

引用:张子涵,刘广刚. 具有周期位势的非线性阻尼振动系统周期解的存在性研究[J]. 聊城大学学报(自然科学版),2025, 38(5):663-668.

Citation:ZHANG Zihan, LIU Guanggang. Study on the existence of periodic solutions for nonlinear damped vibration systems with periodic potential[J]. Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition),2025, 38(5): 663-668.

文章编号 1672-6634(2025)05-0663-06

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2025020013

具有周期位势的非线性阻尼振动系统 周期解的存在性研究

张子涵,刘广刚

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘要 非线性阻尼振动系统是一类重要的非线性系统,广泛出现于控制系统、电路系统、机械系统和其他工程学科中的非线性动力学系统中,其周期解的存在性对系统的稳定性以及控制设计有重要影响。本文研究 N 维状态空间上具有周期位势的二阶非线性阻尼振动系统,首先,利用极小极大原理得到非线性阻尼系统有至少 $N+1$ 个几何相异的周期解,然后,当系统的周期解都是非退化的时候,利用 Morse 理论分析系统的拓扑结构,推断几何相异的周期解的数量至少为 2^N 。

关键词 非线性阻尼振动系统;周期解;变分法;Morse 理论

中图分类号 O322

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Study on the existence of periodic solutions for nonlinear damped vibration systems with periodic potential

ZHANG Zihan, LIU Guanggang

(School of Mathematical and Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract Nonlinear damping vibration system is an important type of nonlinear system, widely appearing in control systems, circuit systems, mechanical systems and other engineering disciplines in nonlinear dynamic systems. The existence of periodic solutions has a significant impact on the stability and control design of the system. In this paper, the second-order nonlinear damping vibration system with periodic potential in N dimensional state space is studied. Firstly, the minimax principle is used to obtain that the nonlinear damping system has at least $N+1$ geometrically distinct periodic solutions. Then, when the periodic solutions of the system are all non degenerate, the Morse theory is used to analyze the topological structure of the system and infer that the number of geometrically distinct periodic solutions is at least 2^N .

Keywords nonlinear damped vibration system; periodic solution; variational methods; Morse theory

0 引言

非线性阻尼振动系统是一类含有阻尼项的非线性系统,这类系统在控制系统、电路系统、机械系统和其

收稿日期:2024-02-25

基金项目:国家自然科学基金项目(11901270);山东省自然科学基金项目(ZR2019BA019)资助

通信作者:刘广刚,男,汉族,博士,副教授,研究方向:哈密顿系统、最优控制,E-mail:lgg112@163.com.

他工程学科中广泛存在^[1-3],如考虑粘滞摩擦力的质量-弹簧系统, m 连杆机器人的非线性动力学问题等。与线性阻尼振动系统相对比,非线性阻尼振动系统的输入和输出行为更加复杂和多样化。非线性阻尼振动系统的控制方法包括反馈控制、非线性控制、自适应控制、能量整形控制和神经网络控制等,其目的是实现系统的稳定性和优化目标,在机器人、航空航天和机械系统等领域应用广泛。在非线性阻尼振动系统的轨道中,周期解是一类非常重要的轨道,这类轨道的存在对系统的稳定性有重要影响,并对系统的控制设计有重要的意义^[4-6]。

近几十年来有关阻尼振动系统的周期解的存在性被广泛研究。许多作者利用变分方法证明了阻尼振动系统的周期解的存在性和多重性^[7-18]。文献[7]建立了阻尼振动系统的变分结构,并利用变分方法证明了一类凸位势条件下阻尼振动系统周期解的存在性。此后,人们在各种位势条件下研究了非线性阻尼振动系统周期解的存在性和多重性。文献[8]利用极小极大方法证明了超二次位势条件下阻尼振动系统周期解的存在性。文献^[9-10]通过运用变形的喷泉定理得到了阻尼振动系统在渐近二次位势和超二次位势条件下无穷多个周期解的存在性。文献[11]又运用变分法得到二阶阻尼振动系统在次二次位势条件下的无穷多个周期解。

本文通过极小极大方法和拓扑方法中的 Morse 理论研究 N 维状态空间上的非线性阻尼振动系统在周期位势条件下的周期解的存在性。在过去的四十年里,许多作者利用拓扑方法研究了具有周期位势的哈密顿系统的周期解的存在性^[19-23]。然而,据本文作者所知,具有周期位势的阻尼振动系统的周期解的存在性之前尚未被研究。本文将采用处理周期位势哈密顿系统的一些技巧来研究具有周期位势的非线性阻尼振动系统,主要贡献为:利用群不变泛函的极小极大原理得到了具有周期位势的非线性阻尼振动系统至少有 $N+1$ 个几何相异的周期解,进一步,如果系统的周期解都是非退化的,利用 Morse 理论得到系统至少有 2^N 个几何相异的周期解。

