

引用:韩之超,刘应霖,王嘉铭,等. 基于输出反馈的电动汽车防爆胎固定时间控制[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2026, 39(2): 171-182

Citation: HAN Zhichao, LIU Yinglin, WANG Jiaming, SUN Zongyao, LIU Keli, ZHAO Junsheng. Output feedback fixed-time control strategy for run-flat tires of electric vehicles[J]. Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition), 2026, 39(2): 171-182.

文章编号 1672-6634(2026)02-0171-12

DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2025060002

基于输出反馈的电动汽车防爆胎固定时间控制

韩之超¹, 刘应霖², 王嘉铭³, 孙宗耀³, 刘科力³, 赵军圣⁴

(1. 曲阜师范大学 档案馆, 山东 曲阜 273165; 2. 曲阜师范大学 网络空间安全学院, 山东 曲阜 273165;
3. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165; 4. 聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 研究了电动汽车防爆胎系统的固定时间控制, 在控制设计中运用固定时间自适应律消除了外部干扰, 采用线性输入驱动滤波器来克服常见的全部系统状态需可测的限制, 即所有系统状态必须可用于测量。为进一步补偿由观测器误差引起的系统不确定动态, 在所提出的输出反馈控制器中引入了鲁棒自适应项, 并结合输入驱动滤波器设计了一种复合型鲁棒滤波方法, 有效提升系统对未知干扰与建模误差的抵抗能力, 以取消所有系统状态都需要测量的限制。最后通过仿真实例验证理论结果的可行性和有效性。

关键词 电动汽车防爆胎; 固定时间; 输出反馈; 鲁棒自适应

中图分类号 U463.6

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Output feedback fixed-time control strategy for run-flat tires of electric vehicles

HAN Zhichao¹, LIU Yinglin², WANG Jiaming³, SUN Zongyao³,
LIU Keli³, ZHAO Junsheng⁴

(1. Archives Center, Qufu Normal University, Qufu 273165, China; 2. College of Cyberspace Security, Qufu Normal University, Qufu 273165, China; 3. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu 273165, China;
4. School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract This paper investigates the fixed-time control of run-flat tire for electric vehicle systems in electric vehicles. In the control design, a fixed-time adaptive law is employed to eliminate external disturbances, while a linear input-driven filter is used to overcome the common limitation that all system states must be available for measurement. To further compensate for the uncertain dynamics due to observer errors, a robust adaptive term is incorporated into the proposed output feedback controller, constructing a new robust filtering approach to eliminate the constraint of requiring all system states to be measurable. Finally, numerical simulation examples verify the feasibility and effectiveness of the theoretical results.

Keywords run-flat tire for electric vehicle; fixed-time; output feedback; robust adaptive

收稿日期: 2025-06-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(62173208); 山东省泰山学者项目(tsqn202103061)资助

通信作者: 孙宗耀, 男, 汉族, 博士, 教授, 泰山学者青年专家, 研究方向: 非线性系统控制、自适应理论和时滞系统, E-mail: sunzongyao@sohu.com。

0 引言

近年来,随着绿色低碳出行理念的深入人心,电动汽车作为节能环保的重要交通工具,得到了飞速发展和广泛应用。然而,电动汽车的高速行驶能力和更高的重心设计,使其在轮胎爆胎等紧急工况下的行驶稳定性和安全性面临更严峻的挑战^[1-3]。轮胎爆胎作为一种突发性极强的故障形式,通常在极短的时间内引发车辆的非线性动态变化,包括车轮滚动半径减小、滚动阻力系数急剧增大、侧偏刚度和纵向刚度显著下降等。这些变化导致车辆的行驶平衡被打破,横摆力矩和车身晃动显著加剧,极易引发失控、侧翻甚至二次碰撞等严重事故^[4-5]。据公安部交通管理局数据统计,高速公路上的轮胎爆胎事故致死率远高于一般交通事故,而电动汽车因其动力传动和驱动结构的特殊性,爆胎事故对其稳定性影响尤为显著^[6-8]。传统的爆胎安全预警系统,如轮胎压力监测系统(TPMS),只能在轮胎失压前进行预警,无法在爆胎发生后的 0.1 s 内实现有效的主动控制和车身姿态调整,安全保障存在明显的滞后性。因此,如何在电动汽车爆胎发生后,设计高效、快速、鲁棒的主动控制策略,实现车辆在极短时间内的稳定性恢复,已成为当前汽车智能化和安全化控制领域的研究热点和技术难题^[9-14]。现有针对爆胎工况的控制策略,主要包括主动转向控制和差动制动控制两类思路,分别通过调整前轮转角或施加制动力差以补偿爆胎引发的横摆力矩^[15-19]。然而,这些方法大多依赖于车辆模型的完整状态测量信息,或仅在理想化的工况下验证其有效性,难以应对实际中存在的传感器测量误差、外部干扰和不确定动态。尤其在轮胎爆胎后瞬时动力学特性剧烈变化、外部干扰不可避免的实际工况下,传统的控制策略在响应速度、鲁棒性和可靠性方面仍存在较大提升空间。

针对上述问题,固定时间控制理论因其能够在固定时间内实现系统的稳定收敛,且收敛时间不依赖于初始条件,具有显著的工程应用潜力和理论优势^[20-25]。PID 控制结构简单、易于实现,但在应对非线性系统、强干扰和瞬态爆发性事件(如爆胎)时,响应速度慢、鲁棒性有限^[2]。有限时间控制虽然可实现有限时间收敛,但其收敛时间往往与初始状态有关,工程上难以精准预估调节时间。相比于有限时间控制,固定时间控制能够更明确地满足工程实际中对控制响应时间的严格要求,显著增强控制系统的实时性和安全性。然而,固定时间控制在复杂非线性系统下的应用仍存在一定的理论和实现难题,尤其是在观测器误差、外部扰动和非理想测量条件下,如何保障控制器的鲁棒性和实际可行性,是亟需解决的问题。

基于此,本文围绕电动汽车在爆胎紧急工况下的安全稳定控制问题,提出了一种基于输出反馈的电动汽车防爆胎固定时间控制策略。本文的创新点主要体现在:(1)突破了全部状态测量可得的限制,提出了一种基于输入驱动滤波器的输出反馈固定时间控制框架;(2)融合鲁棒自适应控制思想,增强了系统对观测器误差和外部干扰的抵抗能力,保障控制系统的高鲁棒性和高精度;(3)在理论上证明了闭环系统的有界性和固定时间收敛特性,并通过仿真验证了控制策略的有效性和工程可行性。

1 电动汽车二自由度理想模型

为了表述的清晰性,我们首先提供表 1 来展示电动汽车的参数符号。

图 1 建立了线性二自由度电动汽车模型,输入为前轮转角,需要分析电动汽车的侧向和横摆运动。实际中,前轮转角 b 的值很小,故模型总的侧向力和横摆力矩可以为

$$\begin{cases} B = T_f n_1 + T_r n_2, \\ H = a_f T_f n_1 - a_r T_r n_2, \end{cases} \quad (1)$$

