

基于输出反馈的时滞布尔网络的输出跟踪

张安国¹,李露露,黄 迟²,卢剑权³

(1.合肥工业大学 数学学院,安徽 合肥 230009;2.西南财经大学 经济信息工程学院,
四川 成都 610074;3.东南大学 数学学院,江苏 南京 210096)

摘 要 研究了带有时滞的布尔控制网络的输出跟踪问题。首先,利用矩阵半张量积,将时滞布尔控制网络的逻辑形式转化为代数形式。其次,通过对代数状态空间进行研究,根据参考输出信号求得系统的最大控制不变子集,并且基于最大控制不变子集得到了时滞布尔控制网络输出跟踪问题可解的充分必要条件。随后,设计了一个有效的算法来求解控制器。最后,通过举例验证了理论结果的正确性。

关键词 矩阵半张量积,布尔网络,输出跟踪,输出反馈控制

中图分类号 O233

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



Output Tracking of Delayed Boolean Control Networks via Output Feedback Control

ZHANG Anguo¹,LI Lulu¹,HUANG Chi²,LU Jianquan³

(1. Hefei University of Technology, School of Mathematics, Hefei 230009, China; 2. Southwest University of Finance and Economics, School of Economic Information Engineering, Chengdu 610074, China;
3. Southeast University, School of Mathematics, Nanjing 210096, China)

Abstract This paper mainly focuses on the output tracking problem of Boolean control networks with time delays. Firstly, by the semi-tensor product of matrices, the delayed Boolean control networks (DBCNs) are converted into the algebraic form. Next, by studying the algebraic form, the largest control invariant subset of the system can be obtained based on the reference output signal. Based on the largest control invariant subset, the necessary and sufficient condition for the output tracking problem to be solvable is obtained. Next, an effective algorithm is provided to design the controller. Finally, an example is given to illustrate the correctness of the theoretical results.

Key words semi-tensor product of matrices, Boolean networks, output tracking, output feedback control

0 引言

近年来,随着系统生物学的发展,对基因调控网络的研究吸引了广泛的关注。到目前为止,相关领域的学者们已经提出了大量的数学模型来研究基因调控网络,例如常微分方程,贝叶斯网络,布尔网络等等。布

收稿日期:2021-04-02

基金项目:国家自然科学基金项目(61503115)资助

通讯作者:李露露,男,博士,副教授,研究方向:复杂网络动力学分析与控制、逻辑网络分析,E-mail:lululima@hfut.edu.cn。

尔网络是由 Kauffman 教授于 1969 年提出来的^[1],它对于描述、分析和模拟基因调控网络具有重要作用。布尔网络是由一些离散时间变量构成的,并且每个变量只有两种状态(真和假),每个变量通过一个逻辑函数更新自己的状态。由于布尔网络结构简单,对于布尔网络的研究在近几年受到了广大学者的密切关注。最近,程代展教授提出了一种新的数学方法——矩阵半张量积,该方法对于布尔网络的研究具有重要促进作用^[2-5]。为了进一步研究布尔网络的性质,网络中考虑了控制输入,于是产生了布尔控制网络。基于矩阵半张量积,许多有关布尔网络的问题都已经得到了研究,例如镇定性^[6,7],干扰解耦^[8,9],优化问题^[10],同步^[11,12]以及输出跟踪问题^[13]等等。

延时在现实中很常见。例如,人们发现几种外部环境条件可导致细菌生长的时间延迟。因此,在布尔网络模型中考虑时滞是合理的。对于时滞布尔控制网络的研究已经得到了许多结果。文献[14]和[15]分别研究了时滞布尔控制网络的镇定性和能控性问题;在文献[16]中,作者通过设计状态反馈控制研究了时滞布尔控制网络的同步问题;文献[17]研究了时滞布尔控制网络的输出跟踪问题,并且给出了输出跟踪问题可解的充分必要条件;文献[18]通过设计牵引控制实现了时滞布尔控制网络的稳定性;文献[19]讨论了带有随机时滞的布尔控制网络的稳定性和镇定性问题。

在大量实际系统中,需要根据控制输入将系统的输出驱动到某个理想状态。由于测量技术的限制,不可能直接测量所有状态。然而,可测量的输出可以反映状态。于是,研究布尔网络的输出跟踪问题是有重要现实意义的。文献[20]研究了布尔网络的输出跟踪问题;文献[21]讨论了带有脉冲效应的布尔网络的输出跟踪问题;在文献[13]中,通过设计状态反馈控制,作者讨论了布尔网络的输出跟踪给定参考输出信号的问题;在文献[22]中,陈秉权等作者进一步研究了概率布尔控制网络的渐近输出跟踪问题。

关于输出跟踪问题的求解,最常用的控制为状态反馈控制^[17]。但是采用状态反馈控制器在求解输出跟踪问题时,一个重要的弊端就是系统在实现输出跟踪之后控制序列可能还会随着状态的更新而发生改变,这将导致极大的资源消耗。一个自然的问题是:能否设计一种控制器使得系统在实现输出跟踪之后控制序列保持不变呢?考虑到时滞在现实生活中的广泛存在性,本文通过设计输出反馈控制器来研究时滞布尔控制网络的输出跟踪问题。

