

基于矩阵半张量积的模糊逻辑研究进展

孙长乐,李海涛

(山东师范大学 数学与统计学院,山东 济南 250358)

摘要 模糊逻辑是一种在不确定性条件下建模和控制复杂过程的革命性方法,在系统建模与控制领域得到了广泛的应用。基于矩阵半张量积理论可以将模糊逻辑表达式转化为代数表达式,借鉴代数系统的经典控制理论与方法来进一步研究模糊逻辑。首先介绍了以矩阵半张量积理论为框架的模糊逻辑的理论研究进展,如模糊关系矩阵、模糊关系方程、模糊关系不等式与分层模糊控制等,其次介绍了基于矩阵半张量积框架下的模糊控制理论的应用,最后给出了基于矩阵半张量积理论的模糊逻辑研究前景。

关键词 矩阵半张量积;模糊逻辑;模糊关系;分层模糊系统

中图分类号 TP 273

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Recent Development of Fuzzy Logic Based on Semi-Tensor Product

SUN Changle, LI Haitao

(School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan 250358, China)

Abstract Fuzzy logic is a revolutionary method for modeling and control of uncertain complex process, which has been widely used in the field of system modeling and control. Fuzzy logic expressions can be converted to algebraic expressions by using semi-tensor product of matrices, and the classical control theory and method of algebraic systems can be used for the further study of fuzzy logic system. This paper firstly introduces the research progress of fuzzy logic based on semi-tensor product of matrices, such as fuzzy relation matrices, fuzzy relation equations, fuzzy relation inequalities, and hierarchical fuzzy system. Then, the applications of fuzzy control theory based on semi-tensor product framework is introduced. Finally, the research prospect of fuzzy logic based on semi-tensor product of matrices is given.

Key words semi-tensor product of matrices; fuzzy logic; fuzzy relation; hierarchical fuzzy system

0 引言

模糊逻辑利用部分专家知识或有限的实验数据来处理系统的复杂性、非线性与不确定性,是复杂系统建模与控制的革命性方法^[1,2]。自 Zadeh 于 1988 年提出模糊逻辑以来^[3,4],经过三十多年的研究发展,模糊逻辑已经引起了许多学科的关注并已成功应用于众多领域:控制工程^[5-7]、计算机网络^[8-11]、故障检测与诊断^[12-16]、模式识别^[17-20]等。

收稿日期:2021-04-12

基金项目:国家自然科学基金项目(62073202);泰山学者青年专家计划项目(tsqn201909076)资助

通讯作者:李海涛,男,汉族,博士,教授,博士生导师,研究方向:有限值动态系统,E-mail:haitaoli09@gmail.com。

模糊推理是模糊逻辑系统最为核心的部分,一般可分为两类:Mamdani 规则推理^[21]、T-S 模糊推理^[22]。模糊推理可分为前提与结论两部分,Mamdani 规则推理与 T-S 模糊推理前提部分相同,但是 Mamdani 规则推理在结论部分输出为模糊子集,而 T-S 模糊推理在结论部分输出为多项式函数。Mamdani 规则推理具有更好的解释能力,而 T-S 模糊推理一般与优化算法相结合具有更好的逼近能力。模糊推理通过模糊规则将人类推理与模糊信息联系起来去处理复杂系统,并进行多方面的扩展研究。例如,遗传模糊系统^[23-25]将遗传算法与模糊系统相结合,对模糊规则进行设计、优化,并使其具有一定的学习能力。模糊神经网络^[26-29]将神经网络的学习能力与模糊系统的解释能力相结合可更有效的处理复杂系统。分层模糊系统^[30-33]利用多个低维模糊子系统构建大规模模糊系统,减少系统模糊规则数量,简化模糊推理过程。

模糊推理过程本质上是模糊逻辑处理过程,现有处理模糊逻辑系统的数学方法少之又少,模糊逻辑系统研究过程中迫切需要一个恰当的数学工具以求突破。近年来,程代展教授及其团队提出矩阵半张量积理论,突破了普通矩阵乘积维数的限制,还能保持普通矩阵乘积的性质^[34-36]。矩阵半张量积将模糊推理过程转化为代数形式,从而有效简化了模糊推理过程。特别是对于具有多重耦合模糊关系的多输入多输出模糊系统,当多重耦合模糊关系不可按控制进行分解时,多个模糊控制器必须同时设计,其它模糊逻辑理论中逐个设计模糊控制器的方法就不再适用,而基于矩阵半张量积框架的模糊控制器设计方法为解决此类问题提供了便捷的研究框架。基于矩阵半张量积的模糊逻辑的理论核心为模糊关系矩阵,在其它模糊逻辑理论中,当输入变量的个数 $N > 2$ 时,模糊关系矩阵会受到维数的限制,很难进行准确、简洁的表示。但利用矩阵半张量积理论,模糊关系矩阵突破了维数的限制,进而将模糊推理过程转变为代数形式,借助相应的代数理论知识,可以更加简便的研究模糊逻辑理论。基于矩阵半张量积框架的模糊系统研究取得了重大的理论突破且已成功应用于实际系统控制,包括原料质量控制系统^[37]、电力工业^[38,39]、废弃物处理^[40]、空调系统设计^[41-48]等。

随着矩阵半张量积理论的提出,逻辑系统研究取得了重大突破并成功应用于众多方向,包括动态博弈^[48-51],动态-静态布尔网络^[52-56]与网络化系统的建模及安全性分析^[57-60]等。程代展教授在矩阵半张量积框架上对混合值逻辑定义、运算以及应用给出了一个较为系统的综述^[61]。然而,对基于矩阵半张量积框架下的模糊系统研究进展鲜有较为系统的总结,本文旨在对基于半张量积理论的模糊系统发展研究进行综合概述,并给出基于矩阵半张量积理论的模糊系统的研究前景。

1 数学基础

1.1 符号简介

(1) $M_{m \times n}$ 为 $m \times n$ 阶实矩阵构成的集合。

(2) $D_k = \{0, \frac{1}{k-1}, \frac{2}{k-1}, \dots, \frac{k-2}{k-1}, 1\}$, $k \geq 2$ 为逻辑论域。 $D_k^{m \times n}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵构成的集合,矩阵中元素 $a_{i,j} \in D_k$ 。

(3) δ_n^i 为单位矩阵 I_n 的第 i 列, $\Delta_s = \{\delta_s^i; i = 1, \dots, s\}$ 。

(4) $L = [\delta_n^{i_1}, \delta_n^{i_2}, \dots, \delta_n^{i_r}]$, $L \in M_{m \times n}$, 称 L 为逻辑矩阵,简记为 $L = \delta_n[i_1, i_2, \dots, i_r]$ 。 $L_{m \times n}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵构成的集合。

(5) 给定 $\alpha, \beta \in D_k$, α 与 β 的布尔加 $\alpha +_B \beta$, 定义为 $\alpha +_B \beta = (\alpha \vee \beta)$, \vee 为“析取”逻辑算子。同理,

$$\sum_{i=1}^n {}_B \alpha_i = \alpha_1 +_B \alpha_2 +_B \dots +_B \alpha_n。$$

(6) 给定 $\alpha, \beta \in D_k$, α 与 β 的布尔乘 $\alpha \times_B \beta$, 定义为 $\alpha \times_B \beta = (\alpha \wedge \beta)$, \wedge 为“合取”逻辑算子。