式中 B 和 H 分别代表电动汽车模型的侧向力和横摆力矩。

考虑到 $\beta = \frac{v_2}{v_1} + \frac{a_f r}{v_1} = c + \frac{a_f r}{v_1}$, 侧偏角为

$$\begin{cases} n_1 = \beta - b = c + \frac{a_f r}{v_1} - b, \\ n_2 = \frac{v_2 - a_f r}{v_1} = c - \frac{a_f r}{v_1}, \end{cases} \quad (2)$$

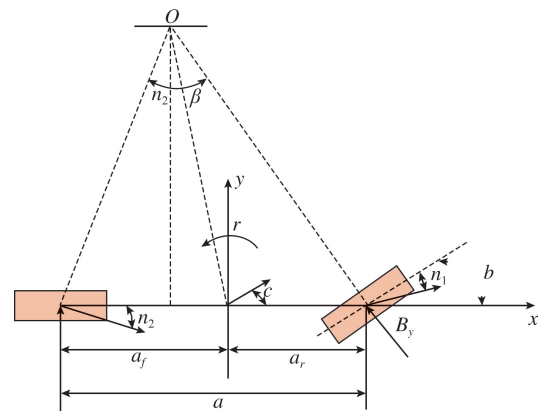


图 1 电动汽车二自由度理想模型

Fig. 1 Two-degree-of-freedom ideal model of electric vehicles

表1 电动汽车参数符号表

Tab. 1 Table of Parameter Symbols for Electric Vehicles

参数名称	参数符号	参数名称	参数符号	参数名称	参数符号	参数名称	参数符号
h_1	纵向摩擦系数	m	电动汽车质量	a	轴距	H	横摆力矩
f	总滑移率	r	横摆角速度	b	前轮转向角	V_{s1}	轮胎相对地面的纵向滑移速度
h_2	侧向摩擦系数	V_2	电动汽车质心横向速度	M	横摆力矩	V_{s2}	轮胎相对地面的侧向滑移速度
d	接地印迹半长	V_1	电动汽车质心纵向速度	T_f	前轮侧偏刚度	L_1	胎体纵向平移刚度
h	总摩擦系数	I	电动汽车绕 z 轴的转动惯量	T_r	后轮侧偏刚度	L_2	胎体侧向平移刚度
t_1	胎面沿 x 轴方向的分布刚度	B_x	前轮胎侧向力	n_1	前轮侧偏角	d	接地印迹半长
f_1	纵向滑移率	B_y	后轮胎侧向力	n_2	后轮侧偏角	c	质心侧偏角
t_2	胎面沿 y 轴方向的分布刚度	a_f	前轴到质心的距离	α	轮胎滚动角速度	B	侧向力
f_2	横向滑移率	a_r	后轴到质心的距离	R	有效滚动半径	o	相对纵坐标

将上式代入式(1),可得

$$\begin{cases} (T_f + T_r)c + \frac{r}{v_1}(a_f T_f - a_r T_r) - T_r b = m(\dot{v}_2 + v_1 r), \\ (a_f T_f - a_r T_r)c + \frac{r}{v_1}(a_f^2 T_f - a_r^2 T_r) - a_f T_r b = I \dot{r}, \end{cases} \quad (3)$$

由式(2)可知,电动汽车前后轮的侧偏角之差为: $n_1 - n_2 = \varphi a r v_1 - b$ 。当 $r < \varphi b v_1 a$ 时过度转向,当 $r = \varphi b v_1 a$ 时中度转向,当 $r > \varphi b v_1 a$ 时为不足转向。当爆胎电动汽车的转向特性处于过多转向和不足转向时,就需要控制介入维持车身稳定行驶。假设电动汽车匀速行驶时,前轮转角输入是一个阶跃信号,此时横摆角速度和侧向速度不变,即 $\dot{r} = 0, v_1 = 0$ 。此时,式(3)可表示为

$$\begin{cases} (T_f + T_r)c + \frac{r}{v_1}(a_f T_f - a_r T_r) - T_r b = m v_1, \\ (a_f T_f - a_r T_r)c + \frac{r}{v_1}(a_f^2 T_f - a_r^2 T_r) - a_f T_r b = 0, \end{cases} \quad (4)$$

将质心侧偏角用侧向速度与纵向速度表示,可得

$$\begin{cases} (T_f + T_r) \frac{v_2}{v_1} + \frac{r}{v_1}(a_f T_f - a_r T_r) - T_r b = m v_1, \\ (a_f T_f - a_r T_r) \frac{v_2}{v_1} + \frac{r}{v_1}(a_f^2 T_f - a_r^2 T_r) - a_f T_r b = 0, \end{cases} \quad (5)$$

根据 $G = \frac{m}{a^2}(\frac{a_f}{T_r} - \frac{a_r}{T_f})$ 和(5)可得电动汽车稳定时的横摆角速度表达式为

$$\bar{r}_d = \frac{\frac{v_1 b}{a}}{1 + G v_1^2}, \quad (6)$$

电动汽车在转向时会受到路面附着系数 h 的影响,此时侧向加速度 a_2 会有所变化,因此电动汽车达到稳定极限条件为 $a_2 \leq h g$ 。电动汽车做匀速圆周运动时的半径为 R ,电动汽车在极限稳定状态下的,电动汽车侧向加速度满足: $a_2 = \varphi v_1^2 R = r v_1$ 。因此,电动汽车期望横摆角速度最大值为 $r_{d, \max} = \varphi h g v_1$ 。电动汽车在稳定状态下,理想的横摆角速度为

$$r_d = \min \left\{ \left| \frac{\frac{v_1 b}{a}}{1 + G v_1^2} \right|, \left| \frac{h g}{v_1} \right| \right\} \text{sign}(b)。 \quad (7)$$

由式(2)可知,电动汽车轮胎的侧偏角由质心侧偏角、横摆角速度和前轮转角共同决定。当质心侧偏角较大时,轮胎侧偏角也会相应增大,进而导致前后轮胎的侧向力增加。根据“摩擦椭圆”原理,当轮胎的侧向力达到饱和时,转向将无法改变电动汽车的运动状态。此外,轮胎的受力情况与路面附着系数密切相关,附着系数越低,轮胎侧向力越容易达到饱和。

当电动汽车质心侧偏角为零时,随着前轮转角的增大,侧向力逐渐上升,直至进入饱和区域,此时转向效果逐渐减弱。若质心侧偏角不为零且逐渐增大,电动汽车的横摆力矩会先增加后减少,当质心侧偏角达到某个特定值时,横摆力矩接近于零。同时,质心侧偏角的增大也会导致侧向力上升,但其增长速率逐渐降低,直至质心侧偏角达到某一临界值,轮胎侧向力达到峰值。此时,驾驶员无法通过调整转向来改变电动汽车的行驶状态。通过式(3),可得质心侧偏角的表达式为

$$\begin{aligned}\bar{c}_d &= \left[\frac{a_r}{a(1+Gv_1^2)} + \frac{ma_f v_1^2}{T_r a^2(1+Gv_1^2)} \right] b \\ &= \frac{v_1 b}{a(a+Gv_1^2)} \left(\frac{a_r}{v_1^2} + \frac{ma_f}{T_r a} \right) v_1.\end{aligned}\quad (8)$$

