文章编号　1672-6634(2022)01-0022-08　　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2021030004

四元数矩阵方程 $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{C}$ 最小二乘问题的半张量积解法

王　栋,李　莹,丁文旭

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘　要　研究四元数矩阵方程 $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{C}$ 的最小二乘问题。区别于已有的四元数矩阵的实表示和复表示的矩阵形式,我们提出一种四元数矩阵的实向量表示,利用四元数矩阵的实向量表示和矩阵半张量积,将四元数矩阵方程 $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{C}$ 求解问题转化为相应的实矩阵方程问题,使计算过程更加简洁有效。

关键词　四元数矩阵方程;最小二乘问题;矩阵半张量积;实向量表示;Hermitian 矩阵

中图分类号　O151.21

文献标识码　A　　**开放科学(资源服务)标识码(OSID)**

The Semi Tensor Product Method to Solve the Least Squares Problem of the Quaternion Matrix Equation $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{C}$

WANG Dong,LI Ying,DING Wenxv

(School of Mathematical Sciences,Liaocheng,University,Liaocheng 252059,China)

Abstract　In this paper, the least squares problem of the quaternion matrix equation $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{C}$ is considered. We propose a real vector representation for quaternion matrix, combined the real vector representation and the semi tensor product of matrices, we transform the quaternion matrix equation $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{C}$ into the corresponding problem of real matrix equation, which makes the calculation process more flexible and effective.

Key words　quaternion matrix equation; least squares problem; the semi tensor product of matrices; real vector representation; Hermitian matrix

---

收稿日期:2021-03-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11801249);山东省自然科学基金项目(ZR2020MA053)资助

通讯作者:李莹,女,汉族,博士,教授,研究方向:线性系统理论,E-mail:liyingld@163.com。

0　引言

文中使用的符号：$\boldsymbol{N}^*$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{Q}$ 分别表示正整数集、实数域和四元数体；$\mathbf{R}^t/\mathbf{R}_t$，$\mathbf{Q}^t/\mathbf{Q}_t$ 分别表示 t 维实列/行向量集合和四元数列/行向量集合；$\mathbf{R}^{m\times n}$，$\mathbf{Q}^{m\times n}$ 分别表示所有 $m\times n$ 阶实矩阵集合和四元数矩阵集合；$\boldsymbol{HQ}^{n\times n}$ 表示所有四元数 Hermitian 矩阵集合；$\boldsymbol{I}_n$ 表示 n 阶单位阵；$\boldsymbol{\delta}_n^i$ 表示单位阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的第 i 列；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵、共轭转置矩阵和广义逆矩阵；$\otimes$ 表示矩阵的张量积(Kronecker product)；$*$ 表示矩阵的半张量积；$\|\cdot\|$ 表示矩阵的 Frobenius 范数或者向量的 Euclid 范数。

矩阵方程在计算机科学、量子物理、统计、信号与彩色图像处理、刚性力学、量子力学、控制理论、场论等领域有着广泛的应用[1-6]。因此，许多学者对不同代数结构上的矩阵方程都进行了研究，并使用不同的方法得到许多结果[7-15]。例如，Chu 通过 GSVD 分解研究了实矩阵方程 $AXB+CYD=E$，并给出了其最小二乘解[7]；徐使用 CCD 分解得到了复矩阵方程 $\boldsymbol{AXA}^{\boldsymbol{H}}+\boldsymbol{CYC}^{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{F}$ 的最小二乘解和对称(反对称)解[8]；廖结合 GSVD 和 CCD 研究了复矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{CYD}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{E}$ 的极小范数最小二乘问题[9]；王利用四元数矩阵的复表示研究了四元数矩阵方程 $AXB=C$ 的最小二乘双对称解、斜对称解、中心对称解[11]；袁研究了四元数矩阵方程$(\boldsymbol{AXB},\boldsymbol{CYD})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$的 η-bi-Hermitian 解[13]；宋给出了多类广义 Sylvester 四元数矩阵方程解存在的充要条件和解的表达式[14]等等。

近些年来，程及其团队提出了矩阵半张量积(STP)理论[16]以解决非线性系统的线性化问题。STP 打破了经典矩阵乘法在维数上的限制，并且有许多有趣的性质，比如换位矩阵、伪交换性等。大量学者将 STP 作为工具，已在博弈论[17]、图论[18]、逻辑系统[19]等多个领域取得了许多重要成果。