本文的难点主要包含两点:(1)由于本文考虑的是使用输出反馈求解输出跟踪问题,如何将输出跟踪问题转化为集合镇定问题是本文的第一个难点。(2)在求解输出反馈增益矩阵时,控制序列需要满足什么要求?这个问题是本文的第二个难点。

本文的主要贡献包括两点:(1)本文通过设计输出反馈控制器研究了时滞布尔控制网络的输出跟踪问题,并且给出了时滞布尔控制网络输出跟踪问题可以通过输出反馈控制求解的充分必要条件。(2)针对第二个难点,本文提供了一个有效算法求解输出反馈增益矩阵。

1 预备知识

1.1 常用记号

$$(1) D = \{0, 1\}, D^n = \underbrace{D \times D \times \cdots \times D}_n.$$

(2) \mathbf{N}^+ :正整数集; \emptyset :空集。

(3) $col_i(\mathbf{M})$ ($row_i(\mathbf{M})$):矩阵 \mathbf{M} 的第 i 列(行)。

(4) \mathbf{I}_n : n 维单位矩阵。

(5) $\Delta_n = \{\delta_n^1, \delta_n^2, \dots, \delta_n^n\}$, 其中 δ_n^i 表示单位矩阵的第 i 列。

(6) 一个 $n \times p$ 维的矩阵 \mathbf{M} , 如果它的每一列都属于集合 Δ_n , 则称其为一个逻辑矩阵。所有的 $n \times p$ 维逻辑矩阵构成的集合记作 $L_{n \times p}$ 。

(7) $[S]$:集合 S 中所有元素的布尔和。

(8) $|M|$:集合 M 的基数。

$$(9) \mathbf{0}_k = \underbrace{\{00 \cdots 0\}}_k^T.$$

(10) $[a, b]$: a 与 b 之间的所有的整数。

1.2 矩阵半张量积的定义和性质

定义 1^[2] 矩阵 $\mathbf{M} \in L_{p \times q}$, $\mathbf{N} \in L_{r \times s}$, l 为 q 和 r 的最小公倍数, \mathbf{M} 和 \mathbf{N} 之间的半张量积定义为

$$\mathbf{M} \ltimes \mathbf{N} = (\mathbf{M} \otimes I_{l/q})(\mathbf{N} \otimes I_{l/r}),$$

其中 \otimes 为 Kronecker 积。(在不引起混淆的情况下,我们将半张量积的符号 \ltimes 省略。)

关于布尔网络的一些性质在^[2-4]中有详细阐述了,因此在本文中我们不再一一列举。

下面介绍一个引理,给出如何将布尔网络逻辑形式转换成代数空间表示形式。

引理 1^[3] 假设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个关于变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的逻辑函数,则可以找到唯一的矩阵 $\mathbf{M}_f \in L_{2 \times 2^n}$, 称为函数 f 的结构矩阵,使得

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{M}_f x_1 x_2 \cdots x_n。$$

1.3 模型描述

本文考虑如下系统

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(u_1(t), \dots, u_m(t), x_1(t), \dots, x_n(t), \dots, x_1(t-\tau), \dots, x_n(t-\tau)), \\ x_2(t+1) = f_2(u_1(t), \dots, u_m(t), x_1(t), \dots, x_n(t), \dots, x_1(t-\tau), \dots, x_n(t-\tau)), \\ \dots \dots \\ x_n(t+1) = f_n(u_1(t), \dots, u_m(t), x_1(t), \dots, x_n(t), \dots, x_1(t-\tau), \dots, x_n(t-\tau)), \\ y_j(t) = h_j(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), j = 1, 2, \dots, p, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in D^n$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in D^m$, $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)) \in D^p$ 分别表示系统(1)在 t 时刻的状态、控制输入和输出; $f_i: D^{m+n(\tau+1)} \rightarrow D$, $i = 1, 2, \dots, n$ 和 $h_j: D^n \rightarrow D$, $j = 1, 2, \dots, p$ 表示系统(1)的逻辑函数。

假设 $x(t) = \ltimes_{i=1}^n x_i(t)$, $u(t) = \ltimes_{i=1}^m u_i(t)$, $y(t) = \ltimes_{i=1}^p y_i(t)$, 那么系统(1)可以表示为

$$\begin{cases} x(t+1) = \mathbf{F}u(t)x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau), \\ y(t) = \mathbf{H}x(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{F} \in L_{2^n \times 2^{m+n(\tau+1)}}$ 和 $\mathbf{H} \in L_{2^p \times 2^n}$ 称为系统(2)的结构矩阵。为了方便,本文用 $x(t, x(0), \dots, x(-\tau))$ 表示初始状态为 $x(0), \dots, x(-\tau)$ 时系统在 t 时刻的状态;同理, $y(t, x(0), \dots, x(-\tau))$ 表示初始状态为 $x(0), \dots, x(-\tau)$ 时系统在 t 时刻的输出。