1 预备知识

本节给出文中需要用到的群不变泛函和 Morse 理论的相关定义和命题。首先介绍群不变泛函的相关概念和结论。

定义 1^[23] 令 G 是 Banach 空间 X 的离散子群,并且 $\pi: X \rightarrow X/G$ 是典型满射。如果 X 的子集 A 满足 $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, 则称 A 是 G 不变的。如果定义在 X 上的泛函 f 满足对于任意的 $u \in X$ 和 $g \in G$ 都有 $f(g(u)) = f(u)$, 则称 f 是 G 不变的泛函。

如果可微泛函 $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ 是 G 不变的,那么 φ' 也是 G 不变的。因此,如果 u 是 φ 的一个临界点,那么 $\pi^{-1}(\pi(u))$ 是 φ 的一组临界点,这组临界点被称为 φ 的临界轨道。

定义 2^[23] 如果 G 不变泛函 φ 满足: X 中任意满足条件 $\varphi(u_k)$ 有界并且 $\varphi'(u_k) \rightarrow 0$ 的序列 $\{u_k\}$, 序列 $\{\pi(u_k)\}$ 有一个收敛的子序列,那么称 φ 满足 $(PS)_G$ 条件。

命题 1^[23] 假设 G 不变泛函 $\varphi \in C^1(X, \mathbf{R})$, 并且满足 $(PS)_G$ 条件。如果 φ 是下方有界的泛函,由 G 生成的空间的维数 N 是有限的,那么 φ 至少有 $N+1$ 个临界轨道。

下面介绍 Morse 理论的一些概念和结论。令 M 是一个 C^2 类的黎曼流形, $\varphi \in C^2(M, \mathbf{R})$ 是 M 上的泛函。用 $H_q(A, B)$ 表示系数在域 $\mathcal{F}$ 上的拓扑对 (A, B) 的第 q 个奇异相对同调群。

定义 3^[21] 令 φ 的一个孤立的临界点 u 满足 $\varphi(u) = c$, 那么 φ 在 u 处的临界群为

$$C_q(\varphi, u) := H_q(\varphi^c, \varphi^c \setminus \{u\}), \quad q \in \mathbf{Z},$$

式中 $\varphi^c = \{u \in M \mid \varphi(u) \leq c\}$ 。

命题 2^[21] 令 M 是 Hilbert 空间上的一个 C^2 类黎曼流形,令 u 是 $\varphi \in C^2(M, \mathbf{R})$ 的一个 Morse 指标为 k 的非退化的临界点,则有 $C_q(\varphi, u) := \delta_{q,k} \mathcal{F}, n = 0, 1, \dots$ 。

定义 4^[21] 如果泛函 φ 满足: M 中任意满足条件 $\varphi(u_k)$ 有界并且 $\varphi'(u_k) \rightarrow 0$ 的序列 $\{u_k\}$, 序列 $\{u_k\}$

有一个收敛的子序列,那么称 φ 满足(PS)条件。

命题 3^[21] 令 M 是一个 C^2 类的完备黎曼流形,令 $\varphi \in C^2(M, \mathbf{R})$ 。如果满足 3 个条件:(1) φ 满足(PS)条件;(2) φ 在 M 上下方有界;(3) φ 只有有限个临界点 $u_1, u_2, \dots, u_k$, 而 $\dim C_q(\varphi, u_i)$ 对于每个 q 都是有限的并且对充分大的 q 为 0,那么就有一个系数是非负整数的多项式 $Q(t)$,使得 $\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \dim C_q(\varphi, u_i) t^q = \sum_{q=0}^{\infty} \dim H_q(M, \mathbb{Z}) t^q + (1+t)Q(t)$ 。

2 主要结果及变分框架

本文研究下列二阶非线性阻尼振动系统

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + q(t)\dot{u}(t) = H_u(t, u(t)), t \in \mathbf{R}, \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

式中 $H(t, u) = H(t, u_1, u_2, \dots, u_N) \in C^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ 关于时间 t 是 T 周期的并且关于每一状态变量 u_i 是 T_i 周期的(其中 $T > 0, T_i > 0, 1 \leq i \leq N$), $q(t)\dot{u}(t)$ 是阻尼项, $q(t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 是 T 周期的并且满足 $\int_0^T q(s)ds = 0$ 。令 $\{e_i\}_{i=1}^N$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的标准基,系统(1)的两个周期解 u 和 v 如果满足 $u \neq v \pmod{T_i e_i}$ ($1 \leq i \leq N$),则称它们为几何相异的周期解。