进一步可得

$$\hat{c}_d = \frac{hg}{v_1} \left(\frac{a_r}{v_1^2} + \frac{ma_f}{T_r a} \right) v_1 = hg \left(\frac{a_r}{v_1^2} + \frac{ma_f}{T_r a} \right). \quad (9)$$

电动汽车在稳定状态下的理想质心侧偏角为

$$c_d = \min \left\{ \left| r \left(\frac{a_r}{v_1^2} + \frac{ma_f}{T_r a} \right) v_1 \right|, \left| hg \left(\frac{a_r}{v_1^2} + \frac{ma_f}{T_r a} \right) \right| \right\}.$$

综上所述,电动汽车的纵向和横摆运动学微分方程为

$$\begin{cases} mv_1(\dot{c} + r) = B_x \cos b + B_y, \\ I\dot{r} = a_f B_x \cos b - a_r B_y + \Delta M = T\dot{r}, \end{cases} \quad (10)$$

式中 ΔM 是为了稳定电动汽车正常行驶而不爆胎而施加的外力矩。根据上式并结合(3),可得

$$\begin{aligned}(T_f + T_r)c_d + \frac{r_d}{v_1}(a_f T_f - a_r T_r) - T_r b &= mv_2(\dot{c}_d + r_d), \\ (a_f T_f - a_r T_r)c_d + \frac{r}{v_1}(a_f^2 T_f - a_r^2 T_r) - a_f T_r b + \Delta M &= I\dot{r}_d,\end{aligned}\quad (11)$$

将上式化简得

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_d \\ \dot{r}_d \end{bmatrix} = \mathbf{L}_1 \begin{bmatrix} c_d \\ r_d \end{bmatrix} + \mathbf{L}_2 b + \mathbf{L}_3 \Delta M, \quad (12)$$

$$\text{式中 } \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-T_f - T_r}{mV} & \frac{a_f T_f - a_r T_r}{mV^2} - 1 \\ \frac{a_f T_f - a_r T_r}{I} & \frac{-a_f^2 T_f - a_r^2 T_r}{IV} \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \left[\frac{T_f}{mV}, \frac{a_f T_f}{I} \right]^T, \mathbf{L}_3 = \left[0, \frac{1}{I} \right]^T.$$

公式(7)是电动汽车在理想稳定工况下(即无外部干扰、轮胎参数恒定、车辆匀速转弯)的横摆角速度理论极限,来自车辆动力学的稳态解析推导,是“期望行为”的参考值;公式(12)则是在考虑轮胎实际侧偏刚度、前轮转角、车速等具体参数下,推导得到的系统实际稳态条件下的响应模型,其中包含质心侧偏角与输入前轮转角的表达。

当轮胎发生爆裂时,爆胎制动效应和轮胎滚动阻力的增大导致产生额外的横摆力矩,使爆裂轮胎围绕主销向爆裂一侧旋转。这一现象会对转向系统产生影响。由于爆胎是突发状况,驾驶员无法提前做出反应。此外,驾驶员的反应时间最短为 0.3 s,而爆胎过程仅持续约 0.1 s。因此,驾驶员完全无法做出反应,从而导致转向系统在瞬间将两个前轮同时转向爆胎侧,进一步加剧车辆的偏离。由该力矩引起的前轮转角被称为

附加前轮转向角 b_1 。也就是说,当轮胎爆裂时,它将产生附加的横摆力矩 ΔM_1 和附加的前轮转向角 b_1 。考虑附加横摆力矩、附加前轮转向角和其它外部干扰 $\mathbf{d}$, 实际防爆胎模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_1 \begin{bmatrix} c \\ r \end{bmatrix} + \mathbf{L}_2(b + b_1) + \mathbf{L}_3(\Delta M + \Delta M_1) + \mathbf{d}, \quad (13)$$

式中 $\mathbf{d} = [d_1, d_2]^T$, 式(13)减去式(12)得到

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{c} \\ \Delta \dot{r} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_1 \begin{bmatrix} \Delta c \\ \Delta r \end{bmatrix} + \mathbf{L}_2 b_1 + \mathbf{L}_3 \Delta M_1 + \mathbf{d}, \quad (14)$$

b_1 为常数,当电动汽车爆胎后, ΔM_1 对车身稳定的影响远大于由外部扰动产生的影响。另外爆胎后轮胎力的变化情况又是无法观测的,因此我们可以认为 $\mathbf{L}_3 \Delta M_1 + \mathbf{d}$ 是未知常数。进而我们定义

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \Delta c x_2(t) = a_{12} \Delta r u(t) = a_{12} \frac{\Delta M_1}{I}, \\ \theta_1 &= \frac{T_f}{mV} b_1 + d_1 \theta_2 = \frac{a_f T_f}{I} b_1 + d_2. \end{aligned} \quad (15)$$

因此,电动汽车防爆胎控制模型可以被改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + a_{11}x_1(t) + \theta_1, \\ \dot{x}_2(t) = u + a_{21}a_{12}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{12}\theta_2, \end{cases} \quad (16)$$

式中 θ_1, θ_2 是未知常数, $a_{11} = \frac{-T_f - T_r}{mV}$, $a_{12} = \frac{a_f T_f - a_r T_r}{mV^2} - 1$, $a_{21} = \frac{a_f T_f - a_r T_r}{I}$, $a_{22} = \frac{-a_f^2 T_f - a_r^2 T_r}{IV}$ 。

2 控制设计

2.1 输入驱动滤波器设计

首先我们设计输入驱动滤波器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1(t) = \hat{\mathbf{x}}_2(t) - l'_1 \hat{\mathbf{x}}_1(t), \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) = u(t) - l'_1 \hat{\mathbf{x}}_1(t), \end{cases} \quad (17)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}(t) = [\hat{x}_1, \hat{x}_2]^T$ 是系统状态 $x(t)$ 的估计值,估计误差定义为 $r(i) = x_i - \hat{x}_i$, ($i=1,2$)。对于输入驱动滤波器,误差系统可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_2 - l'_1 r_1 + a_{11}x_1 + \theta_1 + l'_1 x_1, \\ \dot{r}_2 &= -l'_2 r_1 + a_{12}a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{12}\theta_2 + l'_2 x_1. \end{aligned} \quad (18)$$

选择适当的参数 l'_1, l'_2 , 使得 $\mathbf{A}_c$ 是严格的 Hurwitz 矩阵。将矩阵 $\mathbf{A}_c$ 定义为

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -l'_1 & 1 \\ -l'_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

因此,对于给定的对称正定矩阵 $\mathbf{Q}$, 存在对称矩阵 $\mathbf{P} > 0$, 使得

$$\mathbf{A}_c^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_c = -2\mathbf{Q}. \quad (20)$$