由于本文考虑的是带有时滞的布尔网络的输出跟踪问题,下面介绍有关输出跟踪问题的几个定义。

定义 2 考虑系统(1),假设其参考输出信号为 y^* , 称系统(1)的输出跟踪问题是可解的,如果对于任意的初始状态 $x(0), x(-1), \dots, x(-\tau)$, 都可找到一个控制序列 $u(0), u(1), u(2), \dots$ 和一个正整数 k 使得

$$y(t, x(0), \dots, x(-\tau)) = y^*, \quad \forall t \geq k \quad (3)$$

定义 3 集合 $S^* \subseteq \Delta_{2^n(\tau+1)}$ 称为系统(1)(或(2))的控制不变子集,如果对于任意的状态 $x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau) \in S^*$, 都存在一个控制 $u(t)$ 使得 $x(t+1)x(t)\cdots x(t-\tau+1) \in S^*$ 。

本文将考虑用输出反馈控制求解带有时滞的布尔控制网络的输出跟踪问题。考虑到时滞对系统的影响,假设设计的控制器的逻辑形式为

$$\begin{cases} u_1(t) = g_1(y_1(t), \dots, y_p(t), \dots, y_1(t-\tau), \dots, y_p(t-\tau)), \\ u_2(t) = g_2(y_1(t), \dots, y_p(t), \dots, y_1(t-\tau), \dots, y_p(t-\tau)), \\ \dots \dots \\ u_m(t) = g_m(y_1(t), \dots, y_p(t), \dots, y_1(t-\tau), \dots, y_p(t-\tau)), \end{cases} \quad (4)$$

其中 $g_i: D^{p(\tau+1)} \rightarrow D$, $i = 1, 2, \dots, m$ 为逻辑函数。

类似于系统(1),设 $u(t) = \ltimes_{i=1}^m u_i(t)$, $y(t) = \ltimes_{i=1}^p y_i(t)$, 式(4)可以改写为

$$u(t) = \mathbf{G}y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau), \quad (5)$$

其中 $\mathbf{G} \in L_{2^m \times 2^{p(\tau+1)}}$ 称为输出反馈增益矩阵。

2 主要内容

在本文中,假设参考输出信号为 $y^* = \delta_{2^p}^y$ 。根据表达式 $y(t) = \mathbf{H}x(t)$, 可以构造集合

$$\Pi(\alpha) = \{i : \delta_{2^p}^\alpha = \mathbf{H}\delta_{2^m}^i\}. \quad (6)$$

显然,集合 $\Pi(\alpha)$ 包含了所有可以产生参考输出信号的状态。不妨假设集合 $\Pi(\alpha) = \{\tau w_1, \tau w_2, \dots, \tau w_c\}$ 。

本文的目的是求解输出反馈增益矩阵 \mathbf{G} ,使得系统在输出反馈控制器 $u(t) = \mathbf{G}y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau)$ 的作用下,能够实现输出跟踪。若 $\mathbf{G} = \delta_{2^m} [\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_{2^p(\tau+1)}]$,当系统实现输出跟踪时,通过表达式 $u(t) = \mathbf{G}y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau)$,可以求得 $u^* = \mathbf{G}\delta_{2^p}^\alpha \cdots \delta_{2^p}^\alpha = \delta_{2^m}^{\nu\beta}$,其中 $\beta = (\alpha - 1)(2^{\tau p} + \cdots + 2^p) + \alpha$ 。

在代数表达式(2)中,将矩阵 \mathbf{F} 分成相等的 2^m 块,即 $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \cdots \mathbf{F}_{2^m}]$,其中 $\mathbf{F}_i \in L_{2^n \times 2^n(\tau+1)}$, $i \in \{1, 2, \dots, 2^m\}$ 。那么,当控制为 $u^* = \delta_{2^m}^{\nu\beta}$, $x(t+1) = \mathbf{F}u(t)x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau) = \mathbf{F}_{\nu\beta}x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau)$ 。

下面考虑 $y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau)$ 与 $x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau)$ 之间的关系。通过代数表达式 $y(t) = \mathbf{H}x(t)$,可以得到

$$\begin{aligned} y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau) &= \mathbf{H}x(t)\mathbf{H}x(t-1)\cdots\mathbf{H}x(t-\tau) \\ &= \mathbf{H}(I_{2^n} \otimes \mathbf{H})x(t)x(t-1)\cdots\mathbf{H}x(t-\tau) \\ &= \cdots \cdots \\ &= \mathbf{H}(I_{2^n} \otimes \mathbf{H})\cdots(I_{2^{n\tau}} \otimes \mathbf{H})x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau) \\ &= \bar{\mathbf{H}}x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(I_{2^n} \otimes \mathbf{H})\cdots(I_{2^{n\tau}} \otimes \mathbf{H}) \in L_{2^{p(\tau+1)} \times 2^{n(\tau+1)}}$ 。

于是,系统(2)可以改写为

$$\begin{cases} x(t+1) = \mathbf{F}u(t)x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau), \\ y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau) = \bar{\mathbf{H}}x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau). \end{cases} \quad (8)$$

根据以上讨论,可以用如下命题 1 来描述系统(2)与系统(8)之间的关系。

命题 1 考虑系统(2)和系统(8)的输出跟踪问题,系统(2)在控制(5)的作用下可追踪参考输出信号 $\delta_{2^p}^\alpha$ 当且仅当系统(8)在控制(5)作用下可追踪参考输出信号 $\delta_{2^{p(\tau+1)}}^\beta$,其中 $\beta = (\alpha - 1)(2^{\tau p} + \cdots + 2^p) + \alpha$ 。