(7) 给定矩阵 $A = (a_{ij}) \in D_k^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in D_k^{n \times q}$, 矩阵 A 与 B 的布尔积为 $A \times_B B$, 定义为 $A \times_B B = C = (c_{ij}) \in D_k^{m \times q}$, 其中 $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times_B b_{kj}$, $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, q$ 。

1.2 矩阵半张量积

矩阵 A, B 做普通矩阵乘积时, A 的列数必须等于 B 的行数。矩阵半张量积是普通矩阵乘积的推广,突

破了矩阵 A 、 B 做普通矩阵乘积时维数的限制,同时还保持了普通矩阵乘积的性质。

给定矩阵 $A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{p \times q}$, 矩阵 A 与 B 的半张量积 $A \ltimes B$ 定义为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p}),$$

式中 $t = lcm(n, p)$ 为 $\{n, p\}$ 的最小公倍数。在文中如果没有特别说明,默认矩阵乘积为矩阵半张量积,并将符号“ \ltimes ”省略。

矩阵半张量积可以将逻辑算子转化为矩阵形式,是逻辑演算代数化的一个重要方法,并已经得到了广泛的应用^[62-65]。

定义混合值逻辑变量等价的向量表示形式,如 $D_3 = \{1, \frac{1}{2}, 0\}$, 其中 $1 \sim \delta_3^1, \frac{1}{2} \sim \delta_3^2, 0 \sim \delta_3^3$ 。设 $P_i \in \Delta_{k_i} (i = 1, \dots, n)$ 为一组混合值逻辑变量,给定 n 元逻辑函数 $f(x_1, \dots, x_n)$, 则存在唯一的逻辑矩阵使得

$$f(x_1, \dots, x_n) = M_f \ltimes_{i=1}^n x_i,$$

式中 $M_f \in L_{q \times k}, k = \sum_{i=1}^n k_i$, M_f 称为逻辑函数 f 的结构矩阵。

下面通过一个例子来说明混合值逻辑映射的代数化,以便读者理解。

给定逻辑变量 $x_1 \in \Delta_2, x_2 \in \Delta_2, x_3 \in \Delta_2$, 逻辑函数 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \vee x_3$, 则有形式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \wedge x_2 \vee x_3 \\ &= M_d(x_1 \wedge x_2)x_3 \\ &= M_d M_c x_1 x_2 x_3 \\ &= M_f x_1 x_2 x_3, \end{aligned}$$

式中合取逻辑算子的矩阵表示形式 $M_c = \delta_2[1 \ 2 \ 2 \ 2]$, 析取逻辑算子的矩阵表示形式 $M_d = \delta_2[1 \ 1 \ 1 \ 2]$, 结构矩阵 $M_f = \delta_2[1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2]$ 。

2 模糊控制系统研究进展

模糊推理是模糊控制系统中最重要也是最复杂的一部分,现有对模糊推理进行分析研究的数学方法较少。随着程代展教授提出矩阵半张量积理论,并与其团队取得了一些基本研究成果,为模糊集描述与一般模糊关系描述提供了一种新方法。利用矩阵半张量积方法可以将模糊推理过程转化为代数形式,使得模糊推理过程研究取得了突破性进展。

2.1 历史回顾

模糊控制系统一般分为模糊化、知识库、模糊推理、解模糊化四部分,其中以基于模糊规则求解模糊控制量的模糊推理为核心部分^[66,67]。模糊推理在处理系统不确定性、随机性与复杂性方面有着天然的优势。模糊推理一般可分为 Mamdani 规则推理与 T-S 模糊推理,模糊规则表达式为“IF X is A THEN Y is B ”,其中, Mamdani 规则推理类型中“ B ”为模糊子集^[68,69], T-S 模糊推理中“ B ”为与变量 X 相关的多项式^[70-74]。

为便于读者理解,下面用一个例子来说明模糊推理过程。给定两输入单输出的模糊系统,系统变量均有三个模糊子集 A 、 B 与 C , 其中 $A = 1/1 + 0.5/2, B = 0.1/1 + 1/2, C = 0.2/1 + 1/1$, 模糊规则:“IF X_1 is A AND X_2 is B , THEN Y is C ”。已知 $\bar{A} = 0.8/1 + 0.1/2, \bar{B} = 0.5/1 + 0.2/2$, 获取输出 \bar{C} 的模糊推理过程如下

(1) 求取矩阵 D , 其中 $d_{xy} = \mu_A(x_1) \wedge \mu_B(x_2)$

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}。$$

(2) 求取模糊关系矩阵 M_R

$$M_R = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \times [0.2 \ 0.1] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}。$$

(3) 求取输出 \bar{C}

$$\bar{C} = \mathbf{X}\mathbf{M}_R = [0.5 \ 0.2 \ 0.1 \ 0.1] \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} = [0.2 \ 0.1].$$

除上述通过模糊关系矩阵进行模糊推理以外,还可以通过隶属度函数图像进行模糊推理。模糊系统中输入变量个数 $r \leq 2$ 时,模糊推理过程通过模糊关系矩阵可以转化为代数形式,简化推理过程,降低推理过程的复杂度。当 $r \geq 3$ 时,从步骤(1)、(2)可知,模糊关系矩阵变为 r 维矩阵,无法应用于模糊推理过程,模糊推理过程计算复杂度剧增。但模糊控制系统具有设计简单,实现性较强,控制效果明显等优点,在各方面得到了广泛的应用,因此多输入变量模糊系统的模糊关系矩阵研究是一个比较重要且有意义的课题。

2.2 模糊控制系统最新研究进展

基于矩阵半张量积方法,文献[75-77]将模糊推理过程转化为模糊关系矩阵进行代数运算,不再受系统输入变量个数的限制,即模糊关系矩阵不受维数的限制,模糊推理研究取得了突破性进展。

基于矩阵半张量积理论,模糊关系矩阵不再受维数的限制。为了文章紧密性,通过两输入单输出模糊系统对模糊关系矩阵进行介绍。系统输入变量 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ 、 $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, 输出变量 $Z = \{z_1, \dots, z_r\}$, 隶属度值 $\{\mu_R(x_i, y_j, z_k) \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, r\}$ 按 $\mathbf{I}_d(k; r) \times \mathbf{I}_d(i, j; m, n)$ 顺序进行排列,进而构建系统的模糊关系矩阵

$$\mathbf{M}_{R(Z \times XY)} = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1, z_1) \cdots \mu_R(x_1, y_n, z_1) \cdots \mu_R(x_m, y_n, z_1) \\ \mu_R(x_1, y_1, z_2) \cdots \mu_R(x_1, y_n, z_2) \cdots \mu_R(x_m, y_n, z_2) \\ \dots \dots \\ \mu_R(x_1, y_1, z_r) \cdots \mu_R(x_1, y_n, z_r) \cdots \mu_R(x_m, y_n, z_r) \end{bmatrix}.$$

如图 1 模糊控制系统结构框图所示,基于矩阵半张量积方法,模糊关系矩阵替代模糊规则,将模糊推理过程转变为代数运算过程,简化其计算复杂度,降低了模糊控制器设计的复杂性。