1　问题描述

我们将利用矩阵半张量积研究下列四元数矩阵方程的最小二乘问题

$$\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{C},\tag{1}$$

因为 Hermitian 矩阵在工程问题和线性系统理论中起着重要作用，我们将研究 (1) 的最小二乘 Hermitian 解。具体问题如下

问题 1　设 $\boldsymbol{A}_i\in\mathbf{Q}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_i\in\mathbf{Q}^{n\times q}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbf{Q}^{m\times q}$，求

$$S_{HQ}=\left\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\\\vdots\\\boldsymbol{X}_k\end{pmatrix},(\boldsymbol{X}_i\in\boldsymbol{HQ}^{n\times n},i=1,2,\cdots,k),\left\|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}_i-\boldsymbol{C}\right\|=\min\right\},$$

并求 $\boldsymbol{X}_{HQ}\in\boldsymbol{S}_{HQ}$ 满足 $\|\boldsymbol{X}_{HQ}\|=\min\limits_{\boldsymbol{X}\in S_{HQ}}\|\boldsymbol{X}\|$。

本文的结构如：第 2 节列举四元数矩阵和 STP 的基础知识。第 3 节提出一种四元数矩阵的实向量表示，并给出部分性质及证明。第 4 节用这种实向量表示、矩阵半张量积和 MP 逆来研究问题 1。第 5 节提供算法和算例以验证第 4 节对于问题 1 求解结果的准确性。最后，第 6 节进行简单总结。

2　预备知识

定义 1[20]　一个四元数 $q\in\mathbf{Q}$ 可以表示为 $q=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$，其中 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，三个虚部 i，j，k 满足 $\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1$，$\mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k}$，$\mathrm{jk}=-\mathrm{kj}=\mathrm{i}$，$\mathrm{ki}=-\mathrm{ik}=\mathrm{j}$。

定义 2[21]　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{p\times q}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的半张量积定义为 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_{t/n})(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{t/p})$，其中 $t=lcm(n,p)$ 是 n 和 p 的最小公倍数。

如果 $n=p$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的半张量积就变成了矩阵经典乘法。因此，矩阵半张量积可以看作矩阵经典乘法的推广。

定理 1[21]　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 是实矩阵，a，$b\in\mathbf{R}$，则下列性质成立

(1)(分配律)$\boldsymbol{A}*(a\boldsymbol{B}\pm b\boldsymbol{C})=a\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}\pm b\boldsymbol{A}*\boldsymbol{C}$，$(a\boldsymbol{A}\pm b\boldsymbol{B})*\boldsymbol{C}=a\boldsymbol{A}*\boldsymbol{C}\pm b\boldsymbol{B}*\boldsymbol{C}$；

(2)(结合律)$(\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B})*\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}*(\boldsymbol{B}*\boldsymbol{C})$；

(3)设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$,则有 $\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}$。

矩阵和向量的半张量积具有如下的伪交换性。

定理 2[21] 设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^t$,$\boldsymbol{\omega}\in\mathbf{R}_t$,$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，则有 $\boldsymbol{x}*\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{I}_t\otimes\boldsymbol{A})*\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}*(\boldsymbol{I}_t\otimes\boldsymbol{A})$。

定义 3[22] 换位矩阵 $\boldsymbol{W}_{[m,n]}\in\mathbf{R}^{mn\times mn}$ 为 $\boldsymbol{W}_{[m,n]}=\boldsymbol{\delta}_{mn}[1,\cdots,(n-1)m+1,\cdots,m,\cdots,nm]$,其中 $\boldsymbol{\delta}_k[i_1,\cdots,i_s]$ 是 $[\boldsymbol{\delta}_k^{i_1},\cdots,\delta_k^{i_s}]$ 的缩写。当 $m=n$ 时,我们记 $\boldsymbol{W}_{[n]}:=\boldsymbol{W}_{[n,n]}$。

换位矩阵的作用就是交换向量的半张量积中两个向量的顺序。

定理 3[23] 设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，则下式成立 $\boldsymbol{W}_{[m,n]}(\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}*\boldsymbol{x}$。