根据式(5),控制器 $u(t) = \mathbf{G}y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau)$ 可以改写为

$$u(t) = \mathbf{G}y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau) = \bar{\mathbf{G}}\mathbf{H}x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau). \quad (9)$$

根据式(1)和式(9),我们有

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \mathbf{F}u(t)x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau) \\ &= \mathbf{F}\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{H}}x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau)x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau) \\ &= \mathbf{F}\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{H}}\Phi_{2^n(\tau+1)}x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau) \\ &= \bar{\mathbf{F}}x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau), \end{aligned}$$

这里 $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{H}}\Phi_{2^n(\tau+1)} \in L_{2^n \times 2^n(\tau+1)}$, $\Phi_{2^n(\tau+1)} = \prod_{i=1}^{2^n(\tau+1)} I_{2^{i-1}} \otimes [(I_2 \otimes W_{[2, 2^{2^n(\tau+1)-i}]})\mathbf{M}_r]$, $\mathbf{M}_r = \delta_4[1, 4]$ 称为降阶矩阵。

另一方面,令 $z(t) = x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau)$,那么 $z(t+1)$ 与 $z(t)$ 之间的关系可表示为

$$\begin{aligned} z(t+1) &= x(t+1)x(t)\cdots x(t-\tau+1) \\ &= \mathbf{F}u(t)x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau+1)x(t-\tau)x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau+1) \\ &= \mathbf{F}u(t)x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau+1)W_{[2^{n\tau}, 2^n]}x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau+1)x(t-\tau) \\ &= \mathbf{F}(I_{2^{n\tau+m}} \otimes W_{[2^{n\tau}, 2^n]})u(t)x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau+1)x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau+1)x(t-\tau) \\ &= \mathbf{F}(I_{2^{n\tau+m}} \otimes W_{[2^{n\tau}, 2^n]})u(t)\Phi_{2^{n\tau}}x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau+1)x(t-\tau) \\ &= \mathbf{F}(I_{2^{n\tau+m}} \otimes W_{[2^{n\tau}, 2^n]})(I_{2^m} \otimes \Phi_{2^{n\tau}})u(t)z(t) \\ &= \mathbf{Q}u(t)z(t), \end{aligned}$$

这里 $\mathbf{Q} = \mathbf{F}(I_{2^{n\tau+m}} \otimes W_{[2^{n\tau}, 2^n]})(I_{2^m} \otimes \Phi_{2^{n\tau}}) \in L_{2^n(\tau+1) \times 2^{m+n(\tau+1)}}$ 。

当 $u(t) = \mathbf{G}y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau)$ 时,可以得到 $z(t+1) = \bar{\mathbf{F}}(I_{2^{n\tau}} \otimes W_{[2^{n\tau}, 2^n]})\Phi_{2^{n\tau}}z(t) = \bar{\mathbf{Q}}z(t)$,这

里 $\bar{Q} = \bar{F}(I_{2n\tau} \otimes W_{[2n\tau, 2n]})\Phi_{2n\tau}$ 。

特别地,当 $u(t) = \mathbf{G}\delta_{2p}^\alpha \delta_{2p}^\alpha \cdots \delta_{2p}^\alpha = \delta_{2m}^{\nu\beta}$ 时, $z(t+1) = \mathbf{F}_{\nu\beta}(I_{2n\tau} \otimes W_{[2n\tau, 2n]})\Phi_{2n\tau} z(t) = \bar{Q}z(t)$, 其中 $\bar{Q} = \mathbf{F}_{\nu\beta}(I_{2n\tau} \otimes W_{[2n\tau, 2n]})\Phi_{2n\tau}$ 。

由定义 2 可知,如果系统能够实现输出跟踪,须存在一个时刻使得系统在接下来每一时刻的状态也在集合 $\Pi(\alpha)$ 中。为了实现这一目标,下面介绍集合 $\Pi(\alpha)$ 在系统(1)中的控制不变子集。

通过集合 $\Pi(\alpha)$,构造一个新的集合 $\Theta = \{\delta_{2n}^{\omega_1} \cdots \delta_{2n}^{\omega_{\tau+1}}; \forall \omega_1 \in \Pi(\alpha), \dots, \forall \omega_{\tau+1} \in \Pi(\alpha)\}$ 。

下面通过集合 Θ 和控制 $u^* = \delta_{2p}^{\nu\beta}$,求解系统的最大控制不变子集。

通过算法 1 得到了系统的最大控制不变子集 S^* ,并且集合 S^* 中的每个状态都可以产生参考输出信号。下面将根据集合 S^* 给出系统输出跟踪问题在输出反馈控制器下可解的充分必要条件。

定理 1 考虑系统(2)以及参考输出信号 $y^* = \delta_{2p}^\alpha$ 。在输出反馈控制 $u(t) = \mathbf{G}y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau)$ 的作用下,系统的参考输出跟踪问题可解当且仅当可以找到一个常数 k 使得对于任意的初始状态 $z(0)$ ($z(0) = x(0)x(-1)\cdots x(-\tau)$),都有

$$\bar{Q}^k z(0) \cap \lceil S^* \rceil \neq 0_{2n}, \quad (10)$$

这里, $\lceil S^* \rceil$ 表示集合 S^* 中所有元素的布尔和。

关于交运算(\cap),其定义如下,假设 $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij})$,定义 $X \cap Y = (x_{ij} \cap y_{ij})$,其中 $x_{ij} \cap y_{ij} = \min\{x_{ij}, y_{ij}\}$, $\min\{x_{ij}, y_{ij}\}$ 表示元素 x_{ij} 和 y_{ij} 的最小值。