因此式(18)可以重新表示为 $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{r}(t) + \mathbf{F}(\bar{x}_n) + \boldsymbol{\theta}(t, \bar{x}_n)$ 。其中, $\mathbf{r}(t) = [r_1(t), r_2(t)]^T \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{F}(\bar{x}_n) = [a_{11}x_1 + l'_1 x_1, a_{12}a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + l'_2 x_1]^T \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{\theta}(t, \bar{x}_n) = [\theta_1, a_{12}\theta_2]^T \in \mathbf{R}^n$ 。具有输入驱动滤波器的系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{r}(t) + \mathbf{F}(\bar{x}_n) + \boldsymbol{\theta}(t, \bar{x}_n), \dot{x}_1(t) = \hat{x}_2(t) + r_2 + a_{11}x_1 + \theta_1, \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) - l'_1 \hat{x}_1(t), \dot{\hat{x}}_2(t) = u(t) - l'_2 \hat{x}_1(t), y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (21)$$

2.2 输出反馈控制器设计

第一步:选择李雅普诺夫函数为 $V_0(x) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r}$, 对其进行求导

$$\dot{V}_0(x) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}}^T \mathbf{P} \mathbf{r} + \mathbf{r}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{r}}) \leq -\lambda \min(\mathbf{H}) \|\mathbf{r}\|_2^2 + \mathbf{r}^T \mathbf{P} (\mathbf{F} + \boldsymbol{\theta}), \quad (22)$$

式中 $\lambda \min(\mathbf{H})$ 是矩阵 $\mathbf{H}$ 的最小特征值。因为通用逼近性质要求输入保持在一个紧致的集合中, 在这样的紧集上, 很明显非线性函数 $\mathbf{F}(\bar{x}_n)$ 和 $\omega(t, \bar{x}_n)$ 是有界的。

$$\|\mathbf{F}(x_1, x_2)\|_2 \leq \bar{F}_0, \|\boldsymbol{\theta}(x_1, x_2)\|_2 \leq \bar{\theta}_0, \quad (23)$$

式中 $\bar{F}_0$ 和 $\bar{\theta}_0$ 是两个未知的正常数。由此我们可得

$$\mathbf{r}^T \mathbf{P} (\mathbf{F}_\theta) \leq \|\mathbf{r}\|_2 \|\mathbf{P}\|_F (\|\mathbf{F}\|_2 + \|\boldsymbol{\theta}\|_2) \leq \|\mathbf{r}\|_2^2 + \lambda_0$$

式中 λ_0 是复合常数, 可将其定义为

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \|\mathbf{P}\|_F^2 (\bar{F}_0^2 + \bar{\theta}_0^2), \quad (24)$$

将式(23)、(24)代入式(22)中得

$$\dot{V}_0(x) \leq -[\lambda \min(\mathbf{H}) - 1] \|\mathbf{r}\|_2^2 + \lambda_0. \quad (25)$$

第二步:选择李雅普诺夫函数 V_1 为

$$V_1(x) = V_0(x) + \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2\lambda} \tilde{\mu}, \quad (26)$$

式中 $\hat{\mu}$ 表示为 μ 的估计值且为正常数, μ 估计误差为 $\tilde{\mu} = \mu - \hat{\mu}$ 且满足 $\mu = \max\{|\boldsymbol{\theta}|\}$ 。引入以下坐标变换

$$z_1 = x_1, z_2 = \hat{x}_2 - \alpha_1, \quad (27)$$

对 V_1 进行求导 $\dot{V}_1(x) \leq -[\lambda \min(\mathbf{H}) - 1] \|\mathbf{b}\|_2^2 + \lambda_0 - \frac{1}{\lambda} \tilde{\mu} \dot{\mu} + z_1(z_2 + \alpha_1 + a_{11}x_1 + r_2 + \theta_1)$ 。

设计虚拟控制器 α_1 为

$$\alpha_1 = -k_1 z_1^{2p-1} - l_1 z_1^{2q-1} - z_1 - a_{11} z_1 - \hat{\mu} \tanh\left(\frac{z_1}{\omega_1}\right), \quad (28)$$

式中 ω_1 为被设计的常数。自适应律 $\dot{\hat{\mu}}$ 设计为

$$\dot{\hat{\mu}} = z_1 \lambda \tanh\left(\frac{z_1}{\omega_1}\right) - b\hat{\mu} - \rho \hat{\mu}^{2q-1}, \quad (29)$$

式中 $b > 0, \rho > 0, \lambda > 0$ 为设计的正常数。由定理 1 可以得到下列不等式

$$z_1 z_2 \leq \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 z_1 r_2 \leq \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{r}\|_2^2. \quad (30)$$

进而, 有

$$z_1 \theta_1 \leq |z_1| \mu \leq z_1 \mu \tanh\left(\frac{z_1}{\omega_1}\right) + p_1 \omega_1. \quad (31)$$

将式(29)~(31)代入式(28)可得

$$\dot{V}_1(x) \leq -[\lambda \min(\mathbf{H}) - \frac{3}{2}] \|\mathbf{r}\|_2^2 + \lambda_0 - k_1 z_1^{2p} - l_1 z_1^{2q} + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{b}{\lambda} \tilde{\mu} \hat{\mu} + \frac{\rho}{\lambda} \tilde{\mu} \hat{\mu}^{2q-1}. \quad (32)$$

在计算 $\tilde{\mu} \hat{\mu}^{2q-1}$ 的过程中, 核心是必须满足 $\hat{\mu} \geq 0$ 。因为 $\forall t \geq t_0$, 满足 $\hat{\mu}(t) \geq 0$ 。根据杨氏不等式得

$$\tilde{\mu} \hat{\mu}^{2q-1} = \tilde{\mu} (\mu - \tilde{\mu})^{2q-1} \leq \frac{2q-1}{2q} (\mu^{2q} - \tilde{\mu}^{2q}), \quad (33)$$

$$\tilde{\mu} \hat{\mu} = -\tilde{\mu}^2 + \mu \tilde{\mu} \leq -\tilde{\mu}^2 + \frac{\tilde{\mu}^2 + \mu^2}{2} = -\frac{1}{2} \tilde{\mu}^2 + \frac{1}{2} \mu^2, \quad (34)$$

$$\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{2\lambda}\right)^p \leq \frac{\tilde{\mu}^2}{2\lambda} + (1-p)p^{\frac{p}{1-p}}, \quad (35)$$

