

引用:赵云鹏,刘利英. 两类不确定单摆系统的确信可靠性分析[J]. 聊城大学学报(自然科学版),2025,38(5):654-662.

Citation: ZHAO Yunpeng, LIU Liying. Belief reliability analysis of the complex uncertain single pendulum system[J]. Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition), 2025, 38(5): 654-662.

文章编号 1672-6634(2025)05-0654-09

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2025010014

两类不确定单摆系统的确信可靠性分析

赵云鹏,刘利英

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘要 确信可靠性理论是一种有效的小样本数据系统可靠性分析工具。本文提出了确信可靠函数和确信可靠寿命两类确信可靠性指标,并分别研究了对数效用不确定时变摆模型和时间偏移不确定时变摆模型。首先,基于对数效用函数,构建了对数效用不确定时变摆模型,并推导出其确信可靠函数的解析表达式,同时给出了确信可靠寿命的计算公式和数值算法。其次,将单摆系统的噪声建模为线性时间偏移噪声,提出了时间偏移不确定时变摆模型,推导出其确信可靠函数的计算公式,并给出数值求解方法。数值算例表明这两类确信可靠性指标能够有效衡量这两类不确定单摆系统的可靠性,为不确定性系统的小样本可靠性分析提供了新的理论依据和计算工具。

关键词 不确定微分方程;确信可靠性;不确定单摆方程;不确定逆分布函数

中图分类号 O213.2;O314

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Belief reliability analysis of the complex uncertain single pendulum system

ZHAO Yunpeng, LIU Liying

(School of Mathematical and Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract Belief reliability theory has proven to be an effective tool for analyzing the reliability of systems with small sample data. This paper investigates uncertain pendulum systems and introduces two belief reliability metrics: belief reliability function and belief reliability lifetime. Two models are studied: the logarithmic utility uncertain time-varying pendulum model and the linear time-shift uncertain time-varying pendulum model. Firstly, based on the logarithmic utility function, the logarithmic utility uncertain time-varying pendulum model is constructed, and an analytical expression for its belief reliability function is derived. The computational formulas and numerical algorithms for the belief reliability lifetime are also provided. Second, the noise in the pendulum system is modeled as linear time-shift noise, and the linear time-shift uncertain time-varying pendulum model is proposed. The computational formula for its certainty reliability function is derived, and a numerical solution method is introduced. Numerical examples demonstrate that these two certainty reliability metrics effectively measure the reliability of uncertain pendulum

收稿日期:2025-01-16

基金项目:山东省自然科学基金项目(ZR2020MA026)资助

通信作者:刘利英,女,汉族,博士,副教授,研究方向:不确定性理论,E-mail:lyliu001@163.com。

systems. This study provides new theoretical foundations and computational tools for reliability analysis of uncertain systems with small sample data.

Keywords uncertain differential equation; belief reliability; uncertain single pendulum equation; inverse uncertainty distribution

0 引言

单摆系统作为动力学研究的经典模型,在振动测量校准、惯性导航系统优化、机械动态特性表征及能量收集装置设计等领域具有重要应用价值。鉴于单摆系统的实际应用高度依赖其动力学特性,对其运动规律的理论研究始终是学术界关注的重点。随着现代科技对精度要求的提高和应用场景的复杂化,单摆系统的可靠性已成为关键问题。传统单摆模型通常假设摆长、摆球质量和重力加速度等参数为固定值,但在实际环境中,这些参数可能受到外界影响而变化。这种变化表明,系统的稳定性不仅依赖初始条件,更与不确定因素密切相关。

单摆系统受到大量的不确定因素影响,为了应对这些不确定性,一些学者尝试将概率论引入单摆方程的研究。1965年,Feynman^[1]提出了一种由维纳过程驱动的随机单摆方程,这一模型使随机振动成为振动动力学的重要组成部分。从那时起,许多研究者对这一方程展开了深入研究^[2-5]。维纳过程虽然是连续的随机过程,却是非 Lipschitz 连续的随机过程。Liu^[7]提出了 Lipschitz 连续的 Liu 过程用来对随时间变化的不确定变量进行建模,这为不确定理论的发展做出了重要的贡献。随着不确定测度、不确定过程,Liu 过程等数学概念的提出,不确定理论逐渐被学者们广泛应用于具有不确定因素的事件中。在不确定理论中,不确定过程以全序集为指标,主要用于描述某些不确定现象的动力学行为。在过去的几年中,学者们将其应用于各种研究,如不确定微分方程^[8-9],金融数学^[10-11],统计^[12-14],可靠性分析^[15]。Qiu 等^[6]考虑了含不确定因素的单摆方程,并运用 Liu 过程对其进行描述,还研究了不确定单摆方程稳定性以及极值问题。

在可靠性分析领域,学者们主要关注可靠性工程模型的研究方法^[16]。除了偶然不确定性^[17],系统的可靠性还可能受到因认知不足^[18]引发的不确定性影响。Zeng 等^[19]提出,在分析不确定系统的可靠性时,需要同时考虑偶然不确定性和认知不确定性。随后,Kang 等^[20-21]提出了确信可靠性的概念,并在研究中系统的考虑了这两类不确定性。Tian 等^[22]研究了不确定热传导系统中的首达时问题,并基于此提出了确信可靠函数和确信可靠寿命的定义。基于上述针对不确定系统所提出的方法,本文针对两类不确定单摆系统进行确信可靠函数和确信可靠寿命分析,并给出了数值算法去求解复杂单摆系统的确信可靠性,最后通过数值例子验证不确定复杂单摆系统确信可靠性的有效性。