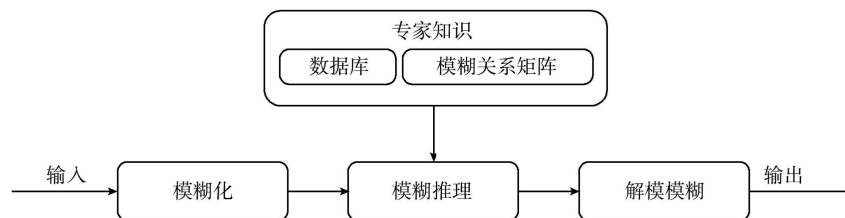


图 1 模糊控制系统结构框图

为便于读者理解,下面用一个例子来说明基于矩阵半张量积理论的模糊推理过程。

给定两输入单输出的模糊控制系统,系统输入变量 A, B 均有 7 个模糊子集 $\{NB, NM, NS, ZO, PS, PM, PB\}$, 输出变量 U 有 13 个模糊子集 $\{NVB, NB, NMB, NMS, NS, NVS, ZO, PVS, PS, PMS, PMB, PB, PVB\}$ 。给定模糊输入 $\mathbf{V}_A = [0 \ 0 \ 0.75 \ 0.25 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{V}_B = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.75 \ 0]^T$, 模糊规则如表 1 所示,求模糊输出 \mathbf{V}_U 。

表 1 系统模糊规则表

$A \setminus B$	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
NB	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	-0.1	0
NM	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	-0.1	0	0.1
NS	-0.6	-0.4	-0.2	-0.3	0	0.1	0.2
ZO	-0.4	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.4
PS	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.4	0.6
PM	-0.1	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
PB	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0

通过模糊规则表可知此系统的模糊关系矩阵

$$\mathbf{M}_R = \delta_{13} [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\ 10 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13].$$

系统的模糊输出矩阵 $\mathbf{V}_U = \mathbf{M}_R \times \mathbf{V}_A \times \mathbf{V}_B = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.75 \ 0.25 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 。

基于模糊规则表可求得模糊关系矩阵,然而在实际应用过程中,有些模糊控制系统无法直接给出模糊控制规则表,只有相应的系统测量数据,此时模糊关系矩阵求解就会相对困难。为此,文献[78]在隶属度函数中参数不确定时基于最小二乘法等优化算法利用测量数据对参数进行逼近,进而间接求取模糊关系矩阵;当系统变量模糊集对应的隶属度参数准确时,基于测量数据使用直接法对模糊关系矩阵进行求解。例如对三输入单输出模糊控制系统,给定 P 组测量数据,模糊关系矩阵求解过程如:

(1) 指定测量数据中任意一组输入输出数据 $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, y_i)$, 对其进行模糊化,求解其向量表示形式 $\mathbf{V}_{x_1}(x_{1i})\mathbf{V}_{x_2}(x_{2i})\mathbf{V}_{x_3}(x_{3i})\mathbf{V}_y(y_i)$ 。

(2) 第 i 组数据所对应的模糊关系矩阵 $\mathbf{M}_i = \mathbf{V}_y(y_i) \times (\mathbf{V}_{x_1}(x_{1i}) \times \mathbf{V}_{x_2}(x_{2i}) \times \mathbf{V}_{x_3}(x_{3i}))^T$ 。

(3) 系统的模糊关系矩阵 $\mathbf{M}_R = \bigcup_{i=1}^P \mathbf{M}_i$ 。

文献[79]提出了基于模糊关系矩阵的多输入多输出模糊系统的通用逼近方法,从理论上证明了该框架下的模糊系统能够以所需的精度逼近非线性函数,并通过仿真验证了其有效性。模糊系统中控制规则完备时,模糊关系矩阵是唯一确定的,模糊规则不完备时,模糊关系矩阵有多个。文献[80]针对模糊随机变量,将概率转移矩阵与模糊关系矩阵相结合,提出了随机模糊控制器的设计方法,当模糊规则完备时,随机模糊控制器是唯一确定的。

3 分层模糊控制系统研究进展

3.1 历史回顾

模糊系统中控制规则会随着系统输入变量的增加呈现出指数增长的趋势,即给定的模糊系统有 m 个输入变量,每个变量有 n 个模糊子集,那么模糊规则有 n^m 条,输入变量增加 p 个,模糊规则数量变为 n^{m+p} 条,这种现象称为“维数灾难”。模糊规则数量增多会增加模糊控制器设计的难度与模糊推理的复杂度。为处理模糊系统“维数灾难”问题,文献[81]提出了分层模糊系统的思想,即整个模糊系统由多个低维模糊子系统构成,使得模糊规则的数量会随着输入变量个数的增加呈现线增加,有效减少了大规模模糊系统的模糊规则数量[82]。分层模糊控制系统已广泛的应用于航空航天[83,84],机器人控制[85,86],社会管理[87]等领域[88-91]。

分层模糊控制系统设计过程中,中间层涉及的模糊规则结构几乎没有任何物理意义,其规则解释性较弱,难以设计[92]。文献[93]提出一种新的映射规则库方案,基于原系统模糊规则获取分层系统的模糊规则,增强了中间层系统设计的可解释性。分层模糊控制子系统之间经过解模糊化、模糊化过程,控制变量的精度会受到影响。针对此问题,文献[94]提出一种基于转移矩阵快速推理获取分层模糊系统矩阵表达形式的方法,构造辅助矩阵,有效避免了中间层人工参与过程,使得中间层系统设计更加透明。

3.2 分层模糊系统最新研究进展

基于矩阵半张量积方法,分层模糊系统研究取得了较大进展。文献[95]提出基于矩阵半张量积方法的分层模糊系统实现方法,构建了分层模糊系统的矩阵半张量积代数框架,基于混合值逻辑函数的半张量积分解方法,降低了中间层设计的复杂度,使得中间层系统设计更加透明。

分层模糊系统可分为串联、并联与混合分层模糊系统,其中混合分层模糊系统为串联与并联分层模糊系统的组合,因此综合运用串联、并联层次模糊系统实现方法即可构建混合分层模糊系统。

串联分层模糊系统的代数表达形式如

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{M}_{f_{n-1}} \mathbf{y}_{n-2} \mathbf{x}_n \\ &= \mathbf{M}_{f_{n-1}} \mathbf{M}_{f_{n-2}} \mathbf{y}_{n-3} \mathbf{x}_{n-1} \mathbf{x}_n \\ &= \dots \dots \\ &= \mathbf{M}_{f_{n-1}} \mathbf{M}_{f_{n-2}} \dots \mathbf{M}_{f_2} \mathbf{M}_{f_1} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{n-1} \mathbf{x}_n \\ &= \times_{i=1}^n \mathbf{M}_{f_i} \times_{i=1}^n \mathbf{x}_i. \end{aligned} \quad (1)$$