将式(32)、(33)代入式(31),可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -[\lambda \min(\mathbf{H}) - \frac{3}{2}] \|\mathbf{r}\|_2^2 + \lambda_0 - l_1 z_1^{2p} - l_1 z_1^{2q} + \frac{1}{2} z_2^2 - \mathbf{r} \left(\frac{\tilde{\mu}}{2\lambda}\right)^p - 2^q \lambda^{q-1} \rho \frac{2q-1}{2q} \left(\frac{\tilde{\mu}}{2\lambda}\right)^q + \\ & \frac{b}{2\lambda} \mu^2 + \frac{(2q-1)\rho}{2q\lambda} \mu^{2q} + r(1-p)p^{\frac{p}{1-p}} \\ \leq & -[\lambda \min(\mathbf{H}) - \frac{3}{2}] \|\mathbf{r}\|_2^2 - l_1 z_1^{2p} - l_1 z_1^{2q} - b \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{2\lambda}\right)^p + \frac{1}{2} z_2^2 - 2\lambda \rho \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{2\lambda}\right)^q + A_1, \end{aligned} \quad (36)$$

式中 $A_1 = \frac{b}{2\lambda} \mu^2 + \frac{(2q-1)\rho}{2q\lambda} \mu^{2q} + b(1-p)p^{\frac{p}{1-p}} + \lambda_0$ 。

第三步:选择李雅普诺夫函数 $V_2(x)$ 为 $V_2(x) = \frac{1}{2} z_2^2$ 。对其进行求导可得

$$\dot{V}_2(x) = z_2(u - l'_2 \hat{x}_1 - \dot{a}_1) = z_2(u - l'_2 \hat{x}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(\hat{x}_2 + r_2 + a_{11}x_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu} \dot{\mu}), \quad (37)$$

由杨氏不等式可以得到下列不等式

$$z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(\hat{x}_2 + r_2) \leq z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \hat{x}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\right)^2 z_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{r}\|_2^2, \quad (38)$$

设计控制器 u 为

$$u = -k_2 z_2^{2p-1} - l_2 z_2^{2q-1} + l'_2 \hat{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \hat{x}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\right)^2 z_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu} \dot{\mu} + a_{11} - \frac{1}{2} z_1, \quad (39)$$

将式(38)、(39)代入式(37)可得

$$\dot{V}_2(x) \leq -k_2 z_2^{2p} - l_2 z_2^{2q-1} - \frac{1}{2} z_1^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{r}\|_2^2. \quad (40)$$

3 主要结果

定理1 考虑电动汽车爆胎系统(16),利用本章节设计的控制器及自适应律,使得以下目标可以实现:

(1) 电动汽车爆胎系统(16)是固定时间稳定的,并且稳定时间 T 由下式界定

$$T \leq T_{\max} = \frac{100}{c(1-p)} + \frac{100}{\phi(q-1)}. \quad (41)$$

(2) 跟踪误差在一定时间内收敛到原点。

证明 因为: $V(x) = V_1(x) + V_2(x) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r} + \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2\lambda} \tilde{\mu}_1 + \frac{1}{2} z_2^2$, 因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & -[\lambda \min(\mathbf{H}) - 1] \|\mathbf{r}\|_2^2 - k_1 z_1^{2p} - l_1 z_1^{2q} - b \left(\frac{\tilde{\mu}}{2\lambda}\right)^p - \\ & 2\lambda \rho \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{2\lambda}\right)^q - k_2 z_2^{2p} - l_2 z_2^{2q-1} + A_1. \end{aligned} \quad (42)$$

令 $\eta = \lambda \min(\mathbf{H}) - 1$, 可得 $-\eta \|\mathbf{r}\|_2^2 \leq -\left[\frac{\eta \mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r}}{2\lambda \max(\mathbf{P})}\right]^p - \left[\frac{\eta \mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r}}{2\lambda \max(\mathbf{P})}\right]^q + vv = (1-p)p^{\frac{p}{1-p}} + \left(\frac{\eta}{2} \|\mathbf{r}\|_2\right)^q$ 。将上式代入式(42)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & -\left[\frac{\eta \mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r}}{2\lambda \max(\mathbf{P})}\right]^p - \left[\frac{\eta \mathbf{r}^T \mathbf{P} \mathbf{r}}{2\lambda \max(\mathbf{P})}\right]^q - \sum_{i=1}^2 2^p k_i \left(\frac{z_i^2}{2\lambda}\right)^p - b \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{2\lambda}\right)^p - \sum_{i=1}^2 l_i z_i^q \left(\frac{z_i^2}{2\lambda}\right)^q - 2\lambda \rho \left(\frac{\tilde{\mu}}{2\lambda}\right)^q + A \\ \leq & -cV^p - \phi V^q + A, \end{aligned} \quad (44)$$

式中 $A = A_1 + v$, $c = \min\left\{2^p k_i, \phi, \frac{\eta}{2\lambda \max(\mathbf{P})}\right\}$, $\phi = \min\left\{2l, 2\lambda \rho, \frac{\eta}{2\lambda \max(\mathbf{P})}\right\}$, $l = \min\{l_i, i=1, 2\}$ 。

当 $V(x) > 1$ 时, 根据 $A < \min\{(\frac{99}{100}), (\frac{99}{100})\phi\}$, 我们可以得知 $\frac{A}{(\frac{99}{100})\phi} \leq 1 \leq V^q(x)$ 。因此 $A \leq$

$(\frac{99}{100})\phi V^q(x)$ 。由式(44)可知, 存在

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{1}{100}\phi V^q(x) - (\frac{99}{100})\phi V^q(x) + A \leq -\frac{1}{100}\phi V^q(x), \quad (45)$$

将上式进行转化

$$\int_0^t \frac{\dot{V}(x)}{V^q(x)} dt \leq -\frac{1}{100} \int_0^t \phi dt, \quad (46)$$

对上式两边进一步求解可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q} V^{1-q}(x(t)) - \frac{1}{1-q} V^{1-q}(x(0)) &\leq -\frac{1}{100} \phi t, \\ V^{q-1} &\leq \frac{1}{V^{1-q}(0) + \frac{1}{100} \phi t (q-1)} \leq \frac{1}{\frac{1}{100} \phi t (q-1)}. \end{aligned} \quad (47)$$

假设 $T_1 = \frac{1}{\phi 1100 \phi (q-1)}$, 当 $\forall t \geq T_1$ 时, $V^{q-1}(x) \leq 1$, 因此可得 $V(x) \leq 1$ 。当 $V(x) \leq 1$ 时, $\frac{1}{100} \in (0, 1)$ 时可得

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{1}{100} c V^p(x) - (\frac{99}{100}) c V^p(x) + A. \quad (48)$$

令 $\chi_x = \left\{x \mid V^p(x) \leq \frac{A}{(99/100)c}\right\}$, $\bar{\chi}_x = \left\{x \mid V^p(x) > \frac{A}{(99/100)c}\right\}$ 。如果 $x(t) \in \bar{\chi}_x$ 时可得

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{1}{100} c V^n(x), \quad (49)$$

进一步求解可得

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{\dot{V}(x)}{V^p(x)} dt &\leq -\frac{1}{100} \int_{t_0}^t c dt, \\ \frac{1}{1-p} V^{1-p}(x(t)) - \frac{1}{1-p} V^{1-p}(0) &\leq -\frac{1}{100} c (t - t_0). \end{aligned} \quad (50)$$