本文剩余部分介绍如下。第1节介绍了不确定单摆方程的基础知识,不确定理论的部分知识以及不确定单摆系统确信可靠性的知识。第2节给出了对数效用不确定时变摆系统和线性时间偏移不确定时变摆系统的确信可靠函数的计算公式,并针对计算公式设计了相应的数值算法、开展数值实验。第3节提出了对数效用不确定单摆系统的确信可靠寿命的计算公式,并针对计算公式设计了相应的数值算法、开展数值实验。第4节给出了本文的结论。

1 预备知识

1.1 不确定单摆方程

根据具有独立平稳增量性质的 Lipschitz 连续 Liu 过程,Qiu 等^[6]给出了小角度下不确定单摆系统的方程

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta_t}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta_t - \frac{c}{ml}\frac{d\theta_t}{dt} + \frac{1}{ml}K(t, \dot{C}_t), \\ \theta_t|_{t=0} = \theta_0, \\ \dot{\theta}_t|_{t=0} = \dot{\theta}_0, \end{cases}$$

式中 m 表示为摆球的质量, l 表示摆绳长度, θ 表示的摆动期间与垂直方向的偏差角(以弧度测量),以及由

g 表示的重力加速度, 由 c 表示的阻尼系数(常数), C_t 是 Liu 过程, $\dot{C}_t = dC_t/dt$ 。令 $\frac{g}{l} = \omega^2$, $\frac{c}{ml} = 2h$,

$\frac{1}{ml}K(t, \dot{C}_t) = F(t, \dot{C}_t)$, 则不确定单摆方程可表示为

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta_t}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta_t + 2h \frac{d\theta_t}{dt} = F(t, \dot{C}_t), \\ \theta_t|_{t=0} = \theta_0, \\ \dot{\theta}_t|_{t=0} = \dot{\theta}_0. \end{cases} \quad (1)$$

Qiu 等^[6]在 $h > \omega$, $h = \omega$ 以及 $h < \omega$ 三种情况下证明了不确定单摆系统的方程解的存在性定理。

当 $h > \omega$ 时, 不确定单摆系统的方程解为 $\theta_t = (\frac{1}{2}\theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0 + h\theta_0}{2\sqrt{h^2 - \omega^2}})\exp(-ht + t\sqrt{h^2 - \omega^2}) + (\frac{1}{2}\theta_0 - \frac{\dot{\theta}_0 + h\theta_0}{2\sqrt{h^2 - \omega^2}})\exp(-ht - t\sqrt{h^2 - \omega^2}) + \frac{1}{2\sqrt{h^2 - \omega^2}} \int_0^t (\exp((t-s)(-h + \sqrt{h^2 - \omega^2})) - \exp((t-s)(-h - \sqrt{h^2 - \omega^2})))F(s, \dot{C}_s)ds$ 。

当 $h = \omega$ 时, 不确定单摆系统的方程解为 $\theta_t = (\theta_0 + (\dot{\theta}_0 + h\theta_0)t)\exp(-ht) + \int_0^t (t-s)\exp(-h(t-s))F(s, \dot{C}_s)ds$ 。

当 $h < \omega$ 时, 不确定单摆系统的方程解为 $\theta_t = \theta_0 \exp(-ht) \cos(t\sqrt{\omega^2 - h^2}) + \frac{2\dot{\theta}_0 + h\theta_0}{\sqrt{\omega^2 - h^2}} \exp(-ht) \sin(t\sqrt{\omega^2 - h^2}) + \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - h^2}} \int_0^t \exp(-h(t-s)) \sin((t-s)\sqrt{\omega^2 - h^2}) F(s, \dot{C}_s)ds$ 。

1.2 不确定单摆系统的确信可靠性

基于文献[24]提出的不确定热传导系统的确信可靠性定义及性质, 下面给出不确定单摆系统的确信可靠性定义。

定义 1 设 θ_t 是不确定单摆方程的解, n 是给定的失效阈值。当系统首次达到失效阈值 n 时, 则首次时 τ_n 是一个不确定变量, 并且首次时 τ_n 可以被定义为 $\tau_n = \inf\{t \geq 0 | \theta_t = n\}$ 。

定义 2 设 θ_t 是不确定单摆方程的解, $\phi_t^{-1}(\alpha)$ 是解对应的不确定逆分布函数, $G(x)$ 是一个单调递增的函数, 则首次时 τ_n 有不确定分布函数

$$V(T) = \begin{cases} 1 - \inf\{\alpha \in (0, 1) | \sup_{0 \leq t \leq T} G(\phi_t^{-1}(\alpha)) \geq n\}, & \text{if } n > G(\theta_0), \\ \sup\{\alpha \in (0, 1) | \inf_{0 \leq t \leq T} G(\phi_t^{-1}(\alpha)) \leq n\}, & \text{if } n < G(\theta_0). \end{cases}$$

定义 3 不确定单摆系统的确信可靠函数 $R_{sp}(T)$ 被定义为系统正常运行的信度, 可写作 $M\{\sup_{0 \leq t \leq T} G(\theta(t)) \leq n\}$ 。

定义 4 不确定单摆系统的确信可靠函数可以表示为 $R_{sp}(T) = \inf\{\alpha \in (0, 1) | \sup_{0 \leq t \leq T} G(\phi_t^{-1}(\alpha)) \geq n\}$, 并且 $V(T) + R_{sp}(T) = 1$ 。

定义 5 不确定单摆系统的确信可靠寿命可以表示为 $[\tau_n]_{sup}(\beta) = \sup\{T | R_{sp}(T) \geq \beta\}$ 。

2 不确定复杂单摆系统的确信可靠函数

2.1 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠函数

对于方程(1), 令 $F(t, \dot{C}_t)$ 改写为 $a + \dot{C}_t$, 我们可以得到一种效用函数不确定时变摆系统

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta_t}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta_t + 2h \frac{d\theta_t}{dt} = a + \dot{C}_t, \\ \theta_t|_{t=0} = 0, \\ \dot{\theta}_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