定义 4[23] 设 $W_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为一组向量空间，映射 $F:\Pi_{i=1}^n W_i\rightarrow W_0$ 为多线性映射。若 $dim(W_i)=k_i$ 并且 $(\boldsymbol{\delta}_{k_i}^1,\boldsymbol{\delta}_{k_i}^2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_{k_i}^{k_i})$ 为 W_i 的基，记 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\delta}_{k_1}^{j_1},\boldsymbol{\delta}_{k_2}^{j_2},\cdots,\boldsymbol{\delta}_{k_n}^{j_n})=\sum_{s=1}^{k_0}c_s^{j_1,j_2,\cdots,j_n}\boldsymbol{\delta}_{k_0}^s$，$j_t=1,\cdots,k_t$，$t=1,\cdots,n$，那么 $\{c_s^{j_1,j_2,\cdots,j_n}\mid j_t=1,\cdots,k_t,t=1,\cdots,n;s=1,\cdots,k_0\}$ 称为 F 的结构常数，$\boldsymbol{M}_F=\begin{pmatrix}c_1^{11\cdots1}&\cdots&c_1^{11\cdots k_n}&\cdots&c_1^{k_1k_2\cdots k_n}\\c_2^{11\cdots1}&\cdots&c_2^{11\cdots k_n}&\cdots&c_2^{k_1k_2\cdots k_n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\c_{k_0}^{11\cdots1}&\cdots&c_{k_0}^{11\cdots k_n}&\cdots&c_{k_0}^{k_1k_2\cdots k_n}\end{pmatrix}$ 称为 F 的结构矩阵。

3 四元数矩阵的实向量表示及其相关性质

我们将提出四元数矩阵的实向量表示并给出其部分性质及证明。首先介绍四元数的实向量表示。

定义 5 设 $\boldsymbol{x}=x^1+x^2\boldsymbol{i}+x^3\boldsymbol{j}+x^4\boldsymbol{k}\in\mathbf{Q}$,其中 $x^1,x^2,x^3,x^4\in\mathbf{R}$,定义

$$\vec{\boldsymbol{x}}=(x^1,x^2,x^3,x^4)^{\mathrm{T}}\text{ 为四元数 }\boldsymbol{x}\text{ 的实向量表示。}$$

基于四元数的实向量表示,将四元数向量的每一个元素都实向量表示,即可得到四元数向量的实向量表示,如下。

定义 6 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{Q}^n$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{Q}_n$，定义 $\vec{\boldsymbol{x}}$，$\vec{\boldsymbol{y}}$ 如 $\vec{x}=\begin{pmatrix}\vec{x}_1\\\vdots\\\vec{x}_n\end{pmatrix}$ 称为四元数列向量 $\boldsymbol{x}$ 的实向量表示，$\vec{\boldsymbol{y}}=\begin{pmatrix}\vec{y}_1\\\vdots\\\vec{y}_n\end{pmatrix}$ 称为四元数行向量 $\boldsymbol{y}$ 的实向量表示。

四元数矩阵的每一行(每一列)都是四元数向量,将矩阵按行(列)分块,即可通过四元数向量的实向量表示得到四元数矩阵的实向量表示,如下。

定义 7 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\in\mathbf{Q}^{m\times n}$，$\boldsymbol{a}_i\in\mathbf{Q}^m$，$i=1,2,\cdots,n$，定义 $\overrightarrow{\boldsymbol{A}^c}=((\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1})^{\mathrm{T}},(\overrightarrow{\boldsymbol{a}_2})^{\mathrm{T}},\cdots,(\overrightarrow{\boldsymbol{a}_n})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 为四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实列排形式;另设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1{}'\\\boldsymbol{a}_2{}'\\\vdots\\\boldsymbol{a}_m{}'\end{pmatrix}\in\mathbf{Q}^{m\times n}$，$\boldsymbol{a}_j{}'\in\mathbf{Q}_n$，$j=1,2,\cdots,m$，定义 $\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}=((\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1{}'})^{\mathrm{T}},(\overrightarrow{\boldsymbol{a}_2{}'})^{\mathrm{T}},\cdots,(\overrightarrow{\boldsymbol{a}_m{}'})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$

为四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实行排形式。

下面给出四元数向量和矩阵实向量表示的性质。

定理 4 设 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}\in\mathbf{Q}$,则 $\overrightarrow{\boldsymbol{xy}}=\boldsymbol{M}_Q*\vec{\boldsymbol{x}}*\vec{\boldsymbol{y}}$,其中

$$\boldsymbol{M}_Q=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0&0&-1&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}。$$