证明(充分性) 如果在输出反馈控制 $u(t) = \mathbf{G}y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau)$ 的作用下,对于任意给定的初始状态 $z(0)$,都可以找到一个常数 $k_{z(0)}$,使得 $\bar{Q}^{k_{z(0)}} z(0) \cap \lceil S^* \rceil \neq 0_{2n}$ 。则对于初始状态 $z(0)$,存在一个控制序列 $u(0), u(1), \dots, u(k_{z(0)})$,使得 $z(k_{z(0)}, u(0), \dots, u(k_{z(0)}), z(0)) \in S^*$ 。(特别地,如果 $z(0) \in S^*$,那么对任意的 $k_{z(0)}$,取 $u(t) = \delta_{2m}^{\nu\beta}$ ($t=1, 2, \dots, k_{z(0)}$)即可)。对于任意的 $z(k_{z(0)}, u(0), \dots, u(k_{z(0)}), z(0)) \in S^*$,因为 S^* 为控制不变子集,通过算法 1 可知在控制 $u(t) = \delta_{2m}^{\nu\beta}$ 的作用下,有 $z(t, z(0)) \in S^*, \forall t \geq k_{z(0)}$ 。取 $k = \max\{k_{z(0)}; z(0) \in \Delta_{2n(\tau+1)}\}$,于是对于任意的初始状态 $z(0)$,都有 $z(k, z(0)) \in S^*$ 。另一方面,结合集合 S^* 与集合 $\Pi(\alpha)$ 之间的关系,可知对于任意的初始状态 $z(0)$,系统都可以追踪参考输出信号。因此,系统的输出跟踪问题可解。

证明(必要性) 用反证法证明必要性。假设对于初始状态 $\bar{z}(0)$,对于任意的常数 k ,等式(10)都不成立。因为 S^* 是由能够产生参考输出信号的状态所构成的,如果 $\bar{Q}^k \bar{z}(0) \cap \lceil S^* \rceil = 0_{2n}$,则不能找到一个控制序列使得状态 $\bar{z}(0)$ 在有限步能够到达集合 S^* 中,即初始状态 $\bar{z}(0)$ 不能跟踪参考输出信号。因此,系统(1)的参考输出跟踪问题不可解。

接下来,本文将根据输出跟踪问题可解的充分必要条件来设计输出反馈控制器。由等式(7)可知, $y(t)y(t-1)\cdots y(t-\tau) = \bar{H}x(t)x(t-1)\cdots x(t-\tau)$,即一个状态可以产生一个输出信号。但是,需要指出同一个输出信号可能对应多个状态。为了解决这一问题构造下列集合

$$\Pi(\varphi) = \{i : \varphi = \bar{H} S_{2n(\tau+1)}^i\}. \quad (11)$$

从(11)中可以看出, $\Pi(\varphi_i) \neq \Pi(\varphi_j), \forall \varphi_i \neq \varphi_j$,并且 $\bigcup_{\varphi_i=1}^{2p(\tau+1)} \Pi(\varphi_i) = \Delta_{2n(\tau+1)}$ 。

假设参考输出跟踪问题可解,对于给定的初始状态 $z(0)$,都存在一个状态反馈控制 $u(z(0))$,使得 $z(0)$ 在控制 $u(z(0))$ 作用下能够被牵引到集合 S^* 中。因为满足这一要求的控制可能不是唯一的,用

算法 1 根据参考输出信号求解系统的最大控制不变子集

输入 集合 Θ 和控制 $u^* = \delta_{2p}^{\nu\beta}, S_k = \emptyset, k=0, S_0 = \Theta$

输出 S^*

While $|S_k| > 0$

For any $\delta_{2n}^{\omega_1} \cdots \delta_{2n}^{\omega_{\tau+1}} \in S_k$

If $\bar{Q}\delta_{2n}^{\omega_1} \cdots \delta_{2n}^{\omega_{\tau+1}} \notin \Theta$

Then $S_{k+1} = \Theta \setminus \{\delta_{2n}^{\omega_1} \cdots \delta_{2n}^{\omega_{\tau+1}}\}$

$k = k + 1$

End if

End for

If $S_{k+1} = S_k$

Return $S^* = S_k$

End while

$U(z(0))$ 表示所有能够将 $z(0)$ 牵引到集合 S^* 中的状态反馈控制构成的集合, 即 $u(z(0)) \in U(z(0))$ 。

关于 $U(z(0))$ 的求解过程如下。

首先我们通过集合 S^* 构造集合 $R_1(S^*), R_2(S^*), \dots$,

$$R_1(S^*) = \{a: Qua \in S^*\}, R_k(S^*) = \{a: Qua \in R_{k-1}(S^*)\}, \forall k \geq 2.$$