根据文献[6],小角度下不确定单摆方程的解可分为三种情况: $h > \omega$, $h = \omega$, $h < \omega$ 。本文将介绍 $h > \omega$ 和 $h = \omega$ 两种情况的确信可靠函数。此外,将不确定时变摆系统的效用函数 $G(\theta(t))$ 设为对数函数,则可得对数效用不确定时变摆系统,即令 $G(\theta(t)) = \ln(\theta(t))$ 。

定理1 当 $h > \omega$ 时,对数效用不确定时变摆系统的确信可靠函数为 $R_{sp}(T) = \frac{\exp(z)}{1 + \exp(z)}$, 式中

$$z = \frac{\sqrt{3}\pi(a \exp(T) - a + \exp(n))}{3\exp(T) - 3}。$$

证 根据文献[6]可知,当 $h > \omega$ 时不确定变摆方程的解为 $\int_0^t \exp(t-s)(a + \dot{C}_s)ds$ 。同时,不确定逆分布函数为 $\int_0^t a \exp(t-s) + |\exp(t-s)| \varphi^{-1}(\alpha) ds$, 其中 $\varphi^{-1}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}$ 。

因此不确定逆分布函数可写为 $(\exp(t) - 1)(\varphi^{-1}(\alpha) + a)$ 。注意到 $\exp(t) - 1 \geq 0$, 当 $\varphi^{-1}(\alpha) + a < 0$ 时,可得 $\sup_{0 \leq t \leq T} G(\psi_t^{-1}(\alpha)) = G(\psi_0^{-1}(\alpha))$ 无意义,故不进行讨论。从而我们在 $I = \{\alpha \in (0, 1) \mid \varphi^{-1}(\alpha) + a \geq 0\}$ 情况下进行讨论。且当 $\alpha \in (0.5, 1)$ 时, $\varphi^{-1}(\alpha) \in (0, \infty)$, 从而 $I \neq \emptyset$ 。根据定义2,可得 $V(T) = 1 - \inf\{\alpha \in (0, 1) \mid \sup_{0 \leq t \leq T} G(\psi_t^{-1}(\alpha)) \geq n\} = 1 - \inf\{\alpha \in (0, 1) \mid \sup_{0 \leq t \leq T} \ln((\exp(t) - 1)(\varphi^{-1}(\alpha) + a)) \geq n\} = 1 - \inf\{\alpha \in (0, 1) \mid (\exp(T) - 1)(\varphi^{-1}(\alpha) + a) \geq \exp(n)\} = 1 - \inf\{\alpha \in (0, 1) \mid \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} \geq \frac{\sqrt{3}\pi(a \exp(T) - a + \exp(n))}{3\exp(T) - 3}\}$ 。

令 $z = \frac{\sqrt{3}\pi(a \exp(T) - a + \exp(n))}{3\exp(T) - 3}$, 由定义4可以得到 $R_{sp}(T) = \frac{\exp(z)}{1 + \exp(z)}$ 。定理证明完毕。

例1 令 $a=1, n=2, T=5$ s。当 $h > \omega$ 时,对数效用不确定时变摆系统的确信可靠性 $R_{sp}(T)$ 为 0.87。对数效用不确定时变摆系统的确信可靠性 $R_{sp}(T)$ 与时间 T 的关系如图1所示。

定理2 当 $h = \omega$ 时,对数效用不确定时变摆系统的确信可靠函数为 $R_{sp}(T) = \frac{\exp(d)}{1 + \exp(d)}$, 其中 $d = \frac{\sqrt{3}\pi \exp(n) h^2}{3(1 - (1 + hT) \exp(-hT))} - \frac{\sqrt{3}\pi a}{3}$ 。

证 根据文献[6]可知,当 $h = \omega$ 时不确定变摆方程的解为 $\int_0^t \exp(-h(t-s))(t-s)(a + \dot{C}_s)ds$, 同时,解的不确定逆分布函数为 $\int_0^t [a \exp(-h(t-s))(t-s) + |\exp(-h(t-s))(t-s)| \varphi^{-1}(\alpha)] ds$ 。

由于 $s \in [0, t]$, 从而 $t-s \geq 0$ 。注意到 $\exp(-h(t-s)) \geq 0$, 从而解的不确定逆分布函数可被改写为

$$\int_0^t [(a + \varphi^{-1}(\alpha)) \exp(-h(t-s))t - (a + \varphi^{-1}(\alpha)) \exp(-h(t-s))s] ds。$$

对于 $v_1 = \int_0^t (a + \varphi^{-1}(\alpha)) \exp(-h(t-s))t ds$, 令 $u = t-s$, 则有 $v_1 = (a + \varphi^{-1}(\alpha))t \int_0^t \exp(-hu) du = (a + \varphi^{-1}(\alpha))t \left[\frac{\exp(-hu)}{-h} \right]_0^t = \frac{(a + \varphi^{-1}(\alpha))(1 - \exp(-ht))t}{h}$ 。

对于 $v_2 = \int_0^t (a + \varphi^{-1}(\alpha)) \exp(-h(t-s)) s ds$, 令 $u = t-s$, 则有 $v_2 = (a + \varphi^{-1}(\alpha)) \int_0^t \exp(-hu)(t-u) du$
 $= v_1 - (a + \varphi^{-1}(\alpha)) \int_0^t \exp(-hu) u du$, 通过分部积分法, 则

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp(-hu) u du &= \left[\frac{-u \exp(-hu)}{h} - \frac{\exp(-hu)}{h^2} \right]_0^t \\ &= \left(\frac{-t \exp(-ht)}{h} - \frac{\exp(-ht)}{h^2} \right) - \left(0 - \frac{1}{h^2} \right) \\ &= \frac{1 - (1+ht) \exp(-ht)}{h^2}. \end{aligned}$$

因此解的不确定逆分布函数可写为 $\phi_t^{-1}(\alpha) = \frac{(a + \varphi^{-1}(\alpha))(1 - (1+ht) \exp(-ht))}{h^2}$.