令 $t_0 \geq T_1$, 可知 $V(x(t_0)) \leq 1$, 可得下列不等式

$$V^{1-p}(x(t)) \leq V^{1-p}(x(t_0)) - \frac{1}{100} c (1-p)(t - t_0) \leq \frac{99}{100} c (1-p)(t - t_0). \quad (51)$$

假设 $T_2 = \frac{1}{\phi 1100 c (1-p)}$, 结合函数 $V(x)$ 的正定性质, 对于 $\forall t \geq t_0 + T_2$ 可得 $V^p(x) \leq \frac{A}{(\frac{99}{100})c}$ 。

当 $x(t) \in \chi_x$ 时, 根据 LaSalle 不变集原理, $x(t)$ 不超过集合 χ_x 。综上所述, χ_x 是一个不变集。因此

$\forall t \geq T_1 + T_2, V^p(x) \leq \frac{A}{(\frac{99}{100})c}$ 是成立的, 且 $\|x\| \leq \zeta_1^{-1} \left\{ \left(\frac{A}{(\frac{99}{100})c} \right)^{\frac{1}{1-p}} \right\}$ 。因此, 电动汽车爆胎系统实际

上是固定时间稳定的, 并且稳定时间 T 小于由式(44)定义的 $T_{\max}$, 证毕。

注 1 首先, 针对输入驱动滤波器的估计误差系统(公式(18)), 通过 Lyapunov 方法分析其收敛性, 确保状态估计的可靠性。进而, 在输出反馈控制器设计与主定理证明中, 针对被控系统的闭环动态, 逐步证明了在所有滤波与自适应参数误差均收敛的前提下, 整个被控系统的状态和跟踪误差在固定时间内收敛至原点, 从而保证了整体控制方案的有效性与鲁棒性。需要指出的是, 本文所述稳定性分析涵盖了对滤波器估计误

差系统和被控闭环系统的双重收敛性分析,确保了理论推导与实际工程实现的一致性。

4 仿真实验

在本节中,我们通过对电动汽车爆胎系统的仿真来验证自适应有限时间控制器的有效性。电动汽车的关键参数如表2所示。选择设计参数 $l_1=1, l_2=2, k_1=12, k_2=3.8$ 。爆胎仿真的目的是为了验证所设计控制器的有效性,因此不对每个车轮的爆胎仿真进行详细的讨论,仅对直线行驶下左前轮爆胎进行讨论。

假设电动汽车以60 km/h的速度行驶在直行道路时电动汽车左前轮发生爆胎,此时司机不对电动汽车进行控制操作和在施加控制情况下发生爆胎状态时电动汽车各参数如图2~5所示。

当电动汽车在速度为60 km/h时发生爆胎后没有施加控制时各参数仿真图如图2和4所示。质心侧偏角在3 s的时候达到峰值,约为 -1.62° ,在仿真第8.5 s时稳定为 -0.81° 。在爆胎后2.8 s时出现横摆角速度的峰值,其值约为 $7.7^\circ/\text{s}$ 。在发生震荡后,于仿真6.5 s时,横摆角速度达到 $4.7^\circ/\text{s}$ 这一稳定值。当电动汽车发生爆胎后施加固定时间控制时各参数仿真图如图3和5所示。系统横摆角速度在1 s处达到峰值 $-0.08^\circ/\text{s}$,并在4.26 s处稳定为零(如图3所示)。图5中质心侧偏角在4.26 s内稳定到零,这意味着实际车辆侧滑角迅速收敛到期望车辆侧滑角。

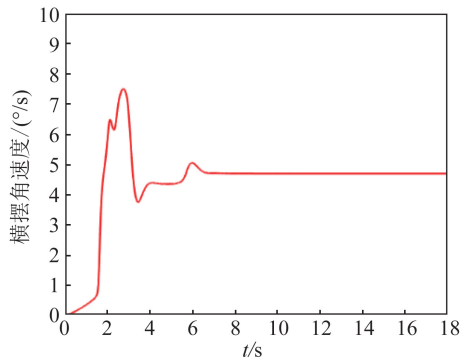


图2 爆胎后未施加控制下横摆角速度

Fig. 2 The yaw rate without control after the electrical tire burst

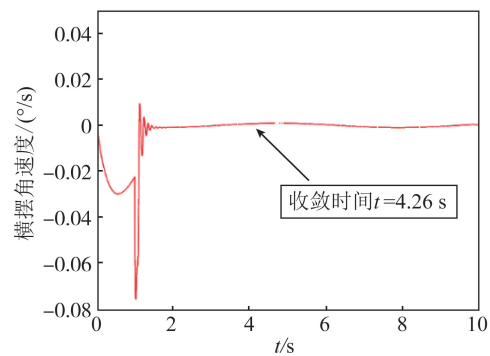


图3 爆胎后施加控制下横摆角速度

Fig. 3 The controlled lateral angular velocity after a tire blowout

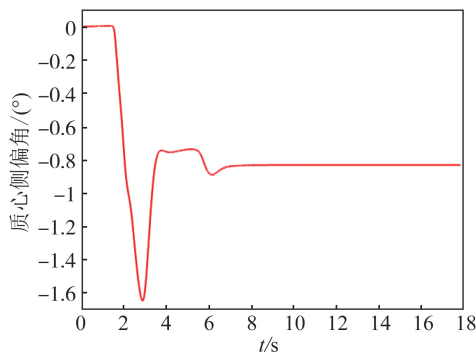


图4 爆胎后未施加控制下质心侧偏角

Fig. 4 The lateral deviation angle of the center of mass after a tire blowout without any control applied

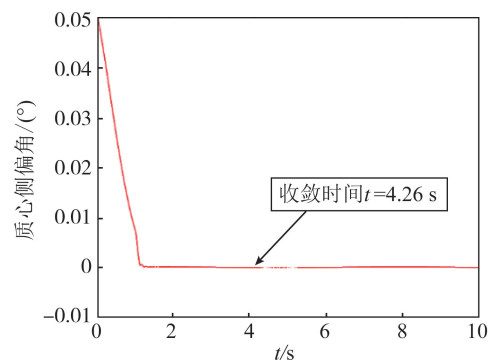


图5 爆胎后施加控制下质心侧偏角

Fig. 5 The controlled yaw angle of the center of mass after a tire blowout

假设电动汽车以90 km/h的速度行驶在直行道路时电动汽车左前轮发生爆胎,爆胎状态下电动汽车各参数如图6~9所示。当电动汽车在速度为90 km/h时发生爆胎后没有施加控制时各参数仿真图如图6和8所示。图8为质心侧偏角变化图,其峰值约为 -2.6° ,在仿真第5 s时在 -1.48° 处稳定。在爆胎后3 s时出现横摆角速度的峰值,其值约为 $7.8^\circ/\text{s}$ 。在发生震荡后,于仿真5 s时,横摆角速度稳定在 $4.5^\circ/\text{s}$ 。图7和9为车速90 km/h下爆胎施加固定时间控制曲线图,由图可见车辆参数在3.83 s左右收敛至0,极大提高了车辆稳定性。

