文章编号 1672-6634(2022)02-0001-06 **DOI** 10.19728/j.issn1672-6634.2021060002

序列$(1^2+Q)(2^2+Q)\cdots(n^2+Q)$中的完全平方数

张庆杰,牛传择

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘 要 令 Q 为任意正整数,利用 Cilleruelo 的方法,通过分析相关二次同余方程解的情况,证明了存在某个与 Q 相关的正整数 N_Q,使得当 $n\geqslant N_Q$ 时,$\prod_{k=1}^{n}(k^2+Q)$不是完全平方数,并给出了 Q 给定时确定乘积完全平方性的方法。

关键词 连续项乘积;完全平方数;Mertens 第一定理

中图分类号 O156.1

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)

Squares in $(1^2+Q)(2^2+Q)\cdots(n^2+Q)$

ZHANG Qingjie,NIU Chuanze

(School of Mathematical Sciences,Liaocheng University,Liaocheng 252059,China)

Abstract Let Q be an arbitrary positive integer,by the method of Cilleruelo,and then by analyzing the solutions of related quadratic congruence,we proved that there exists a positive integer N_Q depending on Q such that $\prod_{k=1}^{n}(k^2+Q)$ is not a square if $n\geqslant N_Q$, and we also give the method to determine the squareness of this product.

Key words product of continuous terms;squares;Mertens first-theorem

0 引言

在数论研究中,许多问题是围绕整系数多项式展开的,近年来,国内外众多学者对整系数二项式序列连续项乘积是否为完全平方数进行了深刻讨论。Amdeberhan[1]猜想:“对于正整数 $n>3$,$\prod_{k=1}^{n}(k^2+1)$不是完全平方数”,并给出了 $3<n\leqslant 10^{3200}$ 时的证明,而后 Cilleruelo[2]对此猜想进行了完全验证。Hong[3]等证明了存在无穷多个正整数 n,使得$\prod_{k=2}^{n}(k^2-1)$为完全平方数。Fang[4]证明了$\prod_{k=1}^{n}(4k^2+1)$和$\prod_{k=1}^{n}(2k(k-1)+1)$不是完全平方数。当 a,c 为两个互素的正整数且 $1\leqslant a\leqslant 10$,$1\leqslant c\leqslant 20$ 时,Yang[5]等证明了仅存在有限个$\prod_{k=1}^{n}(ak^2+c)$为完全平方数。陈红[6]等证明了当且仅当 $n=3$ 时,$\prod_{k=1}^{n}(k^2+23)$为完全平方数。此外,对于高次二项式序列连续项乘积的幂性质[7-13]研究,与上述问题在本质上是相同的。

设 $Q=2^s\prod_{i=1}^{r}q_i^{e_i}$ 为标准分解,其中 $s\geqslant 0,e_i\geqslant 0$,令 $S_n=\prod_{k=1}^{n}(k^2+Q)$。本文将 Cilleruelo[2]和陈红[6]的研究对象推广至一般,考虑任意的正整数 Q,讨论 S_n 是否为完全平方数,得到的结论如下。

定理 1 存在某个与 Q 相关的正整数 N_Q,使得当 $n\geqslant N_Q$ 时,S_n 不是完全平方数。

收稿日期:2021-06-02

基金项目:国家自然科学基金项目(11401285);山东省自然科学基金项目(ZR2019BA011)资助

通讯作者:牛传择,男,汉族,博士,副教授,研究方向:代数数论,E-mail:niuchuanze@lcu.edu.cn。

显然,在得到 N_Q 的值后,对 $n < N_Q$ 的情况进行分析,即可确定 S_n 的完全平方性。

本文将使用的符号,$\lfloor n \rfloor$ 表示对 n 取下整,$\lceil n \rceil$ 表示对 n 取上整,$(\frac{a}{p})$ 表示勒让德符号,$\pi(n)$ 表示不超过 n 的素数的个数。

1 主要引理和命题

S_n 的完全平方性与其素因子的次数相关,在本节中,我们从 S_n 的素因子入手,给出相关引理和命题。

引理 1 设 $Q < 3n^2$,若有理素数 p 满足 $p^2 \mid S_n$,则 $p < 2n$。

证 由于 $p^2 \mid S_n$,存在以下两种可能:

(1) 若 $p^2 \mid k^2 + Q$,其中 $1 < k \leqslant n$,则有 $p \leqslant \sqrt{n^2+Q} < \sqrt{n^2+3n^2} < 2n$。

(2) 若 $p \mid k^2+Q$ 且 $p \mid j^2+Q$,其中 $1 < j < k \leqslant n$,则有 $p \mid (k-j)(k+j)$,由于 $0 < k-j < k+j < 2n$,所以 $p < 2n$。引理得证。

根据引理 1,若 $Q < 3n^2$,且 S_n 为完全平方数,可记 $S_n = \prod_{p<2n} p^{\alpha_p}$,其中,

$$\alpha_p = \sum_{j \leqslant \log(n^2+Q)/\log p} \#\{k \leqslant n, p^j \mid k^2+Q\}, \tag{1}$$

另外,记 $n! = \prod_{p \leqslant n} p^{\beta_p}$,其中

$$\beta_p = \sum_{j \leqslant \log n/\log p} \#\{k \leqslant n, p^j \mid k\} = \sum_{j \leqslant \log n/\log p} \lfloor n/p^j \rfloor。 \tag{2}$$

易知,$S_n > (n!)^2$,故有

$$\sum_{p \leqslant n} \beta_p \log p < \frac{1}{2} \sum_{p<2n} \alpha_p \log p。 \tag{3}$$

引理 2[14] 若 p 为奇素数且 $p \nmid Q$,则对任意正整数 j,$x^2 \equiv -Q(\bmod p^j)$ 有解的充要条件为 $(\frac{-Q}{p}) = 1$,若有解,则解的个数为 2。

引理 3[14] 若 a 为奇数且 $e \in \mathbb{Z}^*$,则 $x^2 \equiv a(\bmod 2^e)$ 有 N 个解,其中

$$N = \begin{cases} 1, e=1, \\ 2, e=2 \text{ 且 } a \equiv 1(\bmod 4), \\ 4, e \geqslant 3 \text{ 且 } a \equiv 1(\bmod 8), \\ 0, \text{其它}。 \end{cases}$$

引理 4 设 $p \leqslant n$ 为奇素数且 $p \nmid Q$,

(i) 若 $(\frac{-Q}{p}) = -1$,则 $\alpha_p = 0$;

(ii) 若 $(\frac{-Q}{p}) = 1$,则 $\frac{\alpha_p}{2} - \beta_p \leqslant \frac{\log(n^2+Q)}{\log p}$。

证 (i) 当 $(\frac{-Q}{p}) = -1$ 时,由引理 2 知 $x^2 \equiv -Q(\bmod p^j)$ 无解,根据(1)得 $\alpha_p = 0$。

(ii) 当 $(\frac{-Q}{p}) = 1$ 时,由(1)及引理 2,得

$$\alpha_p \leqslant \sum_{j \leqslant \frac{\log(n^2+Q)}{\log p}} 2\lceil \frac{n}{p^j} \rceil, \tag{4}$$

因此,
$$\begin{aligned} \frac{\alpha_p}{2} - \beta_p &\leqslant \sum_{j \leqslant \frac{\log n}{\log p}} (\lceil \frac{n}{p^j} \rceil - \lfloor \frac{n}{p^j} \rfloor) + \sum_{\frac{\log n}{\log p} < j \leqslant \frac{\log(n^2+Q)}{\log p}} \lceil \frac{n}{p^j} \rceil \\ &\leqslant \sum_{j \leqslant \frac{\log n}{\log p}} 1 + \sum_{\frac{\log n}{\log p} < j \leqslant \frac{\log(n^2+Q)}{\log p}} 1 \leqslant \frac{\log(n^2+Q)}{\log p}。 \end{aligned}$$

引理 5[15] 对于正整数 n,$\sum_{n<p<2n} \log p \leqslant n \log 4$。

引理 6[15]　对于正整数 n，$\pi(n)\leqslant 2\log 4\dfrac{n}{\log n}+\sqrt{n}$ 。

命题 1　$\alpha_2\leqslant\begin{cases}A(n,Q),Q\text{ 为奇数},\\B(n,Q),Q\text{ 为偶数},\end{cases}$ 这里 $A(n,Q)=2n-5+\dfrac{4\log(n^2+Q)}{\log 2}-\dfrac{4n}{n^2+Q}$ ，

$$B(n,Q)=n\left(\frac{5-2^{1-s}}{3}-\frac{\frac{s}{2}+1}{2^s}+\frac{1}{2^{\frac{s}{2}-1}}\right)+\frac{s^2+4s}{4}-(5+4s)2^{\frac{s}{2}}+\frac{2^{\frac{s}{2}+2}\log(n^2+Q)}{\log 2}-\frac{n2^{\frac{s}{2}+2}}{n^2+Q}\text{。}$$