定理 5　设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{Q}_n$，$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbf{Q}_n$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{Q}^n$，$\alpha\in\mathbf{R}$，则有(1) $\overrightarrow{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}}=\overrightarrow{\boldsymbol{x}}+\overrightarrow{\boldsymbol{z}}$；(2) $\overrightarrow{\alpha\boldsymbol{x}}=\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$；(3) $\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{F}*\overrightarrow{\boldsymbol{x}}*\overrightarrow{\boldsymbol{y}}$，$F=M_Q*\sum_{i=1}^{n}\{(\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4n}\otimes(\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathrm{T}}]\}$。

证明　通过简单的计算，我们可得(1)，(2)，下证(3)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}=\overrightarrow{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}=\overrightarrow{x_1y_1}+\overrightarrow{x_2y_2}+\cdots+\overrightarrow{x_ny_n}=\boldsymbol{M}_Q*\left[\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{x_i}*\overrightarrow{y_i}\right]$$

$$=\boldsymbol{M}_Q*\sum_{i=1}^{n}\{[(\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathrm{T}}*\overrightarrow{\boldsymbol{x}}]*[(\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathrm{T}}*\overrightarrow{\boldsymbol{y}}]\}=\boldsymbol{M}_Q*\sum_{i=1}^{n}\{(\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4n}\otimes(\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathrm{T}}]\}*\overrightarrow{\boldsymbol{x}}*\overrightarrow{\boldsymbol{y}}。$$

根据定理 5，我们可以得到下述四元数矩阵实表示的相关性质。

定理 6　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{Q}^{m\times n}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbf{Q}^{n\times p}$，$\alpha\in\mathbf{R}$，则(1) $\overrightarrow{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^r}=\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}+\overrightarrow{\boldsymbol{B}^r}$，$\overrightarrow{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^c}=\overrightarrow{\boldsymbol{A}^c}+\overrightarrow{\boldsymbol{B}^c}$；(2) $\overrightarrow{\alpha\boldsymbol{A}^c}=\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{A}^c}$，$\overrightarrow{\alpha\boldsymbol{A}^r}=\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}$；(3) $\boldsymbol{A}=\overrightarrow{\boldsymbol{A}^c}=\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}$；(4) $\overrightarrow{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^c}=\boldsymbol{G}\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}$，$\overrightarrow{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^r}=\boldsymbol{G}'\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}$，其中

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^q)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^q)^{\mathrm{T}}]\end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^q)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^q)^{\mathrm{T}}]\end{pmatrix}。$$

证明　(1)，(2)，(3)显然成立，下证(4)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\vdots\\\boldsymbol{a}_m\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_p)$，则

$$\overrightarrow{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^c}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1c_1}\\\vdots\\\overrightarrow{\boldsymbol{a}_mc_1}\\\vdots\\\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1c_q}\\\vdots\\\overrightarrow{\boldsymbol{a}_mc_q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}*\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1}*\overrightarrow{c_1}\\\vdots\\\boldsymbol{F}*\overrightarrow{\boldsymbol{a}_m}*\overrightarrow{c_1}\\\vdots\\\boldsymbol{F}*\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1}*\overrightarrow{c_q}\\\vdots\\\boldsymbol{F}*\overrightarrow{\boldsymbol{a}_m}*\overrightarrow{c_q}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}*[(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}*\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}]*[(\boldsymbol{\delta}_q^1)^{\mathrm{T}}*\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*[(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}*\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}]*[(\boldsymbol{\delta}_q^1)^{\mathrm{T}}*\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*[(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}*\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}]*[(\boldsymbol{\delta}_q^q)^{\mathrm{T}}*\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*[(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}*\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}]*[(\boldsymbol{\delta}_q^q)^{\mathrm{T}}*\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^q)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}*(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}*[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_q^q)^{\mathrm{T}}]\end{pmatrix}*\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}*\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}。$$

同理,可得 $\overrightarrow{(\boldsymbol{AC})^r}=\boldsymbol{G}'\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}$ 。

根据定理 6 和矩阵半张量积的相关性质,我们可以推出三个矩阵乘积的实向量表示,这是解决问题 1 的关键。

定理 7 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{Q}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{Q}^{n\times n}$,$\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{Q}^{n\times q}$,则

$$\overrightarrow{(\boldsymbol{ABC})^c}=\boldsymbol{H}_1 \ast \overrightarrow{\boldsymbol{B}^c}, \tag{2}$$

$$\overrightarrow{(\boldsymbol{ABC})^r}=\boldsymbol{H}_2 \ast \overrightarrow{\boldsymbol{B}^c}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{G}\ast\boldsymbol{G}_1{}'\ast\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}\ast\boldsymbol{W}_{[4nq,4n^2]}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}$,$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{G}'\ast\boldsymbol{G}_1{}'\ast\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}\ast\boldsymbol{W}_{[4nq,4n^2]}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}$,$\boldsymbol{G}$,$\boldsymbol{G}_1{}'$ 根据定理 6 (4)式选择合适维数。