并联分层模糊系统的代数表达形式如

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{M}_{f_i} y_{i-1,1} y_{i-1,2} \\ &= \mathbf{M}_{f_i} \mathbf{M}_{f_{i-1}} y_{i-2,1} y_{i-2,2} \mathbf{M}_{f_{i-2}} y_{i-2,3} y_{i-2,4} \\ &= \dots \dots \\ &= \mathbf{M}_{f_i} \mathbf{M}_{f_{i-1}}, \dots, \mathbf{M}_{f_1} x_1 x_2 \mathbf{M}_{f_3} x_3 x_4, \dots, \mathbf{M}_{f_{i-1}}, \dots, \mathbf{M}_{f_{N-1}} x_{2N-3} x_{2N-2} \mathbf{M}_{f_N} x_{2N-1} x_{2N}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 \mathbf{M}_{f_m} 为第 i 结构层第 m 个模糊逻辑单元的结构矩阵。

基于混合值逻辑函数的矩阵半张量积分解方法,整个模糊系统的结构矩阵可以分解为形如串联、并联分层模糊系统中子系统的结构矩阵,进而获取分层模糊系统中子系统的结构矩阵。基于矩阵半张量积分解的方法,将模糊推理过程转化为代数形式,使得设计过程更加透明、简洁,其次,在中间层子系统设计过程中不需要人工参与也不需要构建辅助矩阵,并降低了分层模糊控制系统的计算复杂度。

4 模糊关系方程与模糊关系不等式研究进展

4.1 历史回顾

模糊关系方程与模糊关系不等式方程求解问题是模糊集与模糊系统领域最重要的问题之一。由于其重要性与研究难度,该问题一直是富有挑战性的研究课题^[96,97]。

模糊关系方程求解问题可诠释为给定模糊集 $A \in F(U \times W)$ 、 $B \in F(U \times V)$, 寻找一个 $X \in F(W \times V)$ 满足

$$A \circ X = B. \quad (3)$$

文献[98]提出了一种模糊关系系统的识别算法,该算法对系统模糊数据或非模糊数据进行聚类,构建基本模糊集,并根据相应的性能指标对模糊关系进行计算。文献[99]提出基于规则的方法,使用符号矩阵与辅助矩阵,求解最广泛的解决集。文献[100]通过排除规则事先排除冗余解,并通过构建准则矩阵和辅助矩阵给出了求解模糊关系的算法,通过简单的逻辑运算即可求得独立的解集。

模糊关系不等式方程表示为

$$s \leq A \circ x \leq t, \quad (4)$$

式中 $s = [s_1, s_2, s_3, \dots, s_m]^T$, $A = (a_{ij}) \in [0, 1]^{m \times n}$, $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$, $t = [t_1, t_2, t_3, \dots, t_m]^T$ 。

文献[101]定义了模糊关系不等式路径,简化了模糊关系不等式求解过程,并给出受限于多个模糊关系不等式的目标函数优化算法,缩小优化搜索范围。文献[102]对这一算法进行简化,并给出了模糊关系不等式路径与最小解之间的关系,提出了具有模糊关系不等式约束的优化问题的新解法。文献[103]讨论了模糊关系不等式最小解的唯一性,通过定义关键集、关键系统给出了求解模糊关系不等式的算法。

4.2 模糊关系方程最新研究进展

基于矩阵半张量积方法,模糊关系方程求解问题可转化为代数方程求解问题。文献[104,105]提出了最大-最小模糊关系方程的参数集,证明方程所有的解都可以从参数集中求得,并给出了相应求解算法。该算法构造 $\Xi = \{\xi_i \mid i = 1, \dots, r; 0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_r = 1\}$ 为参数集,并定义了两个映射: $\pi_*(x) = \max_i \{\xi_i \in \Xi \mid \xi_i \leq x\}$, $\pi^*(x) = \min_i \{\xi_i \in \Xi \mid \xi_i \geq x\}$ 来简化计算。下面通过一个例子来说明上述求解算法。

给定逻辑方程

$$\begin{cases} x \wedge y = 0.32, \\ (\neg x) \vee y = 0.68. \end{cases} \quad (5)$$

(1) 根据逻辑方程构造有序集合 $\Xi = \{0, 0.32, 0.68, 1\}$

(2) 将集合 Ξ 中的元素转化为向量形式 $1 \sim \delta_4^1$, $0.68 \sim \delta_4^2$, $0.32 \sim \delta_4^3$, $0 \sim \delta_4^4$ 。

(3) 基于矩阵半张量方法,将逻辑方程转化为代数形式

$$\begin{cases} \mathbf{M}_c^4 \times x \times y = \delta_4^3, \\ \mathbf{M}_d^4 \times (\mathbf{M}_n^4 \times x) \times y = \delta_4^2. \end{cases} \quad (6)$$

式(4)可进一步写为

$$\begin{cases} G_1 z = \delta_4^3, \\ G_2 z = \delta_4^2, \end{cases}$$

式中 $z = x \times y, G_1 = M_c^4 = \delta_4 [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4], G_2 = M_d^4 \times M_n^4 = \delta_4 [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, 其中两式相乘可得 $Lz = b$, 式中 $L = G_1 * G_2 = \delta_{16} [1 \ 6 \ 11 \ 16 \ 5 \ 6 \ 11 \ 15 \ 9 \ 10 \ 10 \ 14 \ 13 \ 13 \ 13 \ 13], b = \delta_4^3 \times \delta_4^2 = \delta_{16}^{10}$ 。

(4) 由于 $Col_{10}(L) = Col_{11}(L) = b$, 可得模糊关系方程的解为 $z_1 = \delta_{16}^{10}, z_2 = \delta_{16}^{11}$, 即

$$\begin{cases} x_1 = \delta_4^3, & \begin{cases} x_2 = \delta_4^3, \\ y_1 = \delta_4^2, & \begin{cases} y_2 = \delta_4^3. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

由向量形式转化为模糊值

$$\begin{cases} x_1 = 0.32, \\ 0.32 \leq y \leq 0.68. \end{cases}$$

文献[106]研究了模糊关系方程一般分解问题的解的结构, 给出了解存在的充分必要条件, 并基于矩阵半张量积提出了求解一般分解问题全解的算法。该算法首先构建了有序参数集 Ξ , 并将集合元素按顺序转化为向量形式, 其次将逻辑方程转化为代数形式 $LE_j z = \times_{i=1}^n r_{ij}, 1 \leq j \leq n$, 其中 L, E_j 为相应的结构矩阵, $z = \times_{i=1}^n (\times_{j=1}^n y_{ij})$, 最后找到列解, 并转化为模糊值解, 求解出模糊关系方程一般分解问题的全解。文献[107]基于 Zadeh 扩展定理, 将 Type-1 模糊关系推广到 Type-2 模糊关系, 建立了 Type-2 模糊关系方程, 并将单点 Type-2 模糊关系方程的解分解为主元阵和次元阵两部分, 构造有序参数集对主元阵进行求解, 再利用取小模糊逻辑对次元阵进行求解。

4.3 模糊关系不等式最新研究进展

基于矩阵半张量积理论, 文献[108, 109]定义相关参数集, 并证明了模糊关系不等式解集最小解的唯一性, 提出了求解模糊关系不等式全解的算法。下面通过一个例子来介绍相关算法。

$$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.9 & 0.3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