显然 $\phi_t^{-1}(\alpha)$ 是对 t 的函数, 则 $\phi_t^{-1}(\alpha)$ 关于 t 的导函数为 $(a + \varphi^{-1}(\alpha))t \exp(-ht)$, 当 $0 \leq t \leq T$ 时, $\phi_t^{-1}(\alpha)$ 是关于 t 的单增函数。从而 $\sup_{0 \leq t \leq T} G(\phi_t^{-1}(\alpha)) = G(\phi_T^{-1}(\alpha))$, 并且 $G(\phi_0^{-1}(\alpha)) < n$, 根据定义 2, 可得

$$\begin{aligned} V(T) &= 1 - \inf\{\alpha \in (0, 1) \mid \sup_{0 \leq t \leq T} G(\phi_t^{-1}(\alpha)) \geq \exp(n)\} \\ &= 1 - \inf\{\alpha \in (0, 1) \mid \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{(a + \varphi^{-1}(\alpha))(1 - (1+ht) \exp(-ht))}{h^2} \geq \exp(n)\} \\ &= 1 - \inf\{\alpha \in (0, 1) \mid \frac{(a + \varphi^{-1}(\alpha))(1 - (1+hT) \exp(-hT))}{h^2} \geq \exp(n)\} \\ &= 1 - \inf\{\alpha \in (0, 1) \mid \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} \geq \frac{\sqrt{3}\pi \exp(n) h^2}{3(1 - (1+hT) \exp(-hT))} - \frac{\sqrt{3}\pi a}{3}\}. \end{aligned}$$

从而由定义 4 可知 $R_{sp}(T) = \inf\{\alpha \in (0, 1) \mid \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} \geq \frac{\sqrt{3}\pi \exp(n) h^2}{3(1 - (1+hT) \exp(-hT))} - \frac{\sqrt{3}\pi a}{3}\}$.

令 $d = \frac{\sqrt{3}\pi \exp(n) h^2}{3(1 - (1+hT) \exp(-hT))} - \frac{\sqrt{3}\pi a}{3}$, 则 $R_{sp}(T) = \frac{\exp(d)}{1 + \exp(d)}$. 定理证明完毕。

例 2 令 $a=7, n=2, h=1$ 以及 $T=5$ s. 当 $h=\omega$ 时, 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠性 $R_{sp}(T)$ 为 0.78. 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠性 $R_{sp}(T)$ 与时间 T 的关系如图 2 所示。

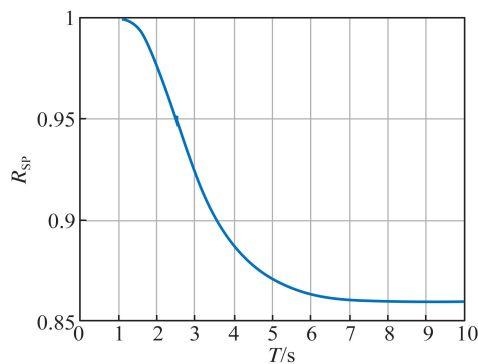


图 1 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠性与时间的关系

Fig. 1 The relation of $R_{sp}(T)$ and T

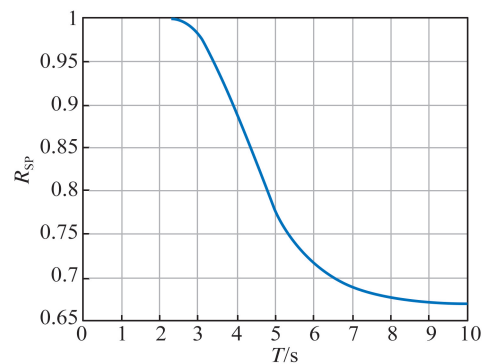


图 2 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠性与时间的关系

Fig. 2 The relation of $R_{sp}(T)$ and T

2.2 线性时间偏移不确定时变摆系统的确信可靠函数

对于方程(1), 令 $F(t, \dot{C}_t)$ 改写为 $t + \dot{C}_t$, 可以得到一种线性时间偏移不确定时变摆系统

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta_t}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta_t + 2h \frac{d\theta_t}{dt} = t + \dot{C}_t, \\ \theta_t|_{t=0} = 0, \\ \dot{\theta}_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

根据文献[6],本文将介绍 $h > \omega$ 和 $h = \omega$ 两种情况的确信可靠函数。此外,线性时间偏移不确定时变摆系统的效用函数 $G(\theta(t))$ 被假设为线性函数,视作 $G(\theta(t)) = \theta(t)$ 。

定理3 当 $h > \omega$ 时,线性时间偏移不确定时变摆系统的确信可靠函数为

$$R_{SP}(T) = \inf\{\alpha \in (0,1) \mid \sup_{0 \leq t \leq T} (\exp(t) - 1)(\varphi^{-1}(\alpha) + 1) - t \geq n\}.$$

证 根据文献[6]知,当 $h > \omega$ 时线性时间偏移不确定时变摆方程的解为 $\int_0^t \exp(t-s)(s + \dot{C}_s)ds$ 。同时,