证明 $\overrightarrow{(\boldsymbol{ABC})^c}=\boldsymbol{G}\ast\overrightarrow{(\boldsymbol{AB})^r}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}=\boldsymbol{G}\ast\boldsymbol{G}_1{}'\ast\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{B}^c}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}=\boldsymbol{G}\ast\boldsymbol{G}_1{}'\ast\overrightarrow{\boldsymbol{A}^r}\ast\boldsymbol{W}_{[4nq,4n^2]}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{B}^c}$。

同理,(3)式易得。

4 问题 1 的矩阵半张量积解法

本节我们将利用矩阵半张量积解法来求解问题 1。利用 Hermitian 矩阵的特殊结构,我们将提取其独立元素进行计算,以简化运算规模。

定理 8 设 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{HQ}^{n\times n}$,令 $\boldsymbol{LX}_i=\begin{pmatrix} x_{ii}{}^1 \\ \overrightarrow{x_{i(i+1)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{x_{in}} \end{pmatrix}$,$i=1,\cdots,n$,$\overrightarrow{\boldsymbol{X}^s}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{LX}_1 \\ \boldsymbol{LX}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{LX}_n \end{pmatrix}$,则有 $\overrightarrow{\boldsymbol{X}^c}=\boldsymbol{J}\,\overrightarrow{\boldsymbol{X}^s}$,

其中 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_m \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_n \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{J}_m=\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{1m} \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_{rm} \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_{nm} \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{J}_{rm}=\begin{cases} (\boldsymbol{\delta}_s^{t-3},\ -\boldsymbol{\delta}_s^{t-2},\ -\boldsymbol{\delta}_s^{t-1},\ -\boldsymbol{\delta}_s^{t})^{\mathrm{T}},\ r<m-1, \\ (\boldsymbol{\delta}_s^{t'},\ \boldsymbol{\delta}_s^0,\ \boldsymbol{\delta}_s^0,\ \boldsymbol{\delta}_s^0)^{\mathrm{T}},\ r=m, \\ (\boldsymbol{\delta}_s^{t'+1},\ \boldsymbol{\delta}_s^{t'+2},\ \boldsymbol{\delta}_s^{t'+3},\ \boldsymbol{\delta}_s^{t'+4})^{\mathrm{T}},\ m<r<n, \end{cases}$

$\boldsymbol{\delta}_s^0$ 表示 s 维 0 列向量,$t=(4n-2r+1)(r-1)+4(m-r)+1$,$t'=(4n-2m+1)(m-1)+4(r-m-1)+1$,$s=2n^2-n$,$r\in N^*$。

证明 设 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$ 。显然,对任意 $1\leqslant m\leqslant n$,都有 $\boldsymbol{J}_m\overrightarrow{\boldsymbol{X}^s}=\overrightarrow{\boldsymbol{X}_m}$,则

$$\overrightarrow{\boldsymbol{X}^c}=\begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{X}_1} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{X}_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{X}_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1\overrightarrow{\boldsymbol{X}^s} \\ \boldsymbol{J}_2\overrightarrow{\boldsymbol{X}^s} \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_n\overrightarrow{\boldsymbol{X}^s} \end{pmatrix}=\boldsymbol{J}\,\overrightarrow{\boldsymbol{X}^s}。$$

定理 9 设 $\boldsymbol{A}_i\in\boldsymbol{Q}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}_i\in\boldsymbol{Q}^{n\times q}$,$\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{Q}^{m\times q}$,记 $\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{X}_1{}^s} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{X}_k{}^s} \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{G}\ast\boldsymbol{G}_1{}'\ast\left(\overrightarrow{\boldsymbol{A}_1{}^r}\ast\boldsymbol{W}_{[4nq,4n^2]}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{B}_1{}^c},\quad\cdots,\quad\overrightarrow{\boldsymbol{A}_k{}^r}\ast\boldsymbol{W}_{[4nq,4n^2]}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{B}_k{}^c}\right)\ast(\boldsymbol{I}_k\otimes\boldsymbol{J}), \tag{4}$$