证　考虑同余方程

$$x^2\equiv -Q(\bmod 2^j)\text{。}\tag{5}$$

(1) Q 为奇数。由引理 3，当 $j=1$ 时，(5)仅有一解；当 $j=2$ 及 $-Q\equiv 1(\bmod 4)$ 时，(5)恰有 2 解；当 $j\geqslant 3$ 及 $-Q\equiv 1(\bmod 8)$，(5)恰有 4 解；其它情况下，(5)无解。故由(1)可得

$$\alpha_2\leqslant\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil+\sum_{3\leqslant j\leqslant\frac{\log(n^2+Q)}{\log 2}}4\left\lceil\frac{n}{2^j}\right\rceil\leqslant\left(\frac{n}{2}+1\right)+2\left(\frac{n}{4}+1\right)+\sum_{3\leqslant j\leqslant\frac{\log(n^2+Q)}{\log 2}}4\left(\frac{n}{2^j}+1\right)\leqslant A(n,Q)\text{。}$$

(2) $Q\equiv 2(\bmod 4)$。当 $j=1$ 时(5)有 1 解，当 $j>1$ 时(5)无解，所以 $\alpha_2=\lceil n/2\rceil$。

(3) $Q\equiv 0(\bmod 4)$。记 $Q=2^sQ_1$，这里 $s\geqslant 2$ 且 $2\nmid Q_1$。当 $1\leqslant j\leqslant s$ 时，(5)等价于 $x^2\equiv 0(\bmod 2^j)$，则(5)有 $j-\lceil j/2\rceil+1$ 个解 $x\equiv 2^{\lceil j/2\rceil},2^{\lceil j/2\rceil+1},\cdots,2^{j-1},2^j(\bmod 2^j)$。

接下来考虑 $j>s$ 的情况，易知(5)有解当且仅当 s 为偶数。由 $2^s\mid x^2$ 可设 $x=2^{\frac{s}{2}}t$，由 $0\leqslant x\leqslant 2^j-1$ 得 $0\leqslant t\leqslant 2^{j-\frac{s}{2}}-1$，此时(5)等价于

$$t^2\equiv -Q_1(\bmod 2^{j-s})\text{。}\tag{6}$$

由引理 3 知，当 $j-s=1$ 时，(6)仅有 1 解，则(5)解的个数为 $\dfrac{2^{j-\frac{s}{2}}}{2^{j-s}}=2^{\frac{s}{2}}$；当 $j-s=2$ 时，(6)至多有 2 解，则(5)解的个数至多为 $\dfrac{2^{j-\frac{s}{2}}}{2^{j-s}}\cdot 2=2^{\frac{s}{2}+1}$；当 $j-s\geqslant 3$ 时，(6)至多有 4 解，从而(5)解的个数至多为 $\dfrac{2^{j-\frac{s}{2}}}{2^{j-s}}\cdot 4=2^{\frac{s}{2}+2}$。因此，对于 $s\geqslant 2$，

$$\begin{aligned}\alpha_2&\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant s}\left(j-\left\lceil\frac{j}{2}\right\rceil+1\right)\left\lceil\frac{n}{2^j}\right\rceil+2^{\frac{s}{2}}\left\lceil\frac{n}{2^{s+1}}\right\rceil+2^{\frac{s}{2}+1}\left\lceil\frac{n}{2^{s+2}}\right\rceil+\sum_{s+3\leqslant j\leqslant\frac{\log(n^2+Q)}{\log 2}}2^{\frac{s}{2}+2}\left\lceil\frac{n}{2^j}\right\rceil\\&\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant s}\left(j-\left\lceil\frac{j}{2}\right\rceil+1\right)\left(\frac{n}{2^j}+1\right)+2^{\frac{s}{2}}\left(\frac{n}{2^{s+1}}+1\right)+2^{\frac{s}{2}+1}\left(\frac{n}{2^{s+2}}+1\right)+\sum_{s+3\leqslant j\leqslant\frac{\log(n^2+Q)}{\log 2}}2^{\frac{s}{2}+2}\left(\frac{n}{2^j}+1\right)\\&\leqslant B(n,Q)\text{。}\end{aligned}$$

