{另一方面, } I_U(I_U(x, y), I_U(x, z)) &= eI_T\left(\frac{I_U(x, y)}{e}, \frac{I_U(x, z)}{e}\right) = eI_T\left(\frac{eI_T(\frac{x}{e}, \frac{y}{e})}{e}, \frac{eI_T(\frac{x}{e}, \frac{z}{e})}{e}\right) \\ &= eI_T\left(I_T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right), I_T\left(\frac{x}{e}, \frac{z}{e}\right)\right)。 \end{aligned}$$

因为 I_U 满足方程(1), 所以对于所有的 $x, y, z \in [0, e]$

$$eI_T\left(\frac{x}{e}, I_T\left(\frac{y}{e}, \frac{z}{e}\right)\right) = eI_T\left(I_T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right), I_T\left(\frac{x}{e}, \frac{z}{e}\right)\right),$$

即 $I_T\left(\frac{x}{e}, I_T\left(\frac{y}{e}, \frac{z}{e}\right)\right) = I_T\left(I_T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right), I_T\left(\frac{x}{e}, \frac{z}{e}\right)\right)$ 。记 $\lambda = \frac{x}{e}, \delta = \frac{y}{e}, v = \frac{z}{e}$, 则上式转化为

$$I_T(\lambda, I_T(\delta, v)) = I_T(I_T(\lambda, \delta), I_T(\lambda, v)), \lambda, \delta, v \in [0, 1],$$

式中 I_T 是由连续 t -模生成的 R -蕴涵。由命题 4(1)知, I_T 满足方程(1)当且仅当 $I_T(x, y) = I_{GD}(x, y)$, 由注 1 可知 $T = T_M$ 。

对于所有的 $x, y, z \in [e, 1]$, 我们有 $I_U(x, y) \in [e, 1], I_U(x, z) \in [e, 1], I_U(y, z) \in [e, 1]$, 所以,

$$\begin{aligned} I_U(x, I_U(y, z)) &= e + (1-e)I_S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{I_U(y, z)-e}{1-e}\right) \\ &= e + (1-e)I_S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{e + (1-e)I_S\left(\frac{y-e}{1-e}, \frac{z-e}{1-e}\right) - e}{1-e}\right) \end{aligned}$$

$$=e+(1-e)I_S(\frac{x-e}{1-e},I_S(\frac{y-e}{1-e},\frac{z-e}{1-e})),$$

$$\text{另一方面, } I_U(I_U(x,y),I_U(x,z))=e+(1-e)I_S(\frac{I_U(x,y)-e}{1-e},\frac{I_U(x,z)-e}{1-e})$$

$$=e+(1-e)I_S(\frac{e+(1-e)I_S(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e})-e}{1-e},\frac{e+(1-e)I_S(\frac{x-e}{1-e},\frac{z-e}{1-e})-e}{1-e})$$

$$=e+(1-e)I_S(I_S(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}),I_S(\frac{x-e}{1-e},\frac{z-e}{1-e})).$$

因为 I_U 满足方程(1),所以对于所有的 $x,y,z \in [e,1]$,

$$e+(1-e)I_S(\frac{x-e}{1-e},I_S(\frac{y-e}{1-e},\frac{z-e}{1-e}))=e+(1-e)I_S(I_S(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}),I_S(\frac{x-e}{1-e},\frac{z-e}{1-e})),$$

$$\text{即, } I_S(\frac{x-e}{1-e},I_S(\frac{y-e}{1-e},\frac{z-e}{1-e}))=I_S(I_S(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}),I_S(\frac{x-e}{1-e},\frac{z-e}{1-e})). \text{ 记 } u=\frac{x-e}{1-e}, v=\frac{y-e}{1-e}, w=\frac{z-e}{1-e},$$

$$\text{则上式转化为 } I_S(u,I_S(v,w))=I_S(I_S(u,v),I_S(u,w)), u,v,w \in [0,1], \text{ 即当 } I_U \text{ 满足方程(1)}$$