则问题 1 的解集可表示为

$$S_{\boldsymbol{HQ}}=\left\{\boldsymbol{X}\ \middle|\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_k \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{L}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}+(\boldsymbol{I}_{2kn^2-kn}-\boldsymbol{L}^{\dagger}\boldsymbol{L})\,y,\ \forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{2kn^2-kn}\right\}。 \tag{5}$$

问题 1 的极小范数最小二乘 Hermitian 解 $\boldsymbol{X}_{HQ}$ 满足

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{HQ}=\boldsymbol{L}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}。\tag{6}$$

证明　由定理 7、定理 8 可得

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}_i-\boldsymbol{C}\right\|&=\left\|\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}_i)^{c}}-\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}\right\|\\&=\left\|\boldsymbol{G}\ast\boldsymbol{G}_1{}'\ast\left(\overrightarrow{\boldsymbol{A}_1{}^{r}}\ast\boldsymbol{W}_{[4nq,4n^2]}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{B}_1{}^{c}}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{X}_1{}^{c}},\quad\cdots,\quad\overrightarrow{\boldsymbol{A}_k{}^{r}}\ast\boldsymbol{W}_{[4nq,4n^2]}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{B}_k{}^{c}}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{X}_k{}^{c}}\right)-\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}\right\|\\&=\left\|\boldsymbol{G}\ast\boldsymbol{G}_1{}'\ast\left(\overrightarrow{\boldsymbol{A}_1{}^{r}}\ast\boldsymbol{W}_{[4nq,4n^2]}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{B}_1{}^{c}}\ast\boldsymbol{J},\quad\cdots,\quad\overrightarrow{\boldsymbol{A}_k{}^{r}}\ast\boldsymbol{W}_{[4nq,4n^2]}\ast\overrightarrow{\boldsymbol{B}_k{}^{c}}\ast\boldsymbol{J}\right)\ast\tilde{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}\right\|\\&=\left\|\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}\right\|,\end{aligned}$$

则 $\left\|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}_i-\boldsymbol{C}\right\|=\min$,当且仅当 $\left\|\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}\right\|=\min$。

对于实矩阵方程 $\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{x}}=\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}$,根据经典矩阵理论易知,其最小二乘 Hermitian 解 X 满足

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{L}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}+(\boldsymbol{I}_{2kn^2-kn}-\boldsymbol{L}^{\dagger}\boldsymbol{L})y,\ \forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{2kn^2-kn},$$

(5)得证。

由于

$$\min_{\boldsymbol{X}_{HQ}\in\boldsymbol{HQ}^{n\times n}}\|\boldsymbol{X}_{HQ}\|\Leftrightarrow\min_{\tilde{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^{2kn^2-2n}}\|\tilde{\boldsymbol{x}}_{HQ}\|,$$

由上可知,问题 1 的极小范数最小二乘 Hermitian 解 $\boldsymbol{X}_{HQ}$ 满足 $\tilde{\boldsymbol{x}}_{HQ}=\boldsymbol{L}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}$,则(6)式成立。

推论 1　设 $\boldsymbol{A}_i\in\boldsymbol{Q}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}_i\in\boldsymbol{Q}^{n\times q}$,$\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{Q}^{m\times q}$,(1)有 Hermitian 解的充要条件是

$$(\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\dagger}-\boldsymbol{I}_{4mq})\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}=0,\tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为(4)式。若(7)成立,则(1)的解可以表示为

$$S_{HQ}=\left\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\\\vdots\\\boldsymbol{X}_k\end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{L}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}+(\boldsymbol{I}_{2kn^2-kn}-\boldsymbol{L}^{\dagger}\boldsymbol{L})y,\ \forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{2kn^2-kn}\right\}。$$

证明　(1)有 Hermitian 解,当且仅当 $\left\|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}_i-\boldsymbol{C}\right\|=0$,由定理 9 及 MP 逆可得

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}_i-\boldsymbol{C}\right\|=\left\|\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\dagger}\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}\right\|=\left\|\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}-\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}\right\|=\left\|(\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\dagger}-\boldsymbol{I}_{4mq})\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}\right\|,$$

因此,对于任意 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{S}_{HQ}$,都有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{B}_i-\boldsymbol{C}\right\|=0\Leftrightarrow\left\|(\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\dagger}-\boldsymbol{I}_{4mq})\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}\right\|=0\Leftrightarrow(\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\dagger}-\boldsymbol{I}_{4mq})\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}=0$$

成立。

因此,若(1)有 Hermitian 解 $\boldsymbol{X}$,则 $\boldsymbol{X}$ 满足

$$\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{x}}=\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}},$$