命题得证。

命题 2　若奇素数 q 满足 $q^e\mid Q$ 但 $q^{e+1}\nmid Q$，则 $\alpha_q\leqslant C(n,Q;q)$，这里

$$\begin{aligned}C(n,Q;q)=&n\left(\frac{q(q^2-q^{-e})}{(q+1)(q-1)^2}-1-\frac{\frac{e}{2}+1}{q^e(q-1)}+\frac{2}{q^{\frac{e}{2}}(q-1)}\right)+\frac{e^2+4e}{4}\\&+2q^{\frac{e}{2}}\left(\frac{\log(n^2+Q)}{\log q}-e\right)-\frac{2nq^{\frac{e}{2}}}{(q-1)(n^2+Q)}\text{。}\end{aligned}$$

证　记 $Q=q^eQ_q$，其中 $q\nmid Q_q$，则 α_q 取决于同余式

$$x^2\equiv -q^eQ_q(\bmod q^j)\text{。}\tag{7}$$

当 $j\leqslant e$ 时，(7)有 $j-\left\lceil\dfrac{j}{2}\right\rceil+1$ 个解，分别为 $x\equiv q^{\lceil\frac{j}{2}\rceil},q^{\lceil\frac{j}{2}\rceil+1},\cdots,q^{j-1},q^j(\bmod q^j)$。

当 $j>e$ 时，(7)有解当且仅当 e 为偶数，可设 $x=q^{\frac{e}{2}}t$，且由 $0\leqslant x\leqslant q^j-1$ 得 $0\leqslant t\leqslant q^{j-\frac{e}{2}}-1$，(7)等价于 $t^2\equiv -Q_q(\bmod q^{j-e})$，其解的个数最多为 2，所以(7)解的个数至多为 $\dfrac{q^{j-\frac{e}{2}}}{q^{j-e}}\cdot 2=2q^{\frac{e}{2}}$。

因此，

$$\begin{aligned}\alpha_q &\leqslant \sum_{j\leqslant e}(j-\lceil \frac{j}{2}\rceil+1)\lceil \frac{n}{q^j}\rceil+\sum_{e<j\leqslant\frac{\log(n^2+Q)}{\log q}}2q^{\frac{e}{2}}\lceil \frac{n}{q^j}\rceil \\ &\leqslant \sum_{j\leqslant e}(j-\lceil \frac{j}{2}\rceil+1)(\frac{n}{q^j}+1)+\sum_{e<j\leqslant\frac{\log(n^2+Q)}{\log q}}2q^{\frac{e}{2}}(\frac{n}{q^j}+1) \\ &\leqslant C(n,Q;q)\text{。}\end{aligned}$$

命题得证。

2 定理的证明

在本节中,我们利用上述引理和命题,给出定理1的证明。

证明 设 $Q<3n^2$,已知 $Q=2^s\prod_{i=1}^r q_i^{e_i}$ 为标准分解,其中 $s\geqslant0,e_i\geqslant0$,假设 S_n 为完全平方数,令 $S=\{p\mid p$ 为奇素数且$(\frac{-Q}{p})=1\}$。

由(3)可得

$$\sum_{p\leqslant n}\beta_p\log p<\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in S}}\frac{1}{2}\alpha_p\log p+\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin S}}\frac{1}{2}\alpha_p\log p+\sum_{n<p<2n}\frac{1}{2}\alpha_p\log p\ ,\tag{8}$$

结合引理4,由(8)得

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin S}}\beta_p\log p\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in S}}\log(n^2+Q)+\frac{1}{2}\alpha_2\log2+\sum_{i=1}^r\frac{1}{2}\alpha_{q_i}\log q_i+\sum_{n<p<2n}\frac{1}{2}\alpha_p\log p\ ,\tag{9}$$