如果输出跟踪问题可解, 那么对于任意的状态 a 都可以找到唯一的一个 $k^* (k^* \geq 0)$ 使得 $a \in R_{k^*}(S^*)$, 即存在一个控制 u 使得 $Qua = b \in R_{k^*-1}(S^*)$ (定义 $R_0(S^*) = S^*$)。因为满足条件的状态 b 可能不是唯一的, 对于每一个满足条件的状态 b , 都有一个控制输入 u 与之对应。于是我们构造集合

$$U(a) = \{u: Qua \in R_{k^*-1}(S^*)\}.$$

在这里, $U(a)$ 表示所有的能够将状态 a 牵引到集合 S^* 的控制输入构成的集合。

对于任意的 $\delta_{2^p(\tau+1)}^i$, 本文将通过如下方式构造其输出反馈控制输入

$$u_\varphi = \begin{cases} \bigcap_{i \in \Pi(\varphi)} U(\delta_{2^p(\tau+1)}^i), & \Pi(\varphi) \neq \emptyset, \\ \{\delta_{2^m}^1, \delta_{2^m}^2, \dots, \delta_{2^m}^{2^m}\}, & \Pi(\varphi) = \emptyset. \end{cases} \quad (12)$$

下面通过定理 2 给出参考输出跟踪问题能够用输出反馈控制求解的充分必要条件。

定理 2 考虑系统(1), 参考输出跟踪问题可以通过输出反馈控制(5)求解当且仅当

$$u_\varphi \neq \emptyset, \forall \varphi \in \{1, \dots, 2^{p(\tau+1)}\}.$$

证明(充分性) 对于任意的 φ , 考虑 $\Pi(\varphi)$ 。当 $\Pi(\varphi) = \emptyset$ 时, $u_\varphi \neq \emptyset$ 显然成立。下面考虑 $\Pi(\varphi) \neq \emptyset$ 的情形。假设 $\Pi(\varphi) = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ 。因为 $u_\varphi \neq \emptyset$, 假设 $u_\varphi = u^*$ 。通过 u_φ 的构造可知集合 $\Pi(\varphi)$ 中的所有状态都可以在控制 u^* 的作用下牵引到集合 S^* 中。由于输出 φ 的任意性, 于是系统的参考输出跟踪问题可解。

证明(必要性) 下面通过反证法证明必要性。通过 u_φ 的构造, 只需要考虑 $\Pi(\varphi) \neq \emptyset$ 的情形。当 $\Pi(\varphi) \neq \emptyset$ 的时候, 如果 $u_\varphi = \emptyset$, 则可以找到两个状态 $\overline{z(0)}$ 和 $\overline{\overline{z(0)}}$, 其中 $\overline{z(0)}$ 和 $\overline{\overline{z(0)}}$ 满足条件

$$\begin{cases} S_{2^p(\tau+1)}^{\varphi} = \overline{H} \overline{z(0)}, \\ S_{2^p(\tau+1)}^{\varphi} = \overline{H} \overline{\overline{z(0)}}. \end{cases} \quad \text{假设存在一个控制 } u^* (u^* \in U(\overline{z(0)})), \text{ 那么显然状态 } \overline{\overline{z(0)}} \text{ 可以在控制 } u^* \text{ 的作用下}$$

牵引到集合 S^* 。但是因为 $u_\varphi = \emptyset$, 所以 $u^* \notin U(\overline{\overline{z(0)}})$ 。通过 $U(\overline{\overline{z(0)}})$ 的定义, 可知状态 $\overline{\overline{z(0)}}$ 不能牵引到集合 S^* 中。特别地, 若 $|\Pi(\varphi)| = 1$, 假设 $\Pi(\varphi) = \{\omega\}$ 。因为 $u_\varphi = \emptyset$, 状态 ω 在任意的控制下都不能被牵引到集合 S^* 中。因此, 参考输出跟踪问题不可解, 即假设不成立。

综合以上讨论, 我们可以设计如下的算法 2 来求解输出反馈增益矩阵。

算法 2

- (1) 首先计算 $\Pi(\varphi) (\varphi \in [1, 2^{p(\tau+1)}])$;
- (2) 通过集合 S^* , 以及代数表达式(2)计算 $U(z(0)) (z(0) \in \Delta_{2^p(\tau+1)})$;
- (3) 判断 $\Pi(\varphi)$ 是否为空集。若 $\Pi(\varphi) = \emptyset$, 取 $u_\varphi = \delta_{2^m}^i (\delta_{2^m}^i \in \Delta_{2^m})$; 若 $\Pi(\varphi) \neq \emptyset$, 则 $u_\varphi = \bigcap_{i \in \Pi(\varphi)} U(\delta_{2^p(\tau+1)}^i)$;
- (4) 当 $\Pi(\varphi) \neq \emptyset$, 判断 u_φ 是否为空集。若为空集, 则输出跟踪问题不能用输出反馈控制求解。否则输出反馈控制增益矩阵可设计为

$$G = \delta_{2^m} [u_1, u_2, \dots, u_{2^{p(\tau+1)}}].$$

注 1 通过分析(12)与定理 2 可知, 如果系统可以用输出反馈进行求解, 那么它一定也可以通过状态反馈求解。但是如果系统可以通过状态反馈进行求解, 它不一定能够通过输出反馈进行求解。

注 2 本文主要通过设计输出反馈控制器研究了时滞布尔网络的输出跟踪问题。在文献[13]和[17]中, 作者都考虑了系统追踪固定参考输出信号的问题。与文献[13]和[17]相比, 本文的主要贡献在于设计了输出反馈控制器而不是状态反馈控制器。另外, 因为考虑的都是系统追踪固定参考输出信号的问题, 从(5)中可以看出, 本文在使用输出反馈控制器来研究系统的输出跟踪问题时, 控制输入在一定时间之后将保持不