(1) 根据逻辑方程构造有序集合 $\Xi = \{0, 0.1 \ 0.2 \ 0.3, 0.5, 0.7 \ 0.9 \ 1\}$ 。

(2) 将集合 Ξ 中的元素转化为向量形式

$$1 \sim \delta_8^1, 0.9 \sim \delta_8^2, 0.7 \sim \delta_8^3, 0.5 \sim \delta_8^4, 0.3 \sim \delta_8^5, 0.2 \sim \delta_8^6, 0.1 \sim \delta_8^7, 0 \sim \delta_8^8.$$

(3) 将模糊关系不等式方程(5)中不等式逐个转化为代数形式, 并求得相应的解集 $\Gamma_1 = \{\delta_{64}^i : i = 1, \dots, 63\}, \Gamma_2 = \{\delta_{64}^i : i = 25, \dots, 54, 57, \dots, 62\}$ 。

(4) 求得解集 $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, 并求出解集中最大解对应的模糊值为 $[0.5 \ 1]^T$, 最小解对应的模糊值分别为 $[0.2 \ 0]^T$ 与 $[0, 0.2]^T$, 模糊关系不等式的全部解可表示为

$$\begin{bmatrix} 0.2 \leq x_1 \leq 0.5 \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \leq x_1 \leq 0.5 \\ 0.2 \leq x_2 \leq 1 \end{bmatrix}.$$

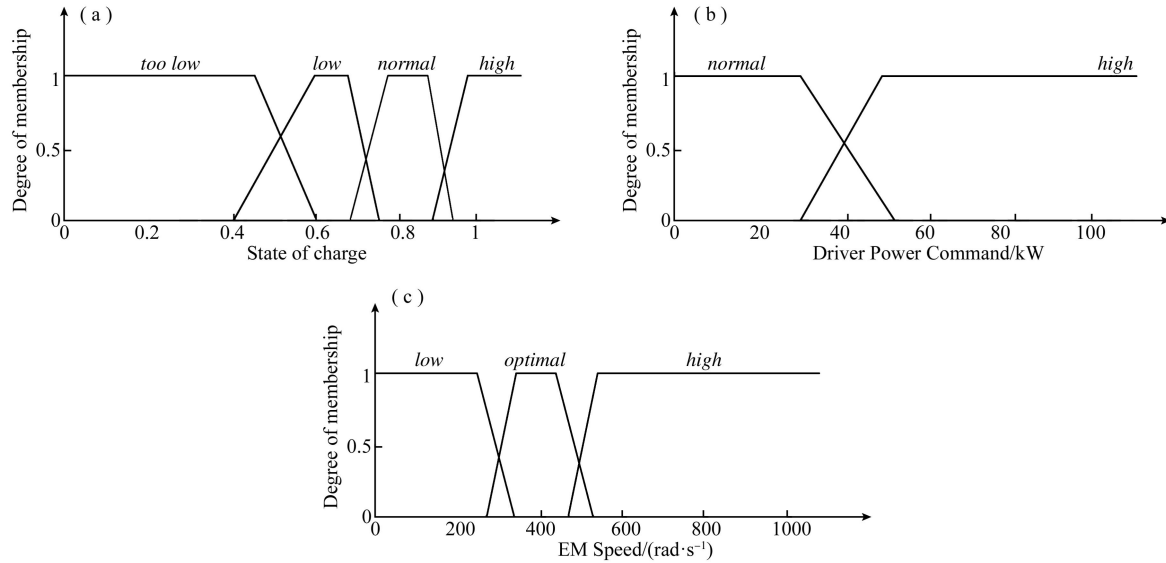
文献[110]将这一结果进行扩展, 将更为广泛的五种模糊关系不等式转化为式(2)的形式, 利用参数集进行求解运算, 并给出了相应的求解算法。文献[111]对基于布尔半张量积复合算子的模糊关系不等式进行了研究, 通过构造参数集的方法, 求得其模糊关系不等式的所有解。

5 基于矩阵半张量积方法的模糊控制系统应用研究进展

利用矩阵半张量积方法, 构建模糊关系矩阵替代模糊规则进行模糊推理过程, 大大简化了模糊推理过程, 为模糊逻辑分析与推理提供了新方法, 并成功应用于实际控制系统。

通过文献[112]中混合动力电动汽车能量管理与控制系统介绍基于矩阵半张量积方法的模糊控制系统实际应用过程。车辆行驶期间, 电池电量充足时, 车辆电动机主要由电池供电; 电池电量不足时, 发动机工作, 一方面给电池充电, 另一方面为电动机工作提供能量; 当发动机所提供的能量不足以使电动机正常工作时, 电池会为电动机提供能量。

混合动力电动汽车能量模糊控制系统以电池储能状态(SOC)、驾驶员命令指令(P_{driver})与电机转速(ω_{EM})为输入变量,发动机功率(P_{gen})与比例因子($scale\ factor$)为输出变量。电池储能状态有四个模糊子集 $\{too\ low, low, normal, too\ high\}$;驾驶员功率命令有两个模糊子集 $\{normal, high\}$;电机转速有三个模糊子集 $\{low, optimal, high\}$ 。输入变量的隶属度函数如图2所示。



注:(a) 电机转速的隶属度函数;(b) 发动机功率的隶属度函数;(c) 比例因子的隶属度函数。

图2 输入变量的隶属度函数

系统模糊规则表示如

IF SOC is *too high*, THEN P_{gen} is 0 kW;

IF SOC is *normal* AND P_{driver} is *normal* AND ω_{EM} is *optimal*, THEN P_{gen} is 10 kW;

IF SOC is *normal* AND ω_{EM} is not *optimal*, THEN P_{gen} is 0 kW;

IF SOC is *low* AND P_{driver} is *normal* AND ω_{EM} is *low*, THEN P_{gen} is 5 kW;

IF SOC is *low* AND P_{driver} is *normal* AND ω_{EM} is not *low*, THEN P_{gen} is 15 kW;

IF SOC is *too low*, THEN P_{gen} is P_{genmax} AND $scale\ factor$ is 0;

IF SOC is not *low* AND P_{driver} is *high*, THEN P_{gen} is 0 kW;

IF SOC is not *too low*, THEN $scale\ factor$ is 1.

规定 SOC 为变量 x_1 ,其模糊子集可表示如 *too low* $\sim \delta_4^1$, *low* $\sim \delta_4^2$, *normal* $\sim \delta_4^3$, *too high* $\sim \delta_4^4$ 。

规定 P_{driver} 为变量 x_2 ,其模糊子集可表示如 *normal* $\sim \delta_2^1$, *high* $\sim \delta_2^2$ 。

规定 ω_{EM} 为变量 x_3 ,其模糊子集可表示如 *low* $\sim \delta_3^1$, *optimal* $\sim \delta_3^2$, *high* $\sim \delta_3^3$ 。

规定 P_{gen} 为变量 y_1 ,其模糊子集可表示如 0 kW $\sim \delta_5^1$, 5 kW $\sim \delta_5^2$, 10 kW $\sim \delta_5^3$, 15 kW $\sim \delta_5^4$, P_{genmax} $\sim \delta_5^5$ 。

规定 $scale\ factor$ 为变量 y_2 ,其模糊子集可表示如 1 $\sim \delta_2^1$, 0 $\sim \delta_2^2$ 。

系统模糊规则可表示为

IF $x_1 = \delta_4^4$, $x_2 = \delta_2^1$, and $x_3 = \delta_3^1$, THEN $y_1 = \delta_5^1$, and $y_2 = \delta_2^1$;

IF $x_1 = \delta_4^4$, $x_2 = \delta_2^1$, and $x_3 = \delta_3^2$, THEN $y_1 = \delta_5^1$, and $y_2 = \delta_2^1$;

IF $x_1 = \delta_4^4$, $x_2 = \delta_2^1$, and $x_3 = \delta_3^3$, THEN $y_1 = \delta_5^1$, and $y_2 = \delta_2^1$;

... ..