由经典矩阵理论可知

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{L}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{C}^{c}}+(\boldsymbol{I}_{2kn^2-kn}-\boldsymbol{L}^{\dagger}\boldsymbol{L})y,\ \forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{2kn^2-kn}。$$

5　数值算例

算法 1

Begin

Step1　输入 $\boldsymbol{A}_i\in\boldsymbol{Q}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}_i\in\boldsymbol{Q}^{n\times q}$,$\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{Q}^{m\times q}$,$\boldsymbol{G}$,$\boldsymbol{G}_1{}'$,$\boldsymbol{J}$,$\boldsymbol{W}_{[4nq,4n^2]}$;

Step2 计算 $\boldsymbol{L}=\mathrm{spn}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{G}_1{}',\mathrm{spn}(\overrightarrow{\boldsymbol{A}_1{}^r},\boldsymbol{W}_{[4nq,4n2]},\overrightarrow{\boldsymbol{B}_1{}^c})\cdots,\mathrm{spn}(\overrightarrow{\boldsymbol{A}_k{}^r},\boldsymbol{W}_{[4nq,4n2]},\overrightarrow{\boldsymbol{B}_k{}^c}),\mathrm{kron}(\boldsymbol{I}_k,J))$；

Step3 输出 $\tilde{\boldsymbol{x}}_{HQ}=\mathrm{pinv}(\boldsymbol{L})\overrightarrow{\boldsymbol{C}^c}$ 。

End

算例 1 针对不同规模的方程(1)，检验本文提出方法的有效性，取 $k=2$，令 $m=n=p=q$，分别取 $n=2,6,10,14,18$。在 Matlab 中随机生成 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2\in\boldsymbol{Q}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2\in\boldsymbol{Q}^{n\times n}$，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in\boldsymbol{HQ}^{n\times n}$，计算 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}_2$。根据算法 1 计算极小范数 Hermitian 解 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1{}'\\ \boldsymbol{X}_2{}'\end{pmatrix}$ 与真实解 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}$ 作比较，计算误差 $\varepsilon=\left\|\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1{}'\\ \boldsymbol{X}_2{}'\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}\right\|$，误差如图 1 所示。

算例 2 取不同规模下四元数矩阵方程(1)，分别用实表示[24]、复表示[25]和实向量表示方法进行误差比较，使其进行 k 次，统计其最优次数，取 $k=30$，三种方法的最优次数表如图 2 所示。

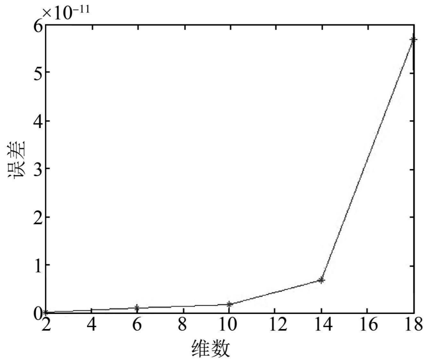

图 1 不同维数下问题 1 的误差图

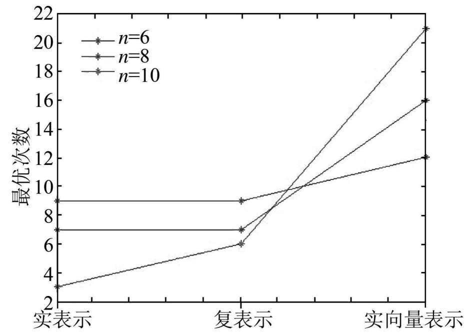

图 2 不同维数下三种方法达到最优次数图

由图 1 可看出该算法的有效性，由图 2 可看出在维数变大时，实向量表示方法误差最小的概率会更大。

6 结论

本文提出了一种基于矩阵半张量积，求解四元数矩阵方程最小二乘问题的方法。利用此方法可以避免四元数乘积中冗杂的运算，将四元数矩阵方程转化为实矩阵方程，使求解过程更加简便。通过验证，该算法精度较高，可行性较强。

参 考 文 献

[1] Adler S L. Scattering and decay theory for quaternionic quantum mechanics and structure of induced nonconservation[J]. Physical Review D, 1988, 37(12): 3654-3662.

[2] Caccavale F, Natale C, Siciliano B, et al. Six-dof impedance control based on angle/axis representations[J]. IEEE Transactions on Robotics & Automation, 1999, 15(2): 289-300.