时, I_S 满足方程(1)。

下面将证明 $S=S_M$ 。由于 t -余模 S 是连续的,所以 S 有三种情况,分别为: $S=S_M$; S 是连续阿基米德 t -余模以及 S 是连续阿基米德 t -余模的序和形式。

(1) 若 S 是连续阿基米德 t -余模,设 s 是 S 的加法生成子,令 $v,w \neq 1, u < v < w$,则 $s(u) < s(v) < s(w)$,由命题5,有

$$\begin{aligned} I_S(u,I_S(v,w)) &= I_S(u,s^{-1}(\max(0,s(w)-s(v)))) = I_S(u,s^{-1}(s(w)-s(v))) \\ &= s^{-1}(\max(0,s(s^{-1}(s(w)-s(v))-s(u)))) \\ &= \begin{cases} s^{-1}(s(w)-s(v)-s(u)), & s(u) < s(w)-s(v), \\ 0, & s(u) \geq s(w)-s(v), \end{cases} \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} I_S(I_S(u,v),I_S(u,w)) &= I_S(s^{-1}(\max(0,s(v)-s(u))),s^{-1}(\max(0,s(w)-s(u)))) \\ &= I_S(s^{-1}(s(v)-s(u)),s^{-1}(s(w)-s(u))) \\ &= s^{-1}(\max(0,s(s^{-1}(s(w)-s(u))-s(s^{-1}(s(v)-s(u)))))) \\ &= s^{-1}(s(w)-s(v)), \end{aligned}$$

因此, $I_S(u,I_S(v,w)) \neq I_S(I_S(u,v),I_S(u,w))$ 。

(2) 若 S 是连续阿基米德 t -余模的序和形式,即,当

$$S(x,y) = \begin{cases} a_a + (e_a - a_a)S_a(\frac{x-a_a}{e_a-a_a},\frac{y-a_a}{e_a-a_a}), & (x,y) \in [a_a,e_a]^2, \\ \max(x,y), & \text{其它}, \end{cases}$$

$$\text{时,有 } I_S(x,y) = \begin{cases} y, & x \leq y, \\ a_a + (e_a - a_a)I_{S_a}(\frac{x-a_a}{e_a-a_a},\frac{y-a_a}{e_a-a_a}), & x,y \in [a_a,e_a], \text{ 式中 } S_a \text{ 是连续阿基米德 } t \text{-余模。} \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

假设 s_a 是 S_a 的加法生成子,由于 I_S 满足方程(1),所以,当 $x,y,z \in [a_a,e_a]$ 时,有

$$I_{S_a}(\frac{x-a_a}{e_a-a_a},I_{S_a}(\frac{y-a_a}{e_a-a_a},\frac{z-a_a}{e_a-a_a}))=I_{S_a}(I_{S_a}(\frac{x-a_a}{e_a-a_a},\frac{y-a_a}{e_a-a_a}),I_{S_a}(\frac{x-a_a}{e_a-a_a},\frac{z-a_a}{e_a-a_a})),$$

因为 S_a 是连续阿基米德 t -余模,这与情况(1)相矛盾。由于 S 是连续的,由充分性证明可知, $S=S_M$ 。

综上, I_U 满足方程(1)当且仅当 $T=T_M, S=S_M$ 。

2.2 $U \in \mathcal{U}_h$

定理 4 设 $U \in \mathcal{U}_h$, 则一致模 U 的剩余蕴涵 I_U 不满足方程(1)。

证 当 $x=1, 0 < y < 1, z=0$ 时,

$$I_U(x, I_U(y, z)) = I_U(1, I_U(y, 0)) = I_U(1, h^{-1}(h(0) - h(y))) = I_U(1, 0) = h^{-1}(h(0) - h(1)) = 0,$$

而另一方面,

$$I_U(I_U(x, y), I_U(x, z)) = I_U(I_U(1, y), I_U(1, 0)) = I_U(h^{-1}(h(y) - h(1)), 0) = I_U(0, 0) = 1.$$