IF $x_1 = \delta_4^2$, $x_2 = \delta_2^2$, and $x_3 = \delta_3^3$, THEN $y_1 = \delta_5^1$, and $y_2 = \delta_2^1$;

IF $x_1 = \delta_4^2$, $x_2 = \delta_2^2$, and $x_3 = \delta_3^2$, THEN $y_1 = \delta_5^1$, and $y_2 = \delta_2^1$;

IF $x_1 = \delta_4^3$, $x_2 = \delta_2^2$, and $x_3 = \delta_3^2$, THEN $y_1 = \delta_5^1$, and $y_2 = \delta_2^1$ 。

基于模糊规则可得此系统的模糊关系矩阵为

参 考 文 献

- [1] OJHA V, ABRAHAM A, SNAHEL V. Heuristic design of fuzzy inference systems; a review of three decades of research[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2019, 85: 845-864.
- [2] 孟广武. 模糊数学的基本理论及其应用(I)模糊数学的产生和发展概述[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 1998, 11(2): 1-4+10.
- [3] ZADEH L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J]. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, 1973, 1: 28-44.
- [4] ZADEH, L A. Fuzzy logic[J]. *Computer*, 1988, 21(4): 83-93.
- [5] ALDAIR A A, RASHID A T, RASHID M T, et al. Adaptive fuzzy control applied to seven-link biped robot using ant colony optimization algorithm[J]. *Iranian Journal of Science & Technology Transactions of Electrical Engineering*, 2019, 43(4): 797-811.
- [6] WU Z G, DONG S, SHI P, et al. Reliable filter design of takagi-sugeno fuzzy switched systems with imprecise modes[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 50(5): 1941-1951.
- [7] XIE X, YUE D, PENG C. Observer design of discrete-time fuzzy systems based on an alterable weights method[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 50(4): 1430-1439.
- [8] KARABOGA D, KAYA E. Adaptive network based fuzzy inference system(anfis) training approaches: a comprehensive survey[J]. *Artificial Intelligence Review*, 2018, 52(4): 2263-2293.
- [9] ZHANG D, HAN Q L, ZHANG X M. Network-based modeling and proportional-integral control for direct-drive-wheel systems in wireless network environments[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 50(6): 2462-2474.
- [10] CAO B, ZHAO J, LV Z, et al. Multiobjective evolution of fuzzy rough neural network via distributed parallelism for stock prediction[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(5): 939-952.
- [11] SHEN H, MEN Y, WU Z G, et al. Network-based quantized control for fuzzy singularly perturbed semi-markov jump systems and its application[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2018, 66(3): 1130-1140.
- [12] LEMOS A, CAMINHAS W, GOMIDE F. Adaptive fault detection and diagnosis using an evolving fuzzy classifier[J]. *Information Sciences*, 2013, 220: 64-85.
- [13] ZHANG S, SUN Z, WANG M, et al. Deep fuzzy echo state networks for machinery fault diagnosis[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(7): 1205-1218.
- [14] GAO Y, XIAO F, LIU J, et al. Distributed soft fault detection for interval type-2 fuzzy-model-based stochastic systems with wireless sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, 15(1): 334-347.
- [15] LI L, CHADLI M, DING S X, et al. Diagnostic observer design for t-s fuzzy systems; application to real-time-weighted fault-detection approach[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2017, 26(2): 805-816.
- [16] WANG T, ZHANG G, ZHAO J, et al. Fault diagnosis of electric power systems based on fuzzy reasoning spiking neural p systems[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2014, 30(3): 1182-1194.
- [17] MELIN P, MENDOZA O, CASTILLO O. Face recognition with an improved interval type-2 fuzzy logic sugeno integral and modular neural networks[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 2011, 41(5): 1001-1012.
- [18] JIANG Y, DENG Z, CHUNG F L, et al. Recognition of epileptic eeg signals using a novel multiview ts-k fuzzy system[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2016, 25(1): 3-20.
- [19] LI H, ZHANG L, HUANG B, et al. Sequential three-way decision and granulation for cost-sensitive face recognition[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 241-251.
- [20] ZHANG S, XIONG R. Adaptive energy management of a plug-in hybrid electric vehicle based on driving pattern recognition and dynamic programming[J]. *Applied Energy*, 2015, 155: 68-78.
- [21] MAMDANI E H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant[J]. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, 1974, 121(12): 1585-1588.
- [22] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, 1993, 15(1): 387-403.
- [23] SAHIN S, TOLUN M R, HASSANPOUR R. Hybrid expert systems; a survey of current approaches and applications[J]. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39(4): 4609-4617.
- [24] SHEN H, MEN Y, CAO J, et al. H-infinity filtering for fuzzy jumping genetic regulatory networks with round-robin protocol; a hidden-markov-model-based approach[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 28(1): 112-121.
- [25] HONG H, PANAH M, SHIRZADI A, et al. Flood susceptibility assessment in hengfeng area coupling adaptive neuro-fuzzy inference system with genetic algorithm and differential evolution[J]. *Science of The Total Environment*, 2018, 621: 1124-1141.
- [26] LENG G, MCGINNITY T M, PRASAD G. Design for self-organizing fuzzy neural networks based on genetic algorithms[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 14(6): 755-766.