[3] Ji P, Wu H T. A closed-form forward kinematics solution for the 6-6p Stewart platform[J]. IEEE Transactions on Robotics & Automation, 2001, 17(4): 522-526.

[4] Moxey C E, Sangwine S J, Ell T A. Hypercomplex correlation techniques for vector imagines[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(7): 1941-1953.

[5] Davies A J. Quaternionic dirac equation[J]. Physical Review D, 1990, 41: 2628-2630.

[6] Wang M H, Wei M S, Feng Y. An iterative algorithm for least squares problem in quaternionic quantum theory[J]. Computer Physics Communications, 2008, 179(4): 203-207.

[7] Chu K E W. Singular value and generalized singular value decompositions and the solution of linear matrix equations[J]. Linear Algebra and its Applications, 1987, 88(89): 83-98.

[8] Xu G P, Wei M S, Zhang D S. On solutions of matrix equations $\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CYD}=\boldsymbol{F}$ [J]. Linear Algebra and its Applications, 1998, 279: 93-109.

[9] Liao A P, Bai Z Z, Lei Y. Best approximate solution of matrix equation $\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CYD}=\boldsymbol{E}$ [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Ap-

plications，2006，27(3)：675-688.

[10] Wang Q W. Bisymmetric and centrosymmetric solutions to system of real quaternion matrix equation[J]. Computers & Mathematics with Applications，2005，49(5/6)：641-650.

[11] Li Y T，Wu W J. Symmetric and skew-antisymmetric solutions to systems of real quaternion matrix equations[J]. Computers & Mathematics with Applications，2008，55(6)：1142-1147.

[12] Yuan S F，Cao H D. Least squares skew bisymmetric solution for a kind of quaternion matrix equation[J]. Applied Mechanics and Materials，2011，(50/51)：190-194.

[13] Yuan S F，Liao A P，Wang P. Least squares η -bi-Hermitian problems of the quaternion matrix equation $(\boldsymbol{AXB}, \boldsymbol{CXD}) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ [J]. Linear and Multilinear Algebra，2014，63(9)：1849-1863.

[14] Song G J，Yu S W. The solution of a generalized sylvester quaternion matrix equation and Its application[J]. Advances in Applied Clifford Algebras，2017，27(3)：2473-2492.

[15] Wang Q W，Yang X X，Yuan S F. The least square solution with the least norm to a system of quaternion matrix equations[J]. Iranian Journal of Science and Technology，Transactions A：Science，2018，42 (A3)：1317.

[16] Cheng D Z，Qi H S，Zhao Y. An Introduction to Semi-tensor Product of Matrices and Its Application[M]. World Scientific Publishing Company，Singapore，2012.

[17] Cheng D Z，Liu Z Q.Application of semi-tensor product of matrices to finite games[J]. Control Theory Applications，2019，36(11)：1812-1819.

[18] Xu M R，Wang Y Z.Conflict-free coloring problem with appliction to frequency assignment[J]. Journal of Shandong University，2015，45(1)：64-69.

[19] Lu J Q，Li H T，L Y，Li F F. Survey on semi-tensor product method with its applications in logical networks and other finite-valued systems[J]. IET Control Theory and Applications，2017，11(13)：2040-2047.

[20] Wei M S，Li Y，Zhang F X，Zhao J L. Quaternion Matrix Computations[M]. New York：Nova Science Publisher，2018.

[21] Cheng D Z ，Qi H S，Xue A C. A survey on semi-tensor product of matrices[J]. Journal of Systems Science and Complexity，2007，20(2)：304-322.

[22] Cheng D Z，Qi H S，Liu Z Q. From STP to game based control[J]. Science China information Science，2018，61(1)：010201.

[23] 程代展，齐洪胜，贺风华. 有限集上的映射与动态过程—矩阵半张量积方法[M]. 北京：科学出版社，2016.

[24] Zhang F，Wei M，Li Y，Zhao J L. The minimal norm least squares Hermitian solution of the complex matrix equation $\boldsymbol{AXB} + \boldsymbol{CYD} = \boldsymbol{E}$ [J]. Journal of the Franklin Institute，2018，355(3)：1296-1310.

[25] Yuan S F . Least squares pure imaginary solution and real solution of the quaternion matrix equation $\boldsymbol{AXB} + \boldsymbol{CYD} = \boldsymbol{E}$ with the least norm [J]. Journal of Applied Mathematics，2014(1)：857081.