解的不确定逆分布函数为 $\int_0^t [s \exp(t-s) + |\exp(t-s)| \varphi^{-1}(\alpha)] ds$, 基于定理2的证明,从而可知上述解的不确定逆分布函数可写为 $(\exp(t) - 1)(\varphi^{-1}(\alpha) + 1) - t$ 。根据定义4可得

$$R_{SP}(T) = \inf\{\alpha \in (0,1) \mid \sup_{0 \leq t \leq T} (\exp(t) - 1)(\varphi^{-1}(\alpha) + 1) - t \geq n\}.$$

定理证明完毕。

基于二分法给出计算可靠函数的算法如算法1所示。

Algorithm 1 The algorithm to calculate $R_{SP}(T)$ of the linear time-shift system related with $h > \omega$

Input: constants n, T , inverse uncertainty distribution $\varphi^{-1}(\alpha)$ and accuracy ϵ

Output: $R_{SP}(T)$

1. initialize $\alpha_{low}=0$ and $\alpha_{high}=1$
 2. while $|\alpha_{high}-\alpha_{low}| > \epsilon$ do
 3. calculate $\alpha_{mid}=(\alpha_{high}+\alpha_{low})/2$
 4. define $f(t;\alpha_{mid})=(\exp(t)-1)(\varphi^{-1}(\alpha_{mid})+a)-t$
 5. derivative $f'(t;\alpha_{mid})=\exp(t)(\varphi^{-1}(\alpha_{mid})+a)-1$
 6. solve $f'(t;\alpha_{mid})=0$, get $t^*=\ln(1/(\varphi^{-1}(\alpha_{mid})+a))$
 7. calculate $F_{\alpha_{mid}}(T)$
 8. if $t^* \in [0, T]$: $F_{\alpha_{mid}}(T)=\max(f(0;\alpha_{mid}), f(t^*;\alpha_{mid}), f(T;\alpha_{mid}))$
 9. else: $F_{\alpha_{mid}}(T)=\max(f(0;\alpha_{mid}), f(T;\alpha_{mid}))$
 10. if $F_{\alpha_{mid}}(T) \geq n$: $\alpha_{high}=\alpha_{mid}$
 11. else: $\alpha_{low}=\alpha_{mid}$
 12. return $R_{SP}(T)=\alpha_{high}$
-

基于上述算法,通过例子说明算法的有效性。

例3 令 $n=10, T=5$ s 和 $\epsilon=1 \times 10^{-6}$ 时。当 $h > \omega$ 时,线性时间偏移不确定时变摆系统的确信可靠性 $R_{SP}(T)$ 为 0.185。线性时间偏移不确定时变摆系统的确信可靠性 $R_{SP}(T)$ 与时间 T 的关系如图3所示。

定理4 当 $h = \omega$ 时,线性时间偏移不确定时变摆系统的确信可靠函数为 $R_{SP}(T) = \inf\{\alpha \in (0,1) \mid \sup_{0 \leq t \leq T} (1 - \exp(-ht))(\frac{\varphi^{-1}(\alpha)}{h^2} - \frac{2}{h^3}) + \frac{t}{h^2}(1 + \exp(-ht)) - \frac{\varphi^{-1}(\alpha)t \exp(-ht)}{h} \geq n\}$ 。

证 根据文献[6]知,当 $h = \omega$ 时线性时间偏移不确定时变摆方程的解为 $\int_0^t [\exp(-h(t-s))(t-s)(s + \dot{C}_s)]ds$ 。同时,解的不确定逆分布函数为 $\int_0^t [s \exp(-h(t-s))(t-s) + |\exp(-h(t-s))(t-s)| \varphi^{-1}(\alpha)]ds$ 。

基于定理2的证明,解的不确定逆分布函数可表示为 $\int_0^t [s \exp(-h(t-s))(t-s)ds + \varphi^{-1}(\alpha) \int_0^t \exp(-h(t-s))ds]$

$-s))(t-s)]ds$, 其中 $\int_0^t \exp(-h(t-s))(t-s)ds = \frac{1-(1+ht)\exp(-ht)}{h^2}$ 。

令 $u = t - s$, 则积分 $\int_0^t s \exp(-h(t-s))(t-s)ds$ 可改写为 $\int_0^t s \exp(-h(t-s))(t-s)ds = \int_0^t (tu - u^2) \exp(-hu) du = t \int_0^t u \exp(-hu) du - \int_0^t u^2 \exp(-hu) du$, 已知 $t \int_0^t u \exp(-hu) du = \frac{t-t(1+ht)\exp(-ht)}{h^2}$, 则利用分部积分法可知

$$\int_0^t u^2 \exp(-hu) du = \left[\frac{-u^2 \exp(-hu)}{h} + \frac{2}{h} \int_0^t u \exp(-hu) du \right]_0^t = \frac{2-2(1+ht)\exp(-ht)-h^2 t^2 \exp(-ht)}{h^3}。$$

因此线性时间偏移不确定时变摆方程的解的不确定逆分布函数可写为 $(1-\exp(-ht))(\frac{\varphi^{-1}(\alpha)}{h^2} - \frac{2}{h^3}) + \frac{t}{h^2}(1+\exp(-ht)) - \frac{\varphi^{-1}(\alpha)t\exp(-ht)}{h}$ 。根据定义 4 可得 $R_{sp}(T) = \inf\{\alpha \in (0,1) \mid \sup_{0 \leq t \leq T} (1-\exp(-ht))(\frac{\varphi^{-1}(\alpha)}{h^2} - \frac{2}{h^3}) + \frac{t}{h^2}(1+\exp(-ht)) - \frac{\varphi^{-1}(\alpha)t\exp(-ht)}{h} \geq n\}$ 。

定理证明完毕。

基于二分法给出计算可靠函数的算法如算法 2 所示。

Algorithm 2 The algorithm to calculate $R_{sp}(T)$ of the linear time-shift system related with $h = \omega$

Input: constants n, h, T , inverse uncertainty distribution $\varphi^{-1}(\alpha)$ and accuracy ε .