表 2 电动汽车系统参数

Tab. 2 Electric vehicle system parameters

参数	取值	参数	取值
m	2 130	T_r	22 000
a_f	1. 103	I	1 110
a_r	1. 244	T_f	20 000

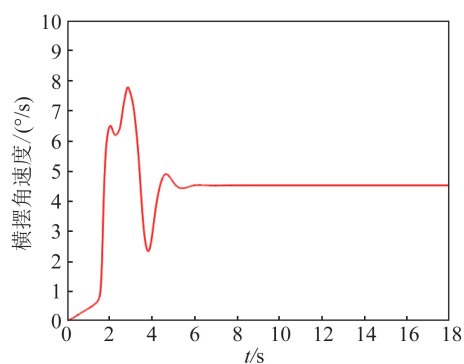


图 6 爆胎后未施加控制下横摆角速度

Fig. 6 The lateral angular velocity after a tire blowout that was not controlled

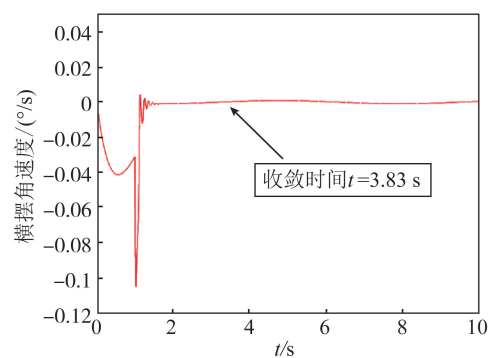


图 7 爆胎后施加控制下横摆角速度

Fig. 7 The controlled lateral angular velocity after a tire blowout

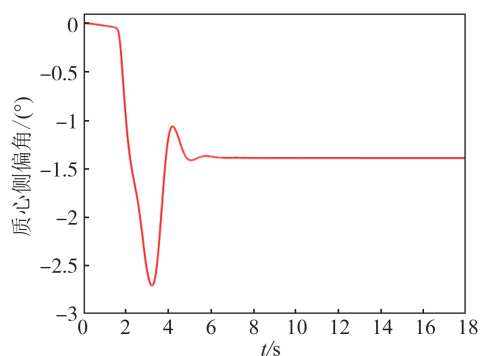


图 8 爆胎后未施加控制下质心侧偏角

Fig. 8 The lateral deviation angle of the center of mass after a tire blowout without any control applied

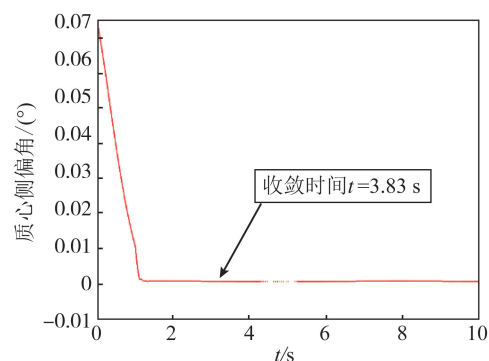


图 9 爆胎后施加控制下质心侧偏角

Fig. 9 The controlled yaw angle of the center of mass after a tire blowout

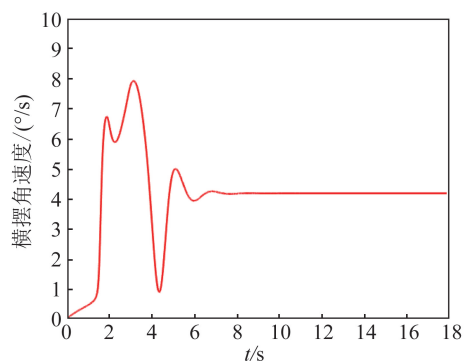


图 10 爆胎后未施加控制下横摆角速度

Fig. 10 The lateral angular velocity after a tire blowout that was not controlled

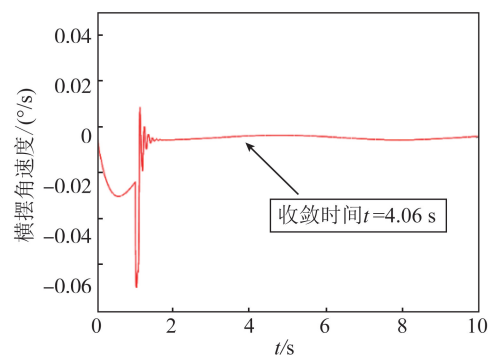


图 11 爆胎后施加控制下横摆角速度

Fig. 11 The controlled lateral angular velocity after a tire blowout

假设电动汽车以 120 km/h 的速度行驶在直行道路时电动汽车左前轮发生爆胎,爆胎状态下电动汽车

各参数如图10~13所示。当电动汽车在速度为120 km/h时发生爆胎后没有施加控制时各参数仿真图如图10,12所示。质心侧偏角变化后最大值约为 -3.7° ,在仿真第6 s时稳定为 -1.7° 。在爆胎后3 s时出现横摆角速度的峰值,其值约为 $8^\circ/\text{s}$ 。经过连续震荡后,横摆角速度达到 $4.1^\circ/\text{s}$ 这一稳定值。当电动汽车在速度为120 km/h时发生爆胎后施加控制时各参数仿真图如图11,13所示。横摆角速度在1 s处达到峰值 $-0.078^\circ/\text{s}$,在4.06 s处收敛到0,质心侧偏角在4.06 s处收敛到0,通过对上述三种速度进行仿真分析,充分说明了该控制方法的有效性。图14~16给出了三种速度下的估计误差。

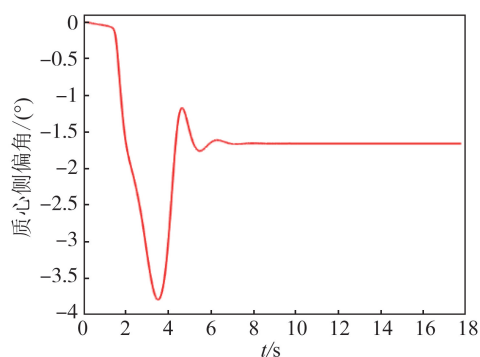


图12 爆胎后未施加控制下质心侧偏角

Fig. 12 The lateral deviation angle of the center of mass after a tire blowout without any control applied