由(4)知当 $p>n$ 时,$\alpha_p\leqslant2$,所以根据引理5及(9),可得

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin S}}\beta_p\log p\leqslant n\log4+\frac{1}{2}\alpha_2\log2+\sum_{i=1}^r\frac{1}{2}\alpha_{q_i}\log q_i+\log(n^2+Q)\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in S}}1\ ,\tag{10}$$

又由(2)得

$$\beta_p\geqslant\sum_{j\leqslant\frac{\log n}{\log p}}(\frac{n}{p^j}-1)=n\sum_{j\leqslant\frac{\log n}{\log p}}\frac{1}{p^j}-\frac{\log n}{\log p}\geqslant\frac{n-p}{p-1}-\frac{\log n}{\log p}\geqslant\frac{n-1}{p-1}-\frac{\log(n^2+Q)}{\log p}\ ,$$

所以

$$(n-1)\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin S}}\frac{\log p}{p-1}\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin S}}\beta_p\log p+\log(n^2+Q)\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin S}}1\ ,\tag{11}$$

因此,当 $n>1$ 时,由(10)、(11)与引理6得

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin S}}\frac{\log p}{p-1}\leqslant\frac{n\log4}{n-1}+\frac{\log(n^2+Q)}{n-1}(2\log4\frac{n}{\log n}+\sqrt{n})+\frac{\alpha_2\log2}{2(n-1)}+\sum_{i=1}^r\frac{\alpha_{q_i}\log q_i}{2(n-1)}\ ,$$

令 $*=\frac{n\log4}{n-1}+\frac{\log(n^2+Q)}{n-1}(2\log4\frac{n}{\log n}+\sqrt{n})$,则有

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin S}}\frac{\log p}{p-1}\leqslant *+\frac{\alpha_2\log2}{2(n-1)}+\sum_{i=1}^r\frac{\alpha_{q_i}\log q_i}{2(n-1)}\ ,$$

由命题1及命题2,当 Q 为奇数,即 $s=0$ 时,

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin S}}\frac{\log p}{p-1}\leqslant *+\frac{A(n,Q)\log2}{2(n-1)}+\sum_{i=1}^r\frac{C(n,Q;q_i)\log q_i}{2(n-1)}\ ;\tag{12}$$

当 Q 为偶数,即 $s>0$ 时,

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin S}}\frac{\log p}{p-1}\leqslant *+\frac{B(n,Q)\log2}{2(n-1)}+\sum_{i=1}^r\frac{C(n,Q;q_i)\log q_i}{2(n-1)}\ ,\tag{13}$$

当 $n\to\infty$时,(12)、(13)右端的极限分别为

$$11\log 2+\sum_{i=1}^{r}\frac{\log q_i}{2}\left(\frac{q_i(q_i^2-q_i^{-e_i})}{(q_i+1)(q_i-1)^2}-1-\frac{\frac{e_i}{2}+1}{q_i^{e_i}(q_i-1)}+\frac{2}{q_i^{\frac{e_i}{2}}(q_i-1)}\right), \tag{14}$$

$$\left(\frac{65-2^{1-s}}{6}-\frac{\frac{s}{2}+1}{2^{s+1}}+\frac{1}{2^{\frac{s}{2}}}\right)\log 2+\sum_{i=1}^{r}\frac{\log q_i}{2}\left(\frac{q_i(q_i^2-q_i^{-e_i})}{(q_i+1)(q_i-1)^2}-1-\frac{\frac{e_i}{2}+1}{q_i^{e_i}(q_i-1)}+\frac{2}{q_i^{\frac{e_i}{2}}(q_i-1)}\right), \tag{15}$$

而由 Mertens 第一定理知左端 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\notin S}}\frac{\log p}{p-1}=+\infty$，矛盾，故存在一个与 Q 相关的正整数 N_Q，使得当 $n\geqslant N_Q$ 时，S_n 不是完全平方数。

3　S_n 的完全平方性

在本节中，我们以 $Q=2,5$ 为例，给出确定 S_n 完全平方性的方法。

例 1　$S_n=\prod_{k=1}^{n}(k^2+2)$，这里 $Q=2,s=1,r=1,q_1=1,e_1=0$。

首先，基于定理 1 的证明确定 N_2。由 $Q=2$，易得 $S=\{p\mid p$ 为奇素数且 $p\equiv 1,3(\mathrm{mod}8)\}$，将相关值代入(15)，可得当 $n\to\infty$时，(13)右端极限为 $\left(\frac{247}{24}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\log 2<7.6238$，而当 $n\geqslant 2818163$ 时，(13)左端 $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\not\equiv 1,3(\mathrm{mod}8)}}\frac{\log p}{p-1}>7.6238$，矛盾，故当 $n\geqslant N_2=2818163$ 时，S_n 不是完全平方数。