- [27] HOU S, FEI J, CHEN C, et al. Finite-time adaptive fuzzy-neural-network control of active power filter[J]. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2019, 34(10): 10298-10313.
- [28] ABD E M, EWEEES A A, ALAMEER Z. Improving adaptive neuro-fuzzy inference system based on a modified salp swarm algorithm using genetic algorithm to forecast crude oil price[J]. *Natural Resources Research*, 2020, 29(4): 2671-2686.
- [29] FANG Y, FEI J, CAO D. Adaptive fuzzy-neural fractional-order current control of active power filter with finite-time sliding controller[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2019, 21(5): 1533-1543.
- [30] TASHAYO B, ALIMOHAMMADI A. Modeling urban air pollution with optimized hierarchical fuzzy inference system[J]. *Environmental Science & Pollution Research*, 2016, 23(19): 1-15.
- [31] OZER B C, MUTLU B, NEFESLIOGLU H A, et al. On the use of hierarchical fuzzy inference systems(hfis) in expert-based landslide susceptibility mapping, the central part of the rif mountains(morocco)[J]. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 2020, 79(1): 551-568.
- [32] TSENG M L, WU K J, MA L, et al. A hierarchical framework for assessing corporate sustainability performance using a hybrid fuzzy synthetic method-dematel[J]. *Technological Forecasting and Social Change*, 2019, 144: 524-533.
- [33] ZHAO X, YANG H, XIA W, et al. Adaptive fuzzy hierarchical sliding-mode control for a class of mimo nonlinear time-delay systems with input saturation[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2016, 25(5): 1062-1077.
- [34] QI H S, CHENG D Z. On Logic-Based Intelligent Control[C].//中国自动化学会控制理论专业委员会. 第二十四届中国控制会议论文集(下册), 2005.
- [35] QI H S, CHENG D Z. Logic and logic-based control[J]. *Control Theory & Technology*, 2008, 6(1): 26-36.
- [36] CHENG D Z. On Logic-based Intelligent Systems[C].//International Conference on Control & Automation, 2005.
- [37] JIANG P, YU H, WANG S. Optimization of expert system via semi-tensor product[C].//32nd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation(YAC), 2017.
- [38] 张淳军, 吕红丽, 段培永, 等. 基于半张量积的冷热电联供系统模糊建模[J]. *建筑电气*, 2015(9): 81-86.
- [39] LV L H, ZHANG C J, CHEN W. Fuzzy Modeling and Particle Swarm Optimization Based on Energy Consumption Data of the Combined Cold-heat and Power System[C].//11th Conference on Industrial Electronics and Applications(ICIEA), 2016.
- [40] WANG Z, WANG G, GUO R. Design for vegetable waste fermentation control systems based on semi-tensor product fuzzy controller[J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2018, 10(8): 1-11.
- [41] 花晓慧, 段培永, 吕红丽, 等. 基于半张量积的空调系统模糊控制器设计[C].//东北大学、IEEE 新加坡工业电子分会、IEEE 哈尔滨控制系统分会. 第 26 届中国控制与决策会议论文集, 2014.
- [42] LV H L, HUA X H, DUAN P Y, et al. Indoor dynamic thermal control based on fuzzy relation model of air-conditioning system[C].//Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation, IEEE, 2014.
- [43] Qin F, Wang C, Feng L, et al. Modeling based on semi-tensor product for radiant floor cooling systems[J]. *Procedia Engineering*, 2017, 205: 3782-3788.
- [44] 陈诚, 朱伟. 一种基于逻辑的洗衣机模糊控制器[J]. *中国科技信息*, 2013(7): 117-118.
- [45] 王佐勋, 徐德. LED 晶圆贴片过程中压力的二阶段模糊决策与控制[J]. *控制与决策*, 2016, 31(3): 403-409.
- [46] XU M R, WANG Y Z, JIANG P. Fuzzy graph coloring via semi-tensor product method[C].//34th Chinese Control Conference(CCC), 2015.
- [47] 蒋珍, 田海丽. 模糊控制在变风量空调 VAVBOX 中的设计研究[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2012, 25(1): 42-45+56.
- [48] 张永春, 孙多青. 基于灰色预测的微型机器人自适应模糊控制[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2001, 14(2): 3-7.
- [49] 邢海云. 矩阵的半张量积在进化博弈论中的应用[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2016, 29(1): 1-4.
- [50] 刘华, 李莹. 保险策略在极限值公共物品博弈中的应用[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2016, 29(2): 51-54+59.
- [51] LI X, DENG L, ZHAO J. Optimal control of networked evolutionary games with bankruptcy risk[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 125806-125813.
- [52] ZHU S, LU J, HUANG T, et al. Output robustness of probabilistic boolean control networks with respect to one-bit perturbation[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2020, 7(4): 1769-1777.
- [53] LI T, FENG J, WANG B. Reconstructibility of singular boolean control networks via automata approach[J]. *Neurocomputing*, 2020, 416: 19-27.
- [54] LI F, HO D W C. Observability of boolean networks with redundant channels[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 67(10): 1989-1993.
- [55] WEI Q, XIE C. Synchronization of mutual time-varying delay-coupled temporal boolean networks[J]. *Measurement and Control*, 2020, 53(7-8): 1504-1511.
- [56] ZHANG Y, ZHONG J, XIONG W, et al. Stabilization and oscillations design for a family of cyclic boolean networks via nodes connection[J]. *Neurocomputing*, 2019, 369: 61-68.
- [57] ZHANG Z P, SHU S L, XIA C Y. Networked opacity for finite state machine with bounded communication delays[J]. *Information Sci-*

- ences, 2021, 572: 57-66.
- [58] ZHANG Z P, XIA C Y, CHEN S Y, et al. Reachability analysis of networked finite state machine with communication losses: A switched perspective[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2020, 38(5): 845-853.
- [59] LU J Q, LI B, ZHONG J. A novel synthesis method for reliable feedback shift registers via Boolean networks[J]. *Science China Information Sciences*, 2021, 64(5): 152207.
- [60] ZHONG J H, Lin D D. Stability of nonlinear feedback shift registers[J]. *Science China Information Sciences*, 2016, 59(1): 1-12.
- [61] 程代展, 赵寅, 徐相如. 混合值逻辑及其应用[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2011, 46(10): 32-44.
- [62] 程代展, 齐洪胜, 刘挺, 等. 从矩阵半张量积到逻辑控制系统[J]. *中国科学: 数学*, 2016, 46(10): 1401-1424.
- [63] 程代展, 赵寅. 矩阵的半张量积: 一个便捷的新工具[J]. *科学通报*, 2011, 56(32): 2664-2674.
- [64] KONG X S, WANG S L, LI H T, et al. New developments in control design techniques of logical control networks[J]. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 2020, 21(2): 220-233.
- [65] 李海涛, 李雅璐, 王淑玲, 等. 有限值动态系统的分析与控制研究进展[J]. *山东师范大学学报(自然科学版)*, 2019, 34(4): 379-392.
- [66] NA J, HUANG Y, WU X, et al. Adaptive finite-time fuzzy control of nonlinear active suspension systems with input delay[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 50(6): 1-12.
- [67] WU Z G, DONG S L, SHI P, et al. Reliable filter design of takagi-sugeno fuzzy switched systems with imprecise modes[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 50(5): 1941-1951.
- [68] GEGOV A, GOBALAKRISHNAN N, SANDERS D. Filtration of non-monotonic rules for fuzzy rule base compression[J]. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 2014, 7(6): 382-400.
- [69] GEGOV A, ARABIKHAN F, SANDERS D. Rule base simplification in fuzzy systems by aggregation of inconsistent rules[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2015, 28(3): 1331-1343.
- [70] YAO L, ZHANG Y. Fault diagnosis and model predictive tolerant control for non-gaussian stochastic distribution control systems based on t-s fuzzy model[J]. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2017, 15(1): 2921-2929.
- [71] MENASRIA Y, BOURAS H, DEBBACHE N. An interval observer design for uncertain nonlinear systems based on the t-s fuzzy model[J]. *Archives of Control Sciences*, 2017, 27(3): 397-407.
- [72] LI Y, LIU L, FENG G. Adaptive finite-time controller design for t-s fuzzy systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(9): 2425-2436.
- [73] DONG J, WU Y, YANG G H. A new sensor fault isolation method for t-s fuzzy systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(9): 1-11.
- [74] XIE X, YUE D, ZHANG H, et al. Control synthesis of discrete-time t-s fuzzy systems: reducing the conservatism whilst alleviating the computational burden[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(9): 2480-2491.
- [75] LV H L, FENG J E, CHENG D Z, et al. Model construction of fuzzy relation matrices and application in intelligent environmental comfort systems[C].//*Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2012.
- [76] LV H L, CHENG D Z, FENG J E, et al. Construction and optimization of fuzzy relation matrices model based-on semi-tensor product[C].//*Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, 2012.
- [77] FENG J E, LV H L, CHENG D Z. Multiple fuzzy relation and its application to coupled fuzzy control[J]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(5): 1313-1324.
- [78] LV H L, WANG W, LIU X, et al. Modeling of multi-variable fuzzy systems by semi-tensor product[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 99: 1-10.
- [79] LV H L, WANG W L, LIU X P. Universal approximation of fuzzy relation models by semi-tensor product[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(11): 2972-2981.
- [80] GE A D. A new approach to controller design of stochastic fuzzy systems[C].//*IEEE International Conference on Information & Automation*, 2013.
- [81] RAJU G, ZHOU J, KISNER R A. Hierarchical fuzzy control[J]. *International Journal of Control*, 1991, 54(5): 1201-1216.
- [82] CHANG C W, TAO C W. A simplified implementation of hierarchical fuzzy systems[J]. *Soft Computing*, 2019, 23(12): 4471-4481.
- [83] MACHSOUDI H, KOSARI A, FAKOOR M, et al. A hierarchical fuzzy-optimal strategy for station-keeping maneuver of a geo satellite[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(3): 2212-2227.
- [84] SUN L, ZHENG Z. Saturated adaptive hierarchical fuzzy attitude-tracking control of rigid spacecraft with modeling and measurement uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 66(5): 3742-3751.
- [85] WU Z P, WU Y, HE S Y He, et al. Hierarchical fuzzy control based on spatial posture for a support-tracked type in-pipe robot[J]. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 2020, 44(1): 133-147.
- [86] ZHANG H, WANG J, LI W, et al. Tracking control using hierarchical fuzzy-regulated optimal approach for robotic manipulators[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part c-journal of Mechanical Engineering Science*, 2019, 233(2): 635-648.