因此, $I_U(x, I_U(y, z)) \neq I_U(I_U(x, y), I_U(x, z))$, I_U 不满足方程(1)。

2.3 $U \in \mathcal{U}_{\text{Idem}}$

定理 5 设 $U \in \mathcal{U}_{\text{Idem}}$, 则 U 的剩余蕴涵 I_U 满足方程(1)当且仅当

$$U(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), & x, y \in [e, 1], \\ \min(x, y), & \text{其它。} \end{cases}$$

证 设 I_U 满足方程(1), 取 $x=1, y=z=e$, 有

$$I_U(x, I_U(y, z)) = I_U(1, I_U(e, e)) = I(1, e) = \min(g(1), e) = \begin{cases} e, & g(1) = e, \\ g(1), & g(1) < e. \end{cases}$$

若 $g(1) < e$, 则 $I_U(1, I_U(e, e)) = g(1)$, 而方程(1)的右边,

$$I_U(I_U(1, e), I_U(1, e)) = I_U(g(1), g(1)) = \max(g(g(1)), g(1)) = g(g(1)),$$

因为 $g(1) < e$, 所以 $g(1) < e \leq g(g(1))$, 进而, $I_U(x, I_U(y, z)) \neq I_U(I_U(x, y), I_U(x, z))$, 这与已知条件矛盾, 因此, $g(1) = e$ 。又因为 $g(e) = e$, 所以由 g 的单调性, 当 $e \leq x \leq 1$ 时, $g(x) = e$ 。再由定理

2 和一致模的对称性可知, $U(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), & x, y \in [e, 1], \\ \min(x, y), & \text{其它。} \end{cases}$ 反过来, 当 $U(x, y) =$

$\begin{cases} \max(x, y), & x, y \in [e, 1], \\ \min(x, y), & \text{其它,} \end{cases}$ 时, $U \in \mathcal{U}_{\min}$, 且其基础 t -模和基础 t -余模分别为 T_M 和 S_M , 由定理 3 知, I_U

满足方程(1)。

综上, I_U 满足方程(1)当且仅当 $U(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), & x, y \in [e, 1], \\ \min(x, y), & \text{其它。} \end{cases}$

2.4 U 为 $(0, 1)^2$ 上连续的一致模

命题 6 设 $U \in \mathcal{U}_{\cos, \min}$, 则一致模 U 的剩余蕴涵 I_U 不满足方程(1)。

证 由命题 3(3)可知 $\beta \in [0, e], 0 < e < 1$, 由于 $\beta < \beta + (1 - \beta)e < 1$, 取 $\beta + (1 - \beta)e < x < 1$, 因此 $x \in (\beta, 1)$, 取 $y = z = \beta + (1 - \beta)e$, 则 $y, z \in (\beta, 1)$ 。于是,

$$\begin{aligned} I_U(x, I_U(y, z)) &= I_U(x, I_U(\beta + (1 - \beta)e, \beta + (1 - \beta)e)) \\ &= I_U(x, \beta + (1 - \beta)) I_R\left(\frac{\beta + (1 - \beta)e - \beta}{1 - \beta}, \frac{\beta + (1 - \beta)e - \beta}{1 - \beta}\right) \\ &= I_U(x, \beta + (1 - \beta)) I_R(e, e). \end{aligned}$$

由命题 2, $I_R(x, x) = e$, 故

$$I_U(x, I_U(y, z)) = I_U(x, \beta + (1 - \beta)) I_R(e, e) = I_U(x, \beta + (1 - \beta)e) = \beta + (1 - \beta) I_R\left(\frac{x - \beta}{1 - \beta}, e\right).$$