接下来，讨论 $n<2818163$ 的情况。显然，$S_1=3$，$S_2=2\times 3^2$，$S_8=2^4\times 3^9\times 11^2\times 17\times 19$ 均不是完全平方数。

(1) $a_3=3^2+2=11$，若 $\mathrm{ord}_{11}(S_n)\geqslant 2$，则 $n\geqslant 11-3=8$，易知 S_n 中第二次出现素因子 11 的项为 a_8，故当 $3\leqslant n\leqslant 7$ 时，S_n 不是完全平方数。

(2) $a_9=9^2+2=83$，若 $\mathrm{ord}_{83}(S_n)\geqslant 2$，则 $n\geqslant 83-9=74$，易知 a_{74} 第二次出现素因子 83，故当 $9\leqslant n\leqslant 73$ 时，S_n 不是完全平方数。

(3) $a_{57}=57^2+2=3251$，若 $\mathrm{ord}_{3251}(S_n)\geqslant 2$，则 $n\geqslant 3251-57=3194$，易知 a_{3194} 第二次出现素因子 3251，故当 $57\leqslant n\leqslant 3193$ 时，S_n 不是完全平方数。

(4) $a_{1683}=1683^2+2=2832491$，若 $\mathrm{ord}_{2832491}(S_n)\geqslant 2$，则 $n\geqslant 2832491-1683=2830808$，易知 $a_{2830808}$ 第二次出现素因子 2832491，故当 $1683\leqslant n\leqslant 2830807$ 时，S_n 不是完全平方数。

综上，S_n 均不是完全平方数。

例 2　$S_n=\prod_{k=1}^{n}(k^2+5)$，这里 $Q=5,s=0,r=1,q_1=5,e_1=1$。

首先，基于定理 1 的证明确定 N_5。由 $Q=5$，易得 $S=\{p\mid p$ 为奇素数，$p\equiv 1,3,7,9(\mathrm{mod}20)\}$，将相关值代入(14)，可得当 $n\to\infty$时，(12)右端极限为 $11\log 2+\left(\frac{13}{120}+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)\log 5<7.979$，而当 $n\geqslant 13553819$ 时，(12)左端 $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\not\equiv 1,3,7,9(\mathrm{mod}20)}}\frac{\log p}{p-1}>7.979$，矛盾，故当 $n\geqslant N_5=13553819$ 时，S_n 不是完全平方数。

接下来，讨论 $n<13553819$ 的情况。显然，$S_4=2^2\times 3^4\times 7^2$ 为完全平方数，而 $S_1=2\times 3$，$S_2=2\times 3^3$，$S_3=2^2\times 3^3\times 7$，$S_5=2^3\times 3^5\times 5\times 7^2$ 不是完全平方数。

(1) $a_6=6^2+5=41$，若 $\mathrm{ord}_{41}(S_n)\geqslant 2$，则 $n\geqslant 41-6=35$，易知 a_{35} 第二次出现素因子 41，故当 $6\leqslant n\leqslant 34$ 时，S_n 不是完全平方数。

(2) $a_{12}=12^2+5=149$，若 $\mathrm{ord}_{149}(S_n)\geqslant 2$，则 $n\geqslant 149-12=137$，易知 a_{137} 第二次出现素因子 149，故当 $12\leqslant n\leqslant 136$ 时，S_n 不是完全平方数。

(3) $a_{126}=126^2+5=15881$，若 $\mathrm{ord}_{15881}(S_n)\geqslant 2$，则 $n\geqslant 15881-126=15755$，易知 a_{15755} 第二次出现素因子 15881，故当 $126\leqslant n\leqslant 15754$ 时，S_n 不是完全平方数。

(4) $a_{3744}=3744^2+5=14017541$，若 $\mathrm{ord}_{14017541}(S_n)\geqslant 2$，则 $n\geqslant 14017541-3744=14013797$，易知