- [87] WANG L X. Top-down for social organizations and bottom-up for election[J]. *Hierarchical Fuzzy Opinion Networks*, 2020, 28(7): 1265-1275.
- [88] ABDUL-WAHAB S A, CHARABI Y, OSMAN S, et al. Prediction of optimum sampling rates of air quality monitoring stations using hierarchical fuzzy logic control system[J]. *Atmospheric Pollution Research*, 2019, 10(6): 1931-1943.
- [89] FAYAZ M, PHAM Q B, LINH N T T, et al. A water supply pipeline risk analysis methodology based on diy and hierarchical fuzzy inference[J]. *Symmetry*, 2019, 12(1): 44-49.
- [90] MA Y L, LI Z X, MALEKIAN R, et al. Hierarchical fuzzy logic-based variable structure control for vehicles platooning[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2019, 20(4): 1329-1340.
- [91] WANG L, ZHANG H. An adaptive fuzzy hierarchical control for maintaining solar greenhouse temperature[J]. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2018, 155: 251-256.
- [92] WANG L X. Analysis and design of hierarchical fuzzy systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, 7(5): 617-624.
- [93] LEE M L, CHUNG H Y, YU F M. Modeling of hierarchical fuzzy systems[J]. *Fuzzy Sets & Systems*, 2003, 138(2): 343-361.
- [94] AJA-FERNÁNDEZ, S, ALBEROLA-LÓPEZ C. Matrix modeling of hierarchical fuzzy systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(3): 585-599.
- [95] GE A D, WANG Y, LIU Z, et al. Hierarchical fuzzy control of multivariable systems via semi-tensor product method[C].// *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*, 2014.
- [96] YANG X P. Resolution of bipolar fuzzy relation equations with max-ukasiewicz composition[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2020, 397: 41-60.
- [97] LIN H, YANG X. Dichotomy algorithm for solving weighted min-max programming problem with addition-min fuzzy relation inequalities constraint[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2020, 146: 106537.
- [98] PEDRYCZ W. An identification algorithm in fuzzy relational systems[J]. *Fuzzy Sets & Systems*, 1984, 13(2): 153-167.
- [99] LI J X, HU G. An algorithm for fuzzy relation equations with max-product composition[J]. *Advances in Fuzzy Sets and Systems*, 2009, 4(1): 1-21.
- [100] MIYAGI H, FUKUMURA H, KAMIYA K, et al. Algorithm for solution of fuzzy relation equations[C].// *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. Computational Cybernetics and Simulation*, 1997.
- [101] GUO F F, XIA Z Q. An algorithm for solving optimization problems with one linear objective function and finitely many constraints of fuzzy relation inequalities[J]. *Fuzzy Optimization & Decision Making*, 2006, 5(1): 33-47.
- [102] GUO F F, PANG L P, MENG D, et al. An algorithm for solving optimization problems with fuzzy relational inequality constraints[J]. *Information Sciences*, 2013, 252: 20-31.
- [103] YANG, S J. Some results of the fuzzy relation inequalities with addition-min composition[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2017, 26(1): 239-245.
- [104] CHENG D Z, FENG J E, LV H L. Solving fuzzy relational equations via semi-tensor product[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(2): 390-396.
- [105] FAN H B, FENG J E, ZHANG L, et al. A new algorithm for decomposition problem of binary fuzzy relations[C].// *Asian Control Conference*, 2013.
- [106] FAN H B, FENG J E, MENG M, et al. General decomposition of fuzzy relations: semi-tensor product approach[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2018, 384: 75-90.
- [107] 闫永义, 陈增强. 基于矩阵半张量积的单元 Type-2 模糊关系方程求解[C].// *中国控制会议论文集(C卷)*, 2013.
- [108] FAN H B, FENG J E, ZHANG L. Solving a class of fuzzy relation inequalities via semi-tensor product[C].// *Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2012.
- [109] LI H T, WANG Y Z. A matrix approach to latticized linear programming with fuzzy-relation inequality constraints[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013, 21(4): 781-788.
- [110] WANG S L, LI H T. Column stacking approach to resolution of systems of fuzzy relational inequalities[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(6): 3314-3332.
- [111] WANG S L, LI H T. Resolution of fuzzy relational inequalities with boolean semi-tensor product composition[J]. *Mathematics*, 2021, 9(9): 937.
- [112] GE A D, WANG Y Z, WEI A R. Controller design of multi-variables fuzzy control systems[C].// *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, 2012.
- [113] KALIBATIEN D, MILIAUSKAIT J. A hybrid systematic review approach on complexity issues in data-driven fuzzy inference systems development[J]. *Informatica*, 2021, 32(1): 85-118.
- [114] CARTAGENA O, PARRA S, MUÑOZ-CARPINTERO D, et al. Review on fuzzy and neural prediction interval modelling for nonlinear dynamical systems[J]. *IEEE Access*, 2021(9): 23357-23384.
- [115] TAVOOSI J, MOHAMMADZADEH A, JERMSITTIPARSERT K. A review on type-2 fuzzy neural networks for system identification [J]. *Soft Computing*, 2021, 25(10): 7197-7212.