下面陈述本文的主要结果。

定理 1 假设: (H_1) 存在 $h \in L^1([0, T], \mathbf{R})$, 使得 $|H(t, u)| + |H_u(t, u)| \leq h(t)$ 成立; (H_2) 存在 $T_i > 0, 1 \leq i \leq N$, 使得 $H(t, u + T_i e_i) = H(t, u), 1 \leq i \leq N$, 那么系统(1)至少有 $N+1$ 个几何相异的周期解;如果系统(1)的周期解都是非退化的,那么系统(1)至少有 2^N 个几何相异的周期解。

下面介绍系统(1)的变分框架。定义 $L^2 = L^2([0, T], \mathbf{R}^N)$, 令 $H_T^1 = \{u: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^N \mid u(0) = u(T) \text{ 且 } \dot{u} \in L^2\}$ 是一般的 Hilbert 空间,其中 u 绝对连续,对于任意的 $u, v \in H_T^1$, 其标准内积为

$$\langle u, v \rangle_0 = \int_0^T [(\dot{u}(t), \dot{v}(t)) + (u(t), v(t))] dt,$$

空间 H_T^1 对应的范数定义为 $\|u\|_0 = (\int_0^T (|\dot{u}(t)|^2 + |u(t)|^2) dt)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H_T^1$ 。令 $Q(t) = \int_0^t q(s)ds$, 定义 $\langle u, v \rangle = \int_0^T e^{Q(t)} [(\dot{u}(t), \dot{v}(t)) + (u(t), v(t))] dt, \forall u, v \in H_T^1$, 且 $\|u\| = (\int_0^T e^{Q(t)} (|\dot{u}(t)|^2 + |u(t)|^2) dt)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H_T^1$ 。由于 q 在 $\mathbf{R}$ 上局部 Lebesgue 可积,故 Q 是连续函数,因此存在 c_1 和 c_2 使得

$$c_1 < e^{Q(t)} < c_2, t \in [0, T], \quad (2)$$

由(2)可知模 $\|\cdot\|$ 等价于 H_T^1 上通常的模 $\|\cdot\|_0$, 并且 H_T^1 紧嵌入 $C([0, T], \mathbf{R}^N)$ 。定义 H_T^1 上的泛函 J 为 $J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T e^{Q(t)} |\dot{u}(t)|^2 dt + \int_0^T e^{Q(t)} H(t, u(t)) dt$,

则泛函 J 在 H_T^1 上连续可微并且 J 的临界点是系统(1)的一个周期解^[7]。

3 主要结果的证明

本节将运用命题 1 和命题 3 证明定理 1。令 H_T^1 上的离散子群为 $G = \{\sum_{i=1}^N k_i T_i e_i \mid k_i \in \mathbf{Z}, 1 \leq i \leq N\}$, 其中 T_i 是条件 (H_2) 中的正数。通过条件 (H_2) 可知, J 是 G 不变的泛函。现在证明泛函 J 满足 $(PS)_G$ 条件。

引理 1 假设 $(H_1), (H_2)$ 成立,则 J 满足 $(PS)_G$ 条件。

证 令 H_T^1 上的序列 $\{u_k\}$ 满足:

对某个 $C > 0$ 有 $|J(u_n)| \leq C$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $J'(u_n) \rightarrow 0$. (3)

接下来证明序列 $\{\pi(u_n)\}$ 有一个收敛的子列。通过 (H_2) , (2) 和 (3), 得

$$\begin{aligned} C \geq J(u_n) &= \frac{1}{2} \int_0^T e^{Q(t)} |\dot{u}_n(t)|^2 dt + \int_0^T e^{Q(t)} H(t, u_n(t)) dt \\ &\geq \frac{c_1}{2} \int_0^T |\dot{u}_n(t)|^2 dt - c_2 \int_0^T h(t) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

这表明对于某个常数 C_2 , 有

$$\|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq C_2. \quad (5)$$

令 $u_n = \bar{u}_n + \tilde{u}_n$, 式中 $\bar{u}_n = \frac{1}{T} \int_0^T u_n(t) dt$. 存在唯一的 $k_{mi} \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq N$, 使得

$$(\bar{u}_n, e_i) - k_{mi} T_i \in [0, T_i), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (6)$$

通过 Wirtinger 不等式, 得

$$\|\tilde{u}_n\| \leq C_1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (7)$$