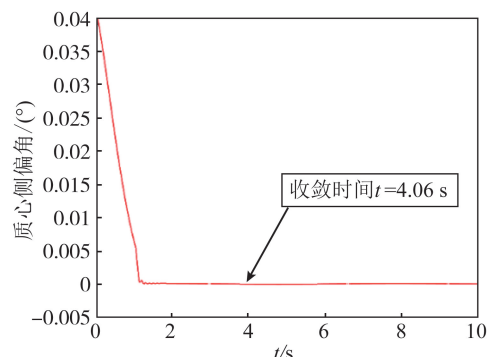


图13 爆胎后施加控制下质心侧偏角

Fig. 13 The controlled yaw angle of the center of mass after a tire blowout

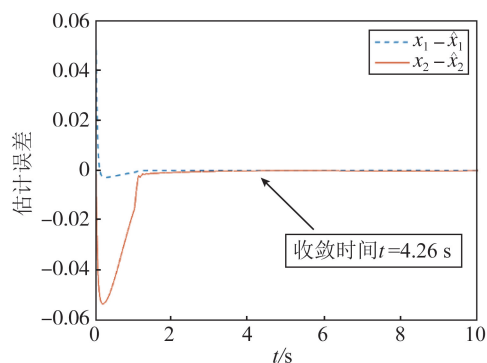


图14 60 km/h 行驶时的估计误差

Fig. 14 Estimated error at a speed of 60 km/h

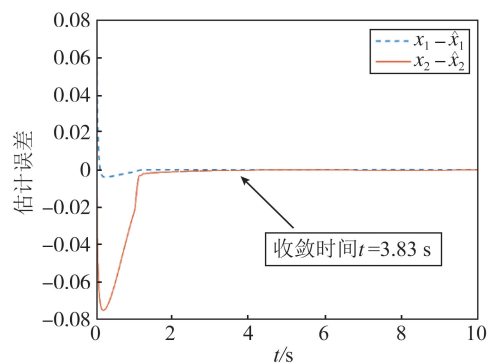


图15 90 km/h 行驶时的估计误差

Fig. 15 Estimated error at a speed of 90 km/h

5 结论

本文提出了一种基于输出反馈控制的自适应固定时间控制策略,使得系统性能在固定时间内得到保证,通过调整控制器设计参数,可以改变稳定时间的上界,与系统的初始状态无关。由于常规的未知参数自适应律设计方法不符合固定时间稳定性准则。为此,设计了一种新的非线性微分方程参数自适应律,根据李雅普诺夫稳定理论,该方案可以确保爆胎系统在固定时间内稳定。此外,通过输入驱动滤波器和鲁棒自适应方法的结合,可以消除可测系统状态的限制。所设计的输出反馈控制器保证了闭环系统中所有信号的有界性和跟踪误差的收敛性。最后的仿真结果验证了该方案的合理性和有效性。

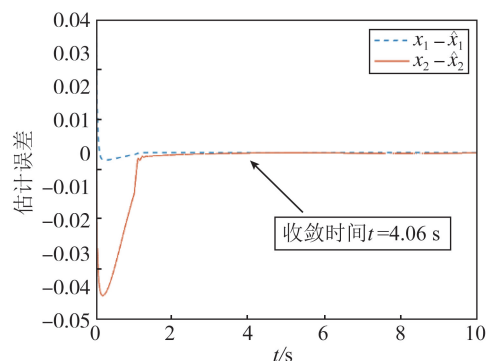


图16 120 km/h 行驶时的估计误差

Fig. 16 Estimated error at a speed of 120 km/h

参 考 文 献

- [1] YANG D S, LIU D, HAN B, et al. Trajectory planning and tracking control for vehicles with tire blowout in complex traffic flows[J]. Science China Information Science, 2025, 68(3): 132202.
- [2] 李蒙恩,张彦会. 爆胎车辆稳定性控制的模糊PID控制研究[J]. 机械设计与制造, 2024, 9: 120-124.
- [3] 黄云鹏,龚俊杰,韦源源,等. 汽车爆胎应急安全装置的结构性能分析[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2022, 25(5): 72-78.
- [4] 王菲. 爆胎电动汽车协调运动控制方法研究[D]. 长春: 吉林大学, 2015.
- [5] 庞文亚,贝绍轶,李波,等. 分布式驱动电动汽车爆胎工况下稳定性控制研究[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2024, 38(11): 72-80.
- [6] 陈然. 电动汽车轮胎监测及控制系统研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2005.
- [7] 刘洋,于树友,顾雪来,等. 基于模糊自整定PID的爆胎车辆轨迹控制[J]. 吉林大学学报(信息科学版), 2015, 33(4): 380-388.
- [8] MO T, ZHANG X, FAN K, et al. Design and simulation of the sliding mode controller for the vehicle blow-out process control[J]. International Journal of Vehicle Safety, 2013, 6(4): 333-346.
- [9] 蔡永周. 爆胎过程轮胎垂向刚度特性仿真研究[J]. 电动汽车零部件, 2015(7): 44-46.
- [10] 吴悦. 爆胎车辆行驶状态与控制虚拟实验分析[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010.
- [11] 周景宇,文桂林,庄佳琪. 爆胎电动汽车建模与仿真分析[J]. 机械科学与技术, 2012, 31(12): 2003-2009.
- [12] ZHENG H, ZONG C, LIU H. Tire blow-out modeling and active braking control algorithm of vehicle[J]. China Journal of Highway and Transport, 2012, 25(4): 147-152.
- [13] 郭孔辉,金凌鸽,卢荡. 统一轮胎模型在车辆动力学仿真中的应用[J]. 吉林大学学报(工学版), 2009, 39(S2): 241-245.
- [14] BRAGHIN F, CHELI F, SABBIONI E. Identification of tire model parameters through full vehicle experimental tests[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2011, 133(3): 031006.
- [15] LOZIA Z. Simulation tests of biaxial vehicle motion after a "tire blow-out"[J]. SAE Technical Paper Series 1, 2025-1-0410, 2005.
- [16] CHEN D, WU N, SHI N. Steering system and vertical load dynamic response of vehicles with tire burst[J]. China Journal of Highway and Transport, 2014, 27(8): 112-119.
- [17] CAI Y Z, ZANG M Y, DUAN F Y. Modeling and simulation of vehicle responses to tire blowout[J]. Tire Science Technology, 2015, 43(3): 242-258.
- [18] LI B L, ZENG L. Fractional calculus control of road vehicle lateral stability after a tire blowout[J]. Mechanics, 2021, 27(6): 475-482.
- [19] WANG F, CHEN H, CAO D P. Nonlinear coordinated motion control of road vehicles after a tire blowout[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2016, 24(3): 956-970.
- [20] 于跃飞,林国怀,郭子杰,等. 基于固定时间的多无人机系统自适应姿态控制[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2023, 36(1): 11-23.
- [21] JIN X. Adaptive fixed-time control for MIMO nonlinear systems with asymmetric output constraints using universal barrier functions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(7): 3046-3053.
- [22] CHEN M, WANG H Q, LIU X P. Adaptive fuzzy practical fixed-time tracking control of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 29(3): 664-673.
- [23] XU H, YU D X, SUI S, et al. Nonsingular practical fixed-time adaptive output feedback control of MIMO nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2023, 34(10): 7222-7234.
- [24] XU B, LIANG Y J, LI Y X, et al. Adaptive command filtered fixed-time control of nonlinear systems with input quantization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2022, 427: 127186.
- [25] SUI S, BAI Z Q, TONG S C, et al. Nonsingular fixed-time asymptotic consensus for nonlinear nonstrict-feedback MASs[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2024, 54(8): 4738-4748.

(责任编辑:赵海军)