变,这将极大的减少了由于切换控制输入而导致的资源消耗。文献[20]也是通过控制不变子集求解输出跟踪问题。与文献[20]相比,在本文中,控制不变子集中每个状态所对应的控制输入都是相同的。

注 3 由于本文考虑的是带有时滞的布尔网络的输出跟踪问题,这将导致在计算的过程中计算复杂度会增加。在求解控制不变子集的时候,时滞的影响将会导致求解过程更加困难。在算法 1 中,我们通过集合 Θ 求解了系统的控制不变子集。用 a 来表示集合 $\Pi(y^*)$ 中元素的个数,那么集合 Θ 中元素的个数为 $a^{\tau+1}$ 。另一方面,当 u^* 固定时,第三行执行的次数为 $O(a^{\tau+1})$ 。事实上, u^* 是未知的,并且 u^* 可能的个数为 2^m ,所以算法 1 的复杂度不超过 $O(2^m \times a^{\tau+1})$ 。对于算法 2,在第一步中,因为输出状态有 $2^{p(\tau+1)}$ 个,所以第一步的复杂度为 $O(2^{p(\tau+1)})$ 。在第二步中,因为有 $2^{n(\tau+1)}$ 个状态,需要对每个状态分别求可能的控制输入,所以第二步总的复杂度为 $O(2^{n(\tau+1)} \times 2^m)$ 。第三步和第四步中,对每个输出状态求解反馈控制,其时间复杂度为 $O(2^{p(\tau+1)})$ 。因此,算法二的复杂度为 $O(2 \times 2^{p(\tau+1)} + 2^{n(\tau+1)} \times 2^m)$ 。

注 4 通过对本文主要定理和算法的分析可以看出:节点的数量,时滞的大小,输出状态的维数和控制输入的维数都会对系统的复杂度产生影响。本文提出的算法一般而言适合研究节点数和时滞都比较小的情况(通常节点数要小于 10)。

3 算例分析

考虑如下时滞布尔控制网络的输出跟踪问题

$$\begin{cases} x_1(t+1) = u(t) \wedge \{\neg x_1(t-1) \vee x_2(t)\}, \\ x_2(t+1) = u(t) \wedge \{\neg x_1(t) \wedge \neg x_2(t)\}, \\ y_1(t) = x_1(t), \\ y_2(t) = x_2(t), \end{cases}$$

这里 x_1, x_2, y_1, y_2 和 u 分别表示 mRNA, 细胞内乳糖, 3 号活性胱天蛋白酶(C3a), 8 号活性胱天蛋白酶(C8a), 以及 α 肿瘤坏死因子(TNF)的浓度水平。

设 $x(t) = x_1(t)x_2(t)$, $y(t) = y_1(t)y_2(t)$, $z(t) = x(t)x(t-1)$, 那么上述系统可以改写为

$$\begin{cases} z(t+1) = Qu(t)z(t), \\ y(t)y(t-1) = \bar{H}z(t), \end{cases}$$

这里 $Q = \delta_{16}[4\ 8\ 11\ 16\ 3\ 8\ 11\ 16\ 2\ 6\ 9\ 14\ 1\ 6\ 9\ 14\ 4\ 8\ 11\ 16\ 3\ 8\ 11\ 16\ 4\ 8\ 11\ 16\ 3\ 8\ 11\ 16]$, $\bar{H} = \delta_{16}[1\ 2\ \dots\ 15\ 16]$ 。

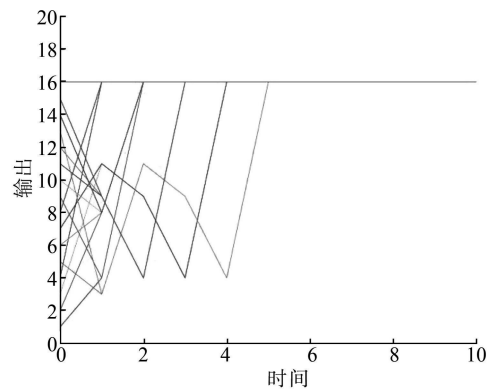
假设参考输出信号为 $y^* = \delta_4^1$, 通过计算可得 $\Theta = \{\delta_{16}^{16}\}$ 。下面计算最大控制不变子集。通过算法 1 可得 $S^* = \{\delta_{16}^{16}\}$ 且状态 δ_{16}^{16} 所对应的控制为 δ_2^1 。

下面计算 $R_k(S^*)$ 。通过计算得到

$$\begin{cases} R_1(S^*) = \{\delta_{16}^4, \delta_{16}^8, \delta_{16}^{12}\}, \\ R_2(S^*) = \{\delta_{16}^1, \delta_{16}^2, \delta_{16}^6, \delta_{16}^9, \delta_{16}^{10}, \delta_{16}^{14}\}, \\ R_3(S^*) = \{\delta_{16}^{11}, \delta_{16}^{13}, \delta_{16}^{15}\}, \\ R_4(S^*) = \{\delta_{16}^3, \delta_{16}^7\}, \\ R_5(S^*) = \{\delta_{16}^5\}. \end{cases}$$