Output: $R_{sp}(T)$.

1. Initialize $\alpha_{low} = 0, \alpha_{high} = 1$ and $R_{sp} =$ Appropriate value
2. The value range $(0,1)$ of traversal α
3. Scan $\alpha \in (0,1)$ using dichotomy or fixed step
4. define $F(t, \alpha) = (1-\exp(-ht)) \times [\varphi^{-1}(\alpha) \times (2/h^2 + t/h^2) + t/h^2 \times (1+\exp(-ht))] - \varphi^{-1}(\alpha) \times \exp(-ht) / h$
5. calculate $\max_F = \sup\{F(t, \alpha) \mid 0 \leq t \leq T\}$
6. when $\max_F \geq n$: renew $R_{sp} = \min(R_{sp}, \alpha)$
7. if $\alpha_{max} - \alpha_{min} < \varepsilon$: return $R_{sp}(T)$

基于上述算法,通过例子说明算法的有效性。

例 4 令 $n=5 \text{ s}, h=1, T=5$ 和 $\varepsilon=1 \times 10^{-6}$ 。当 $h=\omega$ 时,线性时间偏移不确定时变摆系统的确信可靠性 $R_{sp}(T)$ 为 0.979。线性时间偏移不确定时变摆系统的确信可靠性 $R_{sp}(T)$ 与时间 T 的关系如图 4 所示。

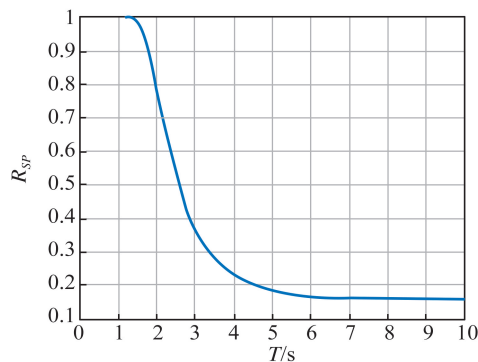


图 3 线性时间偏移不确定时变摆系统的确信可靠性与时间的关系

Fig. 3 The relation of $R_{sp}(T)$ and T

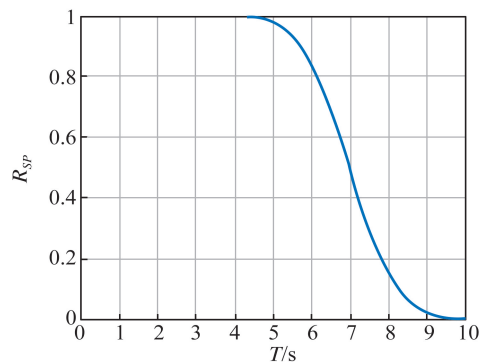


图 4 线性时间偏移不确定时变摆系统的确信可靠性与时间的关系

Fig. 4 The relation of $R_{sp}(T)$ and T

3 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠寿命

本节将介绍基于 $h > \omega$ 和 $h = \omega$ 两种情况下对数效用不确定时变摆模型的确信可靠寿命。

定理 5 当 $h > \omega$ 时, 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠寿命可写为 $[\tau_n]_{\sup}(\beta) = \ln \frac{\exp(n) + \varphi^{-1}(\beta) - a}{\varphi^{-1}(\beta) - a}$ 。

证 根据定理 1, 可得 $R_{\text{sp}}(T) = \frac{\exp(z)}{1 + \exp(z)}$, 其中 $z = \frac{\sqrt{3}\pi(a\exp(T) - a + \exp(n))}{3\exp(T) - 3}$ 。根据定义 5 可知, 确信可靠寿命 $[\tau_n]_{\sup}(\beta)$ 为 $[\tau_n]_{\sup}(\beta) = \sup\{T \mid R_{\text{sp}}(T) \geq \beta\} = \sup\{T \mid \frac{\exp(z)}{1 + \exp(z)} \geq \beta\} = \sup\{T \mid z \geq \ln \frac{\beta}{1 - \beta}\} = \sup\{T \mid \frac{\exp(n)}{\exp(T) - 1} \geq \varphi^{-1}(\beta) - a\} = \sup\{T \mid T \leq \ln \frac{\exp(n) + \varphi^{-1}(\beta) - a}{\varphi^{-1}(\beta) - a}\} = \ln \frac{\exp(n) + \varphi^{-1}(\beta) - a}{\varphi^{-1}(\beta) - a}$ 。定理证明完毕。

例 5 令 $a = 2, n = 10$ 以及 $\beta = 0.5$ 。当 $h > \omega$ 时, 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠寿命 $[\tau_n]_{\sup}(\beta)$ 为 9.307。对数效用不确定时变摆系统的确信可靠寿命 $[\tau_n]_{\sup}(\beta)$ 与给定的水平的关系 β 如图 5 所示。

定理 6 当 $h = \omega$ 时, 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠寿命可写为 $[\tau_n]_{\sup}(\beta) = \sup\{T \mid \frac{\exp(n)h^2}{\varphi^{-1}(\beta) + a} \geq (1 + hT - h)(1 - \exp(-hT))\}$ 。