当 $x, y, z \in (\beta, 1)$ 时, 有 $I_U(x, y) \in (\beta, 1)$, $I_U(x, z) \in (\beta, 1)$, 方程(1)的右边为

$$\begin{aligned} I_U(I_U(x, y), I_U(x, z)) &= \beta + (1 - \beta) I_R\left(\frac{\beta + (1 - \beta) I_R\left(\frac{x - \beta}{1 - \beta}, e\right) - \beta}{1 - \beta}, \frac{\beta + (1 - \beta) I_R\left(\frac{x - \beta}{1 - \beta}, e\right) - \beta}{1 - \beta}\right) \\ &= \beta + (1 - \beta) I_R\left(I_R\left(\frac{x - \beta}{1 - \beta}, e\right), I_R\left(\frac{x - \beta}{1 - \beta}, e\right)\right) \\ &= \beta + (1 - \beta)e. \end{aligned}$$

假设 $I_U(x, I_U(y, z)) = I_U(I_U(x, y), I_U(x, z))$, 则 $I_R(\frac{x-\beta}{1-\beta}, e) = e$, 因为 I_R 是由可表示一致模 R 生成的剩余蕴涵, 设 h 是可表示一致模 R 的加法生成子, 原式即为 $h^{-1}(h(e) - h(\frac{x-\beta}{1-\beta})) = e$, 所以 $h(\frac{x-\beta}{1-\beta}) = 0$, 根据 h 的严格单调性可知, $x = \beta + (1-\beta)e$, 与 $x > \beta + (1-\beta)e$ 矛盾。因此, I_U 不满足方程(1)。

推论 1 设 $U \in \mathcal{U}_{\cos, \max}$, 则一致模 U 的剩余蕴涵 I_U 不满足方程(1)。

证 由命题 3(4)可知 $\gamma \in (e, 1]$, $0 < e < 1$, 取 x 满足 $0 < x < e\gamma < \gamma$, 因此 $x \in (0, \gamma)$, 取 $y = z = e\gamma$, 则 $y, z \in (0, \gamma)$ 。和定理 6 的证明类似, 假设 I_U 满足方程(1), 将 x, y, z 带入方程(1)两端可得到矛盾, 因此, I_U 不满足方程(1)。

3 广义弗雷格方程的生成蕴涵解

生成蕴涵是指由连续阿基米德 t -模和 t -余模的加法生成子和乘法生成子生成的蕴涵, 文献[18]指出了 f -蕴涵, g -蕴涵不满足广义弗雷格方程。随着研究的深入, 许多学者提出了更多的生成蕴涵, 例如, h -生成蕴涵, k -生成蕴涵, (f, g) -生成蕴涵和 (θ, t) -生成蕴涵, 是不同于 f -蕴涵, g -蕴涵的生成蕴涵, 这拓展了模糊蕴涵的范围, 也促使我们去进一步研究提出的这些新的生成蕴涵是否满足广义弗雷格方程, 然后找出该方程的生成蕴涵解。

3.1 h -生成蕴涵

定义 9 [26] 如果 $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是一个严格递减, 连续且满足 $h(0) = 1$ 的一元函数, 称 h 为 h -生成子, 对任意的 $x, y \in [0, 1]$, 定义二元函数 $I_h: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 为

$$I_h(x, y) = h^{(-1)}(xh(y)),$$

式中 h 是 h -生成子, $h^{(-1)}$ 是 h 的伪逆。容易验证, I_h 是一个模糊蕴涵, 我们称为 h -生成蕴涵, 且对任意的 $x, y \in [0, 1]$, I_h 还可以表示为 $I_h(x, y) = h^{-1}(\max(xh(y), h(1)))$ 。