每个状态可能的状态反馈控制为 $u(\delta_{16}^i) = \{\delta_2^1, \delta_2^2\}$, $\forall i \in [1, 8]$, $u(\delta_{16}^i) = \{\delta_2^2\}$, $\forall i \in [9, 16]$ 。通过计算可得 $\Pi(\delta_{16}^i) = \{\delta_{16}^i\}$ ($\forall i \in [1, 16]$)。显然 $\Pi(\delta_{16}^i) \cap \Pi(\delta_{16}^j) = \emptyset$, $\forall i \neq j$ 。结合公式(12)可得 $u_i = u(\delta_{16}^i)$ 。综上所述,系统的输出反馈控制增益矩阵为 $G = \delta_2[u_1\ u_2\ \dots\ u_8\ 2\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2]$, 其中, $u_i = 12$ ($\forall i \in [1, 8]$)。

系统输出随时间的演化情况如图 1。



注:横轴表示时间,纵轴表示输出状态中 1 所在的位置。

图 1 初始状态产生输出随时间的变化图

4 总结

本文主要研究了时滞布尔控制网络的输出跟踪问题。首先,利用矩阵半张量积,得到了时滞布尔控制网络的代数形式。其次,通过研究其代数表达式,得到了时滞布尔控制网络输出跟踪问题可解的充要条件。另外,通过研究时滞布尔网络输出跟踪问题可解的充分必要条件,设计了一个算法来求解输出反馈控制器。最后,通过一个例子说明理论结果的可行性。在未来,如何通过设计基于输出反馈的事件触发控制器来实现输出跟踪是一个值得思考的问题。此外,利用矩阵半张量积求解输出跟踪问题,如何降低算法的复杂度也是今后研究的一个重点。

参 考 文 献

- [1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1969, 22(3): 437-467.
- [2] 程代展,齐洪胜,赵寅. 布尔网络的分析与控制——矩阵半张量积方法[J]. *自动化学报*, 2011, 37(5): 529-540.
- [3] CHENG D Z, QI H S. A linear representation of dynamics of Boolean networks[J]. *IEEE Transaction Automatic Control*, 2010, 55(10): 2251-2258.
- [4] CHENG D Z, QI H S. State space analysis of Boolean networks[J]. *IEEE Transaction on Neural Networks*, 2010, 21(4): 584-594.
- [5] 冯俊娥,李怡靓,赵建立. 四种半张量积及其代数关系[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2020, 33(4): 1-7.
- [6] GUO Y Q, WANG P, GUI W H, et al. Set stability and set stabilization of Boolean control networks based on invariant subsets[J]. *Automatica*, 2015, 61: 106-112.
- [7] HUANG C, LU J Q, ZHAI G S, et al. Stability and stabilization in probability of probabilistic Boolean networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, 32(1): 241-251.
- [8] LI B W, LIU Y, LOU J G, et al. The robustness of outputs with respect to disturbances for Boolean control networks[J]. *IEEE Transaction on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(3): 1046-1051.
- [9] LI Y F, ZHU J D, LI B W, et al. A necessary and sufficient graphic condition for the original disturbance decoupling of Boolean networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, doi: 10.1109/TAC.2020.3025507.
- [10] WU Y H, SUN X M, ZHAO X D, et al. Optimal control of Boolean control networks with average cost: A policy iteration approach[J]. *Automatica*, 2019, 100: 378-387.
- [11] CHEN H W, SHEN B, Li N. Synchronization of interconnected Boolean networks with stochastic function perturbations[C]. // *IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, 2019.
- [12] ZHONG J, LU J Q, LIU Y. Synchronization in an array of output-coupled Boolean networks with time delay[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(4): 2288-2294.
- [13] LI H T, WANG Y Z, XIE L H. Output tracking control of Boolean control networks via state feedback; constant reference signal case[J]. *Automatica*, 2015, 59: 54-59.
- [14] LIU R J, LU J Q, LIU Y, et al. Delayed feedback control for stabilization of Boolean control networks with state delay[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(7): 3283-3288.
- [15] LU J Q, ZHONG J. On controllability of delayed Boolean control networks[J]. *Journal on Control and Optimization*, 2016, 54(2): 475-494.
- [16] LI F F, LI J N, SHEN L J. State feedback controller design for the synchronization of Boolean networks with time delays[J]. *Physica A*, 2018, 490: 1267-1276.
- [17] LIU Y S, ZHENG Y T, LI H T, et al. Control design for output tracking of delayed Boolean control networks[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, 327: 188-195.
- [18] Li F F. Stability of Boolean networks with delays using pinning control[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2018, 5(1): 179-185.
- [19] MENG M, LAM J, FENG J E. Stability and stabilization of Boolean networks with stochastic delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(2): 790-796.
- [20] ZHANG X, WANG Y H, CHENG D Z. Output tracking of Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(6): 2730-2735.
- [21] LI Y L, LI J J, FENG J E. Output tracking of Boolean control networks with impulsive effects[J]. *IEEE Access*, 2016(4): 1-6.
- [22] CHEN B Q, CAO J D, LUO Y P, et al. Asymptotic output tracking of probabilistic Boolean control networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers*, 2020, 67(8): 2780-2790.