设 $\bar{u}_n^0 = ((\bar{u}_n, e_1) - k_{n1} T_1, \dots, (\bar{u}_n, e_N) - k_{nN} T_N)$, 且

$$v_n = \bar{u}_n^0 + \tilde{u}_n, \quad (8)$$

那么 v_n 是 $[u_n] \in H_T^1/G$ 的一个表示, 且有

$$\text{对某个 } c > 0 \text{ 有 } |J(v_n)| \leq c, \text{ 且当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } J'(v_n) \rightarrow 0. \quad (9)$$

现在证明 v_n 有一个收敛的子序列。

通过式(5), (6) 和 (7) 可知 v_n 在 H_T^1 上有界, 因此存在 $v \in H_T^1$ 使得

$$\text{在 } H_T^1 \text{ 上, } v_n \rightharpoonup v, \quad (10)$$

$$\text{在 } L^2 \text{ 上, } v_n \rightarrow v, \quad (11)$$

且

$$v_n(t) \text{ 在 } [0, T] \text{ 上一致收敛于 } v(t), \quad (12)$$

式中“ $\rightharpoonup$ ”表示弱收敛, “ $\rightarrow$ ”表示强收敛。那么通过式(10)和(11), 可知当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\langle J'(v_n) - J'(v), v_n - v \rangle \rightarrow 0. \quad (13)$$

注意到由式(2)可得

$$\begin{aligned} \langle J'(v_n) - J'(v), v_n - v \rangle &= \int_0^T e^{Q(t)} |\dot{v}_n - \dot{v}|^2 dt + \int_0^T e^{Q(t)} (H_u(t, v_n) - H_u(t, v), v_n - v) dt \\ &\geq c_1 \int_0^T |\dot{v}_n - \dot{v}|^2 dt - c_2 \int_0^T |H_u(t, v_n) - H_u(t, v)| |v_n - v| dt. \end{aligned} \quad (14)$$

通过式(12), 可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |H_u(t, v_n) - H_u(t, v)| |v_n - v| dt = 0. \quad (15)$$

由式(13)~(15)可知, 在 L^2 上, $\dot{v}_n \rightarrow \dot{v}$. 因此, 结合式(11), 可得在 H_T^1 上 $v_n \rightarrow v$ 的结论。引理 1 证明毕。

下文证明了本文的主要结果。

定理 1 的证明 第一步 证明系统(1)有至少 $N+1$ 个几何相异的周期解。首先, 证明 J 是 H_T^1 上的下方有界的泛函。通过 (H_2) , 对于所有的 $u \in H_T^1$, 都有

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \int_0^T e^{Q(t)} |\dot{u}(t)|^2 dt - C_1, \quad (16)$$

式中 C_1 是一个与 u 无关的常数。因此, J 是 H_T^1 上的下方有界的泛函。于是, 通过引理 1 和命题 1 可知, 泛函 J 至少有 $N+1$ 个临界轨道, 从而系统(1)至少有 2^N 个几何相异的周期解。

第二步 证明系统(1)的周期解都是非退化, 也即泛函 J 在其临界点的二阶导算子都是有界可逆时, 甚至

少有 2^N 个几何相异的周期解。可以自然地将 J 定义为流形 $M = T^N \times \widetilde{H}_T^1$ 的泛函,其中 T^N 是 N 维环面,而 $\widetilde{H}_T^1 = \{u \in H_T^1 : \int_0^T u(t) dt = 0\}$ 。由引理 1 可知,在 H_T^1 上 J 满足 $(PS)_G$ 条件,这说明 J 在 M 上满足 (PS) 条件。不失一般性,可以假设 J 只有有限个临界点 $u_1, \dots, u_l$, 通过命题 3 可知,存在一个非负整系数的多项式 $Q(t)$, 使得

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{i=1}^l \dim C_q(J, u_i) t^q = \sum_{q=0}^{\infty} \dim H_q(M, \emptyset) t^q + (1+t)Q(t). \quad (17)$$

注意到 T^N 是 M 的一个强形变收缩核。利用奇异同调群的同伦不变性和代数拓扑一个经典结果可知

$$H_q(M, \emptyset) \cong H_q(T^N, \emptyset) = \begin{cases} \mathcal{F}^{C_N^q}, & 1 \leq q \leq N, \\ 0, & q > N, \end{cases} \quad (18)$$

式中 C_N^q 是组合数。因此

$$\dim H_q(M, \emptyset) = \begin{cases} C_N^q, & 1 \leq q \leq N, \\ 0, & q > N, \end{cases} \quad (19)$$

因为 J 的临界点都是非退化的,通过命题 2 可知

$$C_q(J, u_i) = \delta_{q, k_i} \mathcal{F}, \quad 1 \leq i \leq l, \quad (20)$$

式中 k_i 是 u_i 的 Morse 指标。因此,对每个 $1 \leq i \leq l$, 都有

$$\dim C_q(J, u_i) = \begin{cases} 1, & q = k_i, \\ 0, & q \neq k_i. \end{cases} \quad (21)$$