定理 6 定义 9 中的 h -生成蕴涵 I_h 不满足方程(1)。

证 假设 I_h 满足方程(1)。令 $x, y, z \in (0, 1)$, 我们有

$$\begin{aligned} I_h(x, I_h(y, z)) &= I_h(x, h^{-1}(\max(yh(z), h(1)))) = h^{-1}(\max(xh(h^{-1}(\max(yh(z), h(1))))), h(1))) \\ &= h^{-1}(\max(\max(xyh(z), xh(1)), h(1))) = h^{-1}(\max(xyh(z), h(1)))。 \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} I_h(I_h(x, y), I_h(x, z)) &= I_h(h^{-1}(\max(xh(y), h(1))), h^{-1}(\max(xh(z), h(1)))) \\ &= h^{-1}(\max(h^{-1}(\max(xh(y), h(1))) \max(xh(z), h(1)), h(1))) \\ &= h^{-1}(\max(\max(xh(z)h^{-1}(\max(xh(y), h(1))), h(1)h^{-1}(\max(xh(y), h(1))))), h(1))) \\ &= h^{-1}(\max(xh(z)h^{-1}(\max(xh(y), h(1))), h(1)))。 \end{aligned}$$

因为 I_h 满足方程(1), 所以 $h^{-1}(\max(xyh(z), h(1))) = h^{-1}(\max(xh(z)h^{-1}(\max(xh(y), h(1))), h(1)))$, 即 $xyh(z) = xh(z)h^{-1}(\max(xh(y), h(1)))$ 。

因为 $x, y, z \in (0, 1)$, 所以, $y = h^{-1}(\max(xh(y), h(1)))$, $h(y) = \max(xh(y), h(1))$, 这与 h 的严格单调性矛盾。所以, I_h 不满足方程(1)。

3.2 k -生成蕴涵

定义 10 [27] 如果 $k: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是一个严格递增, 连续且满足 $k(1) = 1$ 的一元函数, 对任意的 $x, y \in [0, 1]$, 定义二元函数 $I_k: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 为:

$$I_k(x, y) = k^{(-1)}(\frac{k(y)}{x}),$$

式中 $k^{(-1)}$ 是 k 的伪逆, 且规定 $\frac{0}{0} = 1, \frac{1}{0} = \infty$ 。容易验证, I_k 是一个模糊蕴涵, 称为 k -生成蕴涵。

命题 7 [27] 对于 k -生成蕴涵 I_k , 下述结论成立:

(1) 如果 $k(0) > 0$, 那么 I_k 的自然否定 N_{I_k} 连续, 如果 $k(0) = 0$, 那么 I_k 的自然否定 N_{I_k} 不连续。

(2) I_k 是 g -蕴涵当且仅当 $k(0) = 0$ 。

命题 8 定义 10 中的 k -生成蕴涵 I_k 不满足方程(1)。

证 假设 I_k 满足方程(1), 由命题 4(2)可知, I_k 的自然否定 N_{I_k} 不连续, 由命题 7(1)可得 $k(0) = 0$, 再由命题 7(2), I_k 是 g -蕴涵, 根据命题 4(3), g -蕴涵不满足方程(1), 因此, I_k 不满足方程(1)。

3.3 (f, g) -生成蕴涵

定义 11 ^[28] 如果 $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ 是一个严格递减, 连续且满足 $f(1) = 0$ 的一元函数, 称 f 为 f -生成子。又设 $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是一个递增且满足 $g(0) = 0, g(1) = 1$ 的一元函数, 对任意的 $x, y \in [0, 1]$, 定义二元函数 $I_{(f, g)}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 为:

$$I_{(f, g)}(x, y) = f^{-1}(g(x)f(y)),$$

式中 f 是 f -生成子, 且规定 $0 \cdot \infty = 0$ 。容易验证, $I_{(f, g)}$ 是一个模糊蕴涵, 称为 (f, g) -生成蕴涵。

定理 7 定义 11 中的 (f, g) -生成蕴涵 $I_{(f, g)}$ 满足方程(1)当且仅当对 $g(x) > 0$, 有 $g(y) = g(I_{(f, g)}(x, y))$, 即, $g(y) = g(f^{-1}(g(x)f(y)))$ 成立。