证 根据定理 2, 可知 $R_{\text{sp}}(T) = \frac{\exp(d)}{1 + \exp(d)}$, 其中 $d = \frac{\sqrt{3}\pi\exp(n)h^2}{3(1 - (1 + hT)\exp(-hT))} - \frac{\sqrt{3}\pi a}{3}$ 。根据定义 5 可知, 确信可靠寿命为 $[\tau_n]_{\sup}(\beta) = \sup\{T \mid R_{\text{sp}}(T) \geq \beta\} = \sup\{T \mid \frac{\exp(d)}{1 + \exp(d)} \geq \beta\} = \sup\{T \mid d \geq \ln \frac{\beta}{1 - \beta}\} = \sup\{T \mid \frac{\exp(n)h^2}{\varphi^{-1}(\beta) + a} \geq (1 - (1 + hT)\exp(-hT))\}$ 。定理证明完毕。

基于二分法给出计算可靠函数的算法如算法 3 所示。

Algorithm 3 The algorithm to calculate $[\tau_n]_{\sup}(\beta)$ of the logarithmic utility system related with $h = \omega$

Input: constants a, n, T , inverse uncertainty distribution $\varphi^{-1}(\alpha)$, pre-give level β and accuracy ϵ .

Output: $[\tau_n]_{\sup}(\beta)$.

1. define $[\tau_1]_{\sup}(\beta) = \sup\{T \mid \frac{\exp(n)h^2}{\varphi^{-1}(\beta) + a} \geq (1 - (1 + hT)\exp(-hT))\}$
 2. let $T_{\min} = 0, T_{\max} = 1000$
 3. define accuracy ϵ
 4. define $T_{\sup} = 0$
 5. loop begin: calculate midpoint $T_{\text{mid}} = \frac{T_{\min} + T_{\max}}{2}$
 6. calculate left side $LS = \frac{\exp(n)h^2}{\varphi^{-1}(\beta) + a}$
 7. calculate right side $RS = (1 + hT_{\text{mid}} - h)(1 - \exp(-hT_{\text{mid}}))$
 8. if $LS \geq RS$: renew $T_{\sup} = T_{\text{mid}}$, let $T_{\min} = T_{\text{mid}}$
 9. else: $T_{\max} = T_{\text{mid}}$
 10. when $T_{\max} - T_{\min} < \epsilon$: exit loop
 11. return $[\tau_1]_{\sup}(\beta) = T_{\sup}$
-

基于上述算法, 通过例子说明算法的有效性。

例 6 令 $h = 0.5, a = 1, n = 3, \beta = 0.5$ 和 $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$ 。当 $h = \omega$ 时, 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠寿命 $[\tau_n]_{\sup}(\beta)$ 为 34.5。对数效用不确定时变摆系统的确信可靠寿命 $[\tau_n]_{\sup}(\beta)$ 与给定的水平的关系

β 如图 6 所示。

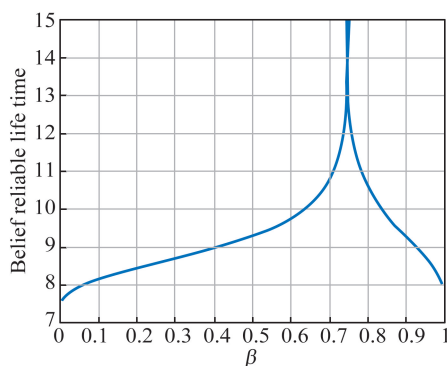


图 5 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠寿命与给定水平的关系

Fig. 5 The relation of $[\tau_n]_{\sup}(\beta)$ and β

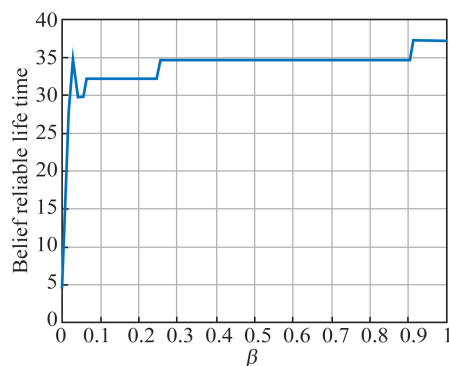


图 6 对数效用不确定时变摆系统的确信可靠寿命与给定水平的关系

Fig. 6 The relation of $[\tau_n]_{\sup}(\beta)$ and β

4 结论

可靠性分析是研究不确定单摆系统在噪声影响下性能变化的重要内容之一。本文提出了两类不确定单摆系统,即对数效用不确定时变摆模型和线性时间偏移不确定时变摆模型。为了评估两类不确定单摆系统的可靠性,本文基于确信可靠函数和确信可靠寿命两类指标,对系统性能进行了系统性分析。研究中,分别针对两类不确定单摆系统,推导了确信可靠函数的计算公式,并设计了相应的数值算法以开展数值实验。进一步地,对对数效用不确定时变摆模型的确信可靠寿命展开研究,推导了计算公式,并设计了相应的数值算法以开展数值实验。数值结果表明,确信可靠指标能够有效评估不确定单摆系统的性能,验证了本文方法的适用性和有效性。

本文主要对复杂单摆系统的两类确信可靠性指标进行了分析,但缺乏引入合适的控制变量对这类可靠性指标进行优化,以更好地服务于实际工程应用。未来学者可以基于这种情况继续进行研究。

参 考 文 献

- [1] FEYNMAN R P, LEIGHTON R B, SANDS M, et al. The feynman lectures on physics; vol. I[J]. American Journal of Physics, 1965, 33(9): 750-752.
- [2] MITCHELL R. Stability of the inverted pendulum subjected to almost periodic and stochastic base motion—an application of the method of averaging[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1972, 7(1): 101-123.
- [3] TSIGANIS K, ANASTASIADIS A, VARVOGLIS H. On the relation between the maximal LCN and the width of the stochastic layer in a driven pendulum[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1999, 32(2): 431.
- [4] LUO A C, HAN R P. The dynamics of stochastic and resonant layers in a periodically driven pendulum[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2000, 11: 2349-2359.
- [5] BAKER G L, BLACKBURN J A, SMITH H J T. A stochastic model of synchronization for chaotic pendulums[J]. Physics Letters A, 1999, 252: 191-197.
- [6] QIU X Y, ZHU J X, LIU S Q, et al. The establishment of uncertain single pendulum equation and its solutions[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2024, 57(12): 125202.
- [7] LIU B D. Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modelling Human Uncertainty[M]. Berlin: Springer Verlag, 2010.
- [8] GAO Y. Existence and uniqueness theorem on uncertain differential equations with local Lipschitz condition[J]. Journal of Uncertain Systems, 2012, 6(3): 223-232.
- [9] ZHANG K X, LIU B D. Higher-order derivative of uncertain process and higher-order uncertain differential equation[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2024, 23(2): 295-318.