然后,通过式(17),(19)和(21)可得

$$\sum_{i=1}^l t^{k_i} = \sum_{q=0}^N C_N^q t^q + (1+t)Q(t), \quad (22)$$

在式(22)中取 $t=1$, 注意到多项式 $Q(t)$ 有非负整数的系数,可得

$$l \geq \sum_{q=0}^N C_N^q = 2^N, \quad (23)$$

这表明泛函 J 在 M 上至少有 2^N 个临界点。因此,系统(1)至少有 2^N 个几何相异的周期解。

4 结论

本文用变分法研究了二阶非线性阻尼振动系统在周期位势条件下的周期解的存在性。首先证明系统的泛函 J 满足 $(PS)_G$ 条件,并且 J 是 H_T^1 上的下方有界的泛函,从而利用 G 不变泛函的多重临界点定理得到了系统至少存在 $N+1$ 个几何相异的周期解;若系统的周期解都是非退化的,利用 Morse 理论可以证明系统至少存在 2^N 个几何相异的周期解。这一研究对于分析系统的稳定性、震荡控制和能量优化等方面具有一定的意义。在今后将进一步研究二阶非线性阻尼振动系统的稳定性问题。

参 考 文 献

- [1] KHALIL H K. Nonlinear Systems[M]. Third Edition. New Jersey: Pearson Edition, 2002.
- [2] GUCKENHEIMER J, HOLMES P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields[M]. New York: Springer, 1983.
- [3] WIGGINS S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [4] 刘宇. 新型混沌及超混沌系统的动力学分析与控制[D]. 呼和浩特:内蒙古师范大学, 2024.
- [5] 张勇. 电力绳系系统的周期解求解及其稳定性分析[J]. 振动与冲击, 2011(5): 59-62, 82.
- [6] 杨育伟, 蔡洪. 电力绳系周期解求解及稳定性控制[J]. 飞行器测控学报, 2015, 34(2): 168-175.
- [7] WU X, CHEN S, TENG K. On variational methods for a class of damped vibration problems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods

- & Applications, 2008, 68(6): 1432-1441.
- [8] LI X, WU X, WU K. On a class of damped vibration problems with super-quadratic potentials[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, 72(1): 135-142.
- [9] CHEN G. Infinitely many nontrivial periodic solutions for damped vibration problems with asymptotically linear terms[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 245: 438-446.
- [10] CHEN G. Periodic solutions of superquadratic damped vibration problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 270: 794-801.
- [11] ZHANG X. Infinitely many solutions for a class of second-order damped vibration systems[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2013, 2013(15): 1-18.
- [12] CHEN G, SCHECHTER M. Multiple periodic solutions for damped vibration systems with general nonlinearities at infinity[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 90: 69-74.
- [13] LIU G, SHI S. Existence and multiplicity of periodic solutions for damped vibration problems with nonlinearity of linear growth[J]. Applied Mathematics Letters, 2020, 107: 106502.
- [14] WU X, CHEN J. Existence theorems of periodic solutions for a class of damped vibration problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 207(1): 230-235.
- [15] JIANG S, XU H, LIU G. Multiplicity of periodic solutions for a class of new super-quadratic damped vibration problems[J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2023, 29: 1287-1297.
- [16] WANG Y, ZHANG Z, LIU G. Periodic solutions for a class of asymptotically linear damped vibration problems with resonance at infinity[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2024, 23(5): 1-21.
- [17] PENG Z, LÜ H Y, CHEN G W. Damped vibration problems with sign-changing nonlinearities: infinitely many periodic solutions[J]. Boundary Value Problems, 2017, 2017(1): 1-10.
- [18] CHEN G W. Damped vibration problems with nonlinearities being sublinear at both zero and infinity[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2016, 39(6): 1505-1512.
- [19] CONLEY C, ZEHNDER E. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold[J]. Inventiones Mathematicae, 1983, 73: 33-49.
- [20] CHANG K C. On the periodic nonlinearity and the multiplicity of solutions[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1989, 13(5): 527-537.
- [21] CHANG K. Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems[M]. Boston: Birkhäuser, 1993.
- [22] MAWHIN J. Forced second order conservative systems with periodic nonlinearity[J]. Annales De l'Institut Henri Poincaré , Analyse Nonlinéaire, 1989, 6: 415-434.
- [23] MAWHIN J, WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems[M]. New York: Springer, 1989.

(责任编辑:赵海军)