证明 当 $I_{(f, g)}$ 满足方程(1)时, 根据 $I_{(f, g)}$ 的定义, 对任意的 $x, y, z \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} I_{(f, g)}(x, I_{(f, g)}(y, z)) &= f^{-1}(g(x)f(f^{-1}(g(y)f(z)))) = f^{-1}(g(x)g(y)f(z)), \\ I_{(f, g)}(I_{(f, g)}(x, y), I_{(f, g)}(x, z)) &= f^{-1}(g(f^{-1}(g(x)f(y)))f(f^{-1}(g(x)f(z)))) \\ &= f^{-1}(g(f^{-1}(g(x)f(y)))g(x)f(z)). \end{aligned}$$

因为 $I_{(f, g)}$ 满足方程(1), 所以, $f^{-1}(g(x)g(y)f(z)) = f^{-1}(g(f^{-1}(g(x)f(y)))g(x)f(z))$, 即, $g(x)g(y)f(z) = g(f^{-1}(g(x)f(y)))g(x)f(z)$ 。

当 $g(x) > 0$ 时, 取 $z \in (0, 1)$, 有 $f(z) \neq 0$, 从而, $g(y) = g(f^{-1}(g(x)f(y)))$ 。

反过来, 对任意的 $x, y, z \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} I_{(f, g)}(x, I_{(f, g)}(y, z)) &= f^{-1}(g(x)f(f^{-1}(g(y)f(z)))) = f^{-1}(g(x)g(y)f(z)), \\ I_{(f, g)}(I_{(f, g)}(x, y), I_{(f, g)}(x, z)) &= f^{-1}(g(f^{-1}(g(x)f(y)))f(f^{-1}(g(x)f(z)))) \\ &= f^{-1}(g(f^{-1}(g(x)f(y)))g(x)f(z)), \end{aligned}$$

当 $g(x) = 0$ 时, $I_{(f, g)}(x, I_{(f, g)}(y, z)) = 1 = I_{(f, g)}(I_{(f, g)}(x, y), I_{(f, g)}(x, z))$ 。

当 $g(x) > 0$ 时, 由已知 $g(y) = g(f^{-1}(g(x)f(y)))$ 成立, 所以

$$f^{-1}(g(x)g(y)f(z)) = f^{-1}(g(f^{-1}(g(x)f(y)))g(x)f(z)),$$

即 $I_{(f, g)}(x, I_{(f, g)}(y, z)) = I_{(f, g)}(I_{(f, g)}(x, y), I_{(f, g)}(x, z))$, $I_{(f, g)}$ 满足方程(1)。

根据定理 7, 可以找到满足方程(1)的两族 (f, g) -生成蕴涵。

推论 2 设 $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ 为 f -生成子, $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是一个递增且满足 $g(0) = 0, g(1) = 1, g(x) \in \{0, 1\}$ 的一元函数, 则 (f, g) -生成蕴涵 $I_{(f, g)}$ 满足方程(1)。

注 3 以上推论中, 令 $\alpha = \sup\{x \in [0, 1] \mid g(x) = 0\}$, 根据 α 的不同取值, 可以得到不同的 (f, g) -生成蕴涵

$$I_{(f, g)}^{\alpha}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \alpha), \\ 1 \text{ 或 } y, & x = \alpha, \text{ 其中 } g(\alpha) = 0 \text{ 时, } I_{(f, g)}(\alpha, y) = 1; g(\alpha) = 1 \text{ 时, } I_{(f, g)}(\alpha, y) = y. \\ y, & x \in (\alpha, 1], \end{cases}$$

推论 2, 这类蕴涵均满足方程(1)。

推论 3 设 $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ 为 f -生成子, $\beta \in (0, 1)$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \beta, & x \in (0, 1), \\ 1, & x = 1, \end{cases}$ 则 (f, g) -生成蕴涵

$$I_{(f, g)}^{\beta}(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ f^{-1}(\beta f(y)), & x \in (0, 1), \text{ 满足方程(1)}. \\ y, & x = 1, \end{cases}$$