(下转第 678 页)

- [14] GAO Z, YAN S, ZHANG J, et al. Deep reinforcement learning-based policy for baseband function placement and routing of RAN in 5G and beyond[J]. *Journal of Lightwave Technology*, 2022, 40(2): 470-480.
- [15] WANG R, ZHANG J, GU Z, et al. Edge-enhanced graph neural network for DU-CU placement and lightpath provision in X-Haul networks[J]. *Journal of Optical Communications and Networking*, 2022, 14(10): 828-839.
- [16] WANG Y, ZHU M, CAI X, et al. DRL-assisted fine-grained function placement and routing of 5G RAN slice with reuse scheme in elastic optical networks[C]// 2023 IEEE International Conference on Communications. Rome, Italy: IEEE, 2023: 1958-1963.
- [17] WANG D, WANG Y, MENG S, et al. Game based wireless fronthaul C-RAN baseband function splitting and placement[C]// 12th International Conference on Mobile Ad-Hoc and Sensor Networks. Hefei, China: IEEE, 2016: 400-404.
- [18] AROUK O, TURLETTI T, NIKAEIN N, et al. Cost optimization of cloud-RAN planning and provisioning for 5G networks[C]// IEEE International Conference on Communications. Kansas City, MO, USA: IEEE, 2018: 1-6.
- [19] YU H, MUSUMECI F, ZHANG J, et al. Isolation-aware 5G RAN slice mapping over WDM metro-aggregation networks[J]. *Journal of Lightwave Technology*, 2020, 38(6): 1125-1137.
- [20] YAN D, NG B. K, KE W, et al. Deep reinforcement learning based resource allocation for network slicing with massive MIMO[J]. *IEEE Access*, 2023, 11: 75899-75911.
- [21] XIAO Y, ZHANG J, JI Y. Can fine-grained functional split benefit to the converged optical-wireless access networks in 5G and beyond? [J]. *IEEE Transactions on Network and Service Management*, 2020, 99: 1-1.
- [22] CHEN X, LI B, PROIETTI R. DeepRSA: a deep reinforcement learning framework for routing, modulation and spectrum assignment in elastic optical networks[J]. *Journal of Lightwave Technology*, 2019, 37(16): 4155-4163.
- [23] SHIMODA M, TANAKA T. Mask RSA: end-to-end reinforcement learning-based routing and spectrum assignment in elastic optical networks[C]// European Conference on Optical Communication. Bordeaux, France: IEEE, 2021.
- [24] FENG W, ZENG M, LIU X, et al. Joint spectrum and IT resource allocation for efficient VNF service chaining in inter-datacenter elastic optical networks[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(8): 1539-1542.

(责任编辑:赵海军)

(上接第 662 页)

- [10] MEHRDOUST F, NOORANI I, XU W. Uncertain energy model for electricity and gas futures with application in spark-spread option price[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2023, 22(1): 123-148.
- [11] LI H X, YANG X F, NI Y D. Pricing of shout option in uncertain financial market[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2024, 23(3): 449-467.
- [12] LIO W J, LIU B D. Residual and confidence interval for uncertain regression model with imprecise observations[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2018, 35(2): 2573-2583.
- [13] YE T Q, LIU B D. Uncertain hypothesis test for uncertain differential equations[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2023, 22(2): 195-211.
- [14] 朱佳璇, 刘利英. 基于不确定时间序列的外汇储备智能预测[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2024, 155(5): 41-47.
- [15] KE H, YAO K. Block replacement policy with uncertain lifetimes[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, 148: 119-124.
- [16] SAMUEL C, CHOOKAH M, MOHAMMAD M. Development of a probabilistic mechanistic model for reliability assessment of gas cylinders in compressed natural gas vehicles[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, 2009, 223(4): 289-299.
- [17] TERJE A, KROHN B S. A new perspective on how to understand, assess and manage risk and the unforeseen[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 121: 1-10.
- [18] DER A, KIUREGHIAN A, DITLEVSEN O. Aleatory or epistemic? Does it matter? [J]. *Structural safety*, 2009, 31(2): 105-112.
- [19] ZENG Z G, KANG R, WEN M L, et al. A model-based reliability metric considering aleatory and epistemic uncertainty[J]. *IEEE Access*, 2017, 5: 15505-15515.
- [20] ZENG Z G, KANG R, WEN M L, et al. Uncertainty theory as a basis for belief reliability[J]. *Information Sciences*, 2018, 429: 26-36.
- [21] ZHANG Q Y, KANG R, WEN M L. Belief reliability for uncertain random systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(6): 3605-3614.
- [22] LIU B D. Extreme value theorems of uncertain process with application to insurance risk model[J]. *Soft Computing*, 2013, 17(4): 549-556.
- [23] TIAN C L, JIN T, YANG X F, et al. Reliability analysis of the uncertain heat conduction model[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2022, 119: 131-140.

(责任编辑:赵海军)