$a_{14013797}$ 第二次出现素因子 14017541,故当 $3744 \leqslant n \leqslant 14013796$ 时,S_n 不是完全平方数。

综上,S_n 为完全平方数当且仅当 $n=4$。

类似地,对于任意给定的正整数 Q,均可确定 S_n 的完全平方性。利用以上方法,确定 $1 \leqslant Q \leqslant 100$ 时 S_n 的完全平方性如下:若 $Q \in \{1,11,23\}$,则 S_n 为完全平方数当且仅当 $n=3$;若 $Q \in \{3,8,15,24,35,48,63,80,99\}$,则 S_n 为完全平方数当且仅当 $n=1$;若 $Q=5$,则 S_n 为完全平方数当且仅当 $n=4$;若 $Q \in \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 100 \text{ 且 } x \in \mathbb{Z}\} \setminus \{1,3,5,8,11,15,23,24,35,48,63,80,99\}$,则 S_n 均不是完全平方数。

我们猜想:当 $Q \geqslant 24$ 时,S_n 是完全平方数的充要条件为 $Q+1$ 为平方数且 $n=1$。

4 结论

本文就 S_n 是否为完全平方数进行了研究,将 Cilleruelo[2] 讨论的 $Q=1$ 和陈红[6] 讨论的 $Q=23$ 推广至一般的正整数 Q。首先利用反证法证明了定理 1 这个一般性结论,接下来以 $Q=2,5$ 为例给出了确定 S_n 完全平方性的方法,利用此方法,对于任意给定的正整数 Q,S_n 的完全平方性均可确定。

参考文献

[1] AMDEBERHAN T, MEDINA L A, MOLL V H. Arithmetical properties of a sequence arising from an arctangent sum [J]. J Number Theory, 2008, 128: 1807-1846.

[2] CILLERUELO J. Squares in $(1^2+1)(2^2+1)\cdots(n^2+1)$ [J]. J Number Theory, 2008, 128: 2488-2491.

[3] HONG S, LIU X. Squares in $(2^2-1)\cdots(n^2-1)$ and p-adic valuation [J]. Asian-Europe J Math, 2010(3): 329-333.

[4] FANG J. Neither $\prod_{k=1}^{n}(4k^2+1)$ nor $\prod_{k=1}^{n}(2k(k-1)+1)$ is a perfect square[J]. Integers, 2009(9): 177-180.

[5] YANG S, TONGÉ A, HE B. Diophantine equations with products of consecutive values of a quadratic polynomial [J]. J Number Theory, 2011, 131: 1840-1851.

[6] 陈红,王春林,胡双年. 序列 $(1^2+23)(2^2+23)\cdots(n^2+23)$[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2015, 52(2): 21-24.

[7] CHEN Y, GONG M. On the products $(1^l+1)(2^l+1)\cdots(n^l+1)$ II[J]. J Number Theory, 2014, 144: 176-187.

[8] CHEN Y, GONG M, REN X. On the products $(1^l+1)(2^l+1)\cdots(n^l+1)$[J]. J Number Theory, 2013, 133: 2470-2474.

[9] ZHANG W, WANG T. Powerful numbers in $(1^k+1)(2^k+1)\cdots(n^k+1)$[J]. J Number Theory, 2012, 132: 2630-2635.

[10] NIU C, LIU W. On the products $(1^3+q^3)(2^3+q^3)\cdots(n^3+q^3)$[J]. J Number Theory, 2017, 180: 403-409.

[11] YANG Q, ZHAO Q. Powerful numbers in $(1^l+q^l)(2^l+q^l)\cdots(n^l+q^l)$[J]. C R Acad Ser I, 2018, 356: 13-16.

[12] GÜREL E, KISISEL A. A note on the products $(1^\mu+1)(2^\mu+1)\cdots(n^\mu+1)$[J]. J Number Theory, 2010, 130: 187-191.

[13] GÜREL E. A note on the products $((m+1)^2+1)\cdots(n^2+1)$ and $((m+1)^3+1)\cdots(n^3+1)$[J]. Math Commun, 2016, 21: 109-114.

[14] IRELAND K, ROSEN M. A classical introduction to modern number theory (Second edition) [M]. Springer-Verlag, 2003.

[15] HARDY G, WRIGHT E. An introduction to the theory of numbers [M]. Oxford: Oxford University Press, 1980.