3.4 (θ, t) -生成蕴涵

定义 12 ^[29] 如果 $\theta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是一个严格递增且满足 $\theta(1) = 1$ 的一元函数, $t: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ 是一个严格递减且满足 $t(1) = 0$ 的一元函数。如果 $t(0) > \theta(1^-) - \theta(0)$, 称 (θ, t) 为 (θ, t) -生成子。对任意的 $x, y \in [0, 1]$, 定义二元函数 $I_{(\theta, t)}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 为

$$I_{(\theta, t)}(x, y) = \theta^{(-1)}(\min(t(x) + \theta(y), 1)),$$

式中 (θ, t) 是 (θ, t) -生成子, $\theta^{(-1)}$ 是 θ 的伪逆。容易验证, $I_{(\theta, t)}$ 是一个模糊蕴涵, 称为 (θ, t) -生成蕴涵。

命题 9 ^[29] 对于 (θ, t) -生成蕴涵 $I_{(\theta, t)}$, 下述结论成立:

- (1) $N_{I_{(\theta, t)}}$ 是连续的当且仅当一元函数 t 是连续的。
- (2) $N_{I_{(\theta, t)}} = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ 1, & \text{其它}, \end{cases}$ 当且仅当 $t(1^-) \geq \theta(1^-) - \theta(0)$ 。

命题 10 对于定义 12 中的 (θ, t) -生成蕴涵 $I_{(\theta, t)}$, 下述结论成立:

- (1) 如果 $I_{(\theta, t)}$ 满足方程(1), 那么一元函数 t 是不连续的。
- (2) 当 $t(1^-) \geq \theta(1^-) - \theta(0)$ 时, $I_{(\theta, t)}$ 满足方程(1)。

证 (1) 如果 $I_{(\theta, t)}$ 满足方程(1), 由命题 4(2)可知, $N_{I_{(\theta, t)}}$ 是不连续的, 再由命题 9 (1) 可知, 一元函数 t 是不连续的。

- (2) 当 $t(1^-) \geq \theta(1^-) - \theta(0)$ 时, 由命题 9 (2) 可知, $N_{I_{(\theta, t)}} = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ 1, & \text{其它}, \end{cases}$ 经过计算可以得到 $I_{(\theta, t)} = I_{WB}$ 。

容易验证, $I_{(\theta, t)}$ 满足方程(1)。

4 总结与展望

本文针对一致模剩余蕴涵和常见类生成蕴涵, 研究了广义弗雷格方程, 刻画了满足该方程的 $\mathcal{U}_{\min}$ 中一致模剩余蕴涵, 幂等一致模剩余蕴涵以及 (f, g) -生成蕴涵, 找出了满足广义弗雷格方程的一致模剩余蕴涵, 两族 (f, g) -生成蕴涵和一个 (θ, t) -生成蕴涵 I_{WB} , 而可表示一致模、 $(0, 1)^2$ 上连续的一致模的剩余蕴涵以及 h -生成蕴涵, k -生成蕴涵均不满足该方程, 以上结论进一步丰富了广义弗雷格方程的研究成果, 为广义弗雷格方程的实际应用提供了理论依据。在未来的研究中, 将针对一致模的 QL -和 D -蕴涵, 继续研究广义弗雷格方程成立的条件, 同时, 将对 Cruz 等人^[15]提出的模糊控制系统中的 UFRN 污水处理系统选择不同的模糊蕴涵算子进行比较研究。

参 考 文 献

- [1] 秦侨, 杨超, 杨海涛, 等. 结合模糊控制的深度强化学习交通灯控制策略[J]. 计算机应用研究, 2024, 41(01): 165-169.
- [2] 陈伟, 涂钊, 刘建宏, 等. 基于油电混动六旋翼无人机的模糊 PID 飞行控制策略研究[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2024, 43(08): 124-132.
- [3] 史培龙, 王彩瑞, 马强, 等. 考虑轨迹预测的大曲率道路智能车辆动态避障控制[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2024, 44(04): 161-174.
- [4] JAYARAN B, MESIAR R. I-fuzzy equivalence relations and I-fuzzy partitions[J]. Information Sciences, 2009, 179: 1278-1297.
- [5] BAO Y L, YANG H L, SHE Y H. Using one axiom to characterize L-fuzzy rough approximation operators based on residuated lattices [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 336: 87-115.
- [6] VALLE M E, SUSSNER P. A general framework for fuzzy morphological associative memories[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 159(7): 747-768.
- [7] KERRE E E, NACHTEGAEL M. Fuzzy Techniques in Image Processing[M]. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [8] POTA M, ESPOSITO M, PIETRO G D. Likelihood-fuzzy analysis: from data through statistics, to interpretable fuzzy classifiers[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2018, 93: 88-102.
- [9] ALSINA C, TRILLAS E. When (S, N) -implications are (T, T_1) -conditional functions? [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 134(2): 305-310.

- [10] BACZYŃSKI M, GRZEGORZEWSKI P, MESIAR R, et al. Fuzzy implications based on semicopulas[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016, 323: 138-151.
- [11] MANDAL S, JAYARAM B. SISO fuzzy relational inference systems based on fuzzy implications are universal approximators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015, 277: 1-21.
- [12] BĄCZYŃSKI M, DREWNIAK J, SOBREA J. Semigroups of fuzzy implications[J]. Tatra Mountains Mathematical Publications, 2001, 21: 61-71.
- [13] DREWNIAK J. Invariant fuzzy implications[J]. Soft Computing, 2006, 10(10): 506-513.
- [14] MASSANET S, RUIZ-AGUILERA D R, TORRENA J. Characterization of a class of fuzzy implication functions satisfying the law of importation with respect to a fixed uninorm-part I [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(4): 1983-1994.
- [15] MAS M, MONSERRAT M, TORRENS J. Modus ponens and modus tollens in discrete implications[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 49(2): 422-435.
- [16] BALASUBRAMANIAM J, RAO M J C. On the distributivity of implication operators over T and S norms[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2004, 12(2): 194-198.
- [17] QIAO J S, HU B Q. On the distributive laws of fuzzy implication functions over additively generated overlap and grouping functions[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 2018, 26(4): 2421-2433.
- [18] CRUZ A, BEDREGAL B C, SANTIAGO R H N. On the characterizations of fuzzy implications satisfying $I(x, I(y, z)) = I(I(x, y), I(x, z))$ [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2018, 93: 261-276.
- [19] PENG Z M, PENG C. New results of fuzzy implications satisfying $I(x, I(y, z)) = I(I(x, y), I(x, z))$ [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 124: 82-102.
- [20] ZHANG C, QIN F. New results of (U, N) -implications satisfying $I(r, I(s, t)) = I(I(r, s), I(r, t))$ [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2024, 169: 109-163.
- [21] KLEMENT E P, MESIAR R, PAP E. Triangular Norms[M]. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2000.
- [22] BĄCZYŃSKI M, BALASUBRAMANIAM J. Fuzzy Implications[M]. Berlin: Springer, 2008.
- [23] HU S K, LI Z F. The structure of continuous uninorms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(1): 43-52.
- [24] RUIZ-AGUILERA D, TORRENS J. S- and R-implications from uninorms continuous in $(0, 1)^2$ and their distributivity over uninorms [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(6): 832-852.
- [25] MAS M, MONSERRAT M, TORRENS J. A characterization of (U, N) -, RU -, QL - and D -implications derived from uninorms satisfying the law of importation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(10): 1369-1387.
- [26] BALASUBRAMANIAM J. Yager's new class of implications J_f and some classical tautologies[J]. Information Sciences, 2006, 177(3): 930-946.
- [27] ZHOU H J. Characterizations of fuzzy implications generated by continuous multiplicative generators of T-norms[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 29: 2988-3002.
- [28] XIE A F, LIU H W. A generalization of Yager's f -generated implications[J]. International Journal of Approximate Reasoning. 2013, 54(1): 35-46.
- [29] ZHOU H J. Characterizations and applications of fuzzy implications generated by a pair of generators of T-norms and the usual addition of real numbers[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30: 1952-1966.

(责任编辑:刘庆松)