

卷积运算对彩色图像质量的影响

崔明珠, 范丽亚

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 无论是传统方法与深度学习结合进行图像降噪, 还是利用深度学习对图像降噪做进一步的研究, 都没有具体分析卷积运算自身在图像降噪中的作用以及卷积核权重的调整方法。基于此, 首先研究了四种经典的卷积核, 并在 McMaster 数据集上实证分析了卷积运算对“干净”彩色图像和噪声彩色图像质量的影响。结果表明不同卷积核对图像质量的影响有强弱之分, 需要调整权重。同时指明调整卷积核的权重的后向传播方法。

关键词 卷积运算; 彩色图像降噪; 权重调整; 深度学习

中图分类号 TP391

文献标识码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)



The Influence of Convolution Operation on Color Image Qualities

CUI Mingzhu, FAN Liya

(School of Mathematical Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract Both the traditional method combined with deep learning for image denoising and the further research on image denoising using deep learning have not analyzed the role of convolution operation itself in image denoising and the adjustment method of convolution kernel weight. Based on this, this paper first studies four classical convolution kernels, and empirically analyzes the effect of convolution operation on the quality of “clean” color images and noisy color images on the McMaster dataset. The results show that the influence of different convolution checklists on image quality is strong or weak, and the weight needs to be adjusted. At the same time, the backward propagation method of adjusting the weight of the convolution kernel is specified.

Key words Convolution operation; Color image noise reduction; Weight adjustment; Deep learning

0 引言

采集传输图像过程中受传感器和传输介质的影响, 图像会受到多种噪声的污染, 因此降噪是图像处理中一个重要的环节。有关图像降噪的方法有许多, 如: 图像稀疏降噪法^[1,2], 基于梯度特征降噪法^[3,4], K

收稿日期: 2021-01-01

基金项目: 国家自然科学基金项目(11801248); 山东省自然科学基金项目(ZR2020MA026, ZR2018BF010)资助

通讯作者: 范丽亚, 女, 汉族, 博士, 教授, 研究方向: 机器学习理论与应用, E-mail: fanliya63@126.com。

均值聚类降噪法^[5], 基于 PDEs 的图像特征提取^[6-9]等。随着深度学习^[10]技术的不断提高, 将深度学习理论应用于图像处理, 在降噪方面比传统方法更具优势^[11]。另一方面, 图像加噪的方法也有很多。若按噪声与图像信号的关系, 可分为加性噪声(与信号强度无关)和乘性噪声(与信号强度有关); 若按噪声类型^[12], 有高斯噪声(服从高斯分布)、泊松噪声(服从泊松分布)、椒盐噪声^[13]等。椒盐噪声是通过随机改变一些像素值而产生噪声。

基于传统方法与深度学习结合, 2017 年, Khaw, H 等人^[14]将主成分分析(Principal Components Analysis, PCA^[11])应用到卷积神经网络(Convolutional Neural Network, CNN)中进行图像降噪分析, 该方法先利用卷积提取图像特征, 再利用 PCA 对图像特征进行降维, 最后利用卷积重新得到“干净”图像; Hsu, C 等人^[15]将联合聚类和表示学习与 CNN 结合应用于图像降噪, 从多个维度提取有用信息。同年, 基于深度学习和残差学习, Zhang, K 等人^[16]将更深层网络、残差学习、正则化与批量归一化应用于前馈 CNN, 以期提升图像降噪性能。2018 年, Hernrich, M P 等人^[17]提出了用于 CT 图像降噪的多层 CNN 结构。2019 年, Peng Y 等人^[18]提出了将扩张卷积应用于残差网络, 提高了训练的学习效率且网络层数和参数比之前更少, 在降噪速度和精度上都有所提升。

无论是利用传统方法与深度学习结合进行图像降噪, 还是利用深度学习对图像降噪做更深入的研究^[19-21], 均着重于对 CNN 网络的改进和提升, 而没有具体分析 CNN 网络中的卷积运算对清晰图像和噪声图像具有怎样的作用, 是否有利于图像降噪。以及如何调整卷积核权重的理论方法。基于此, 本文主要研究卷积运算对干净和噪声彩色图像(彩图)的影响以及如何调整卷积核的权重。

1 预备知识

本节简要介绍卷积运算的工作原理以及图像质量的评价指标。

1.1 卷积运算的工作原理

卷积作为一种运算, 是两个变量在某种范围内相乘再积分的结果。针对图像的卷积运算是通过卷积核来完成的, 是图像数字矩阵与卷积核加权的滑动求和过程。卷积核是卷积运算的核心, 其大小为 3×3 或 5×5 矩阵, 其中各元素称为卷积核的权重, 之和为 1。卷积运算在滑动过程中权重不变, 步幅依据任务而定, 一般设为 1。卷积运算的结果有两种, 一是得到更小尺寸的图像特征矩阵, 另一是通过图像矩阵上下左右填充 0 元素, 得到相同尺寸的图像特征矩阵。根据任务要求, 可选用 1 组或多组卷积核, 其大小可表示为卷积核组数 \times 卷积核大小 \times 卷积核通道数, 卷积核的通道数与被卷积图像的通道数相同。灰度图像有一个通道, 彩色图像有 R、G、B 三个通道。所以, 对灰度图像, 1 组卷积核有 1 个通道; 对彩色图像, 1 组卷积核有 3 个通道。卷积核的组数是通过网格搜索得到的。下面以一张 5×5 灰度图像矩阵为例(见图 1 左), 说明卷积运算的工作原理

给定 1 组卷积核(见图 1 中), 它是 3×3 矩阵, 9 个权重均为 $1/9$, 滑动步幅为 1。首先, 对图像矩阵中的黄色部分进行卷积运算, 即与卷积核对应位置权重相乘后再求和, 可得 $1 \times (1/9) + 2 \times (1/9) + 3 \times (1/9) + 2 \times (1/9) + 3 \times (1/9) + 4 \times (1/9) + 3 \times (1/9) + 4 \times (1/9) + 5 \times (1/9) = 3$ 。

然后将数字 3 填入图 1 右中的(1,1)位置(黄色部分)。其次, 将图像矩阵中的黄色部分向右滑动 1 步, 再进行卷积运算, 可得 $2 \times (1/9) + 3 \times (1/9) + 4 \times (1/9) + 3 \times (1/9) + 4 \times (1/9) + 5 \times (1/9) + 4 \times (1/9) + 5 \times (1/9) + 1 \times (1/9) = 31/9$,

并将数字 $31/9$ 填入图 1 右中的(1,2)位置。以此类推, 将图像矩阵中的黄色部分先向右再向下依次滑动 1 步, 作为计算窗口进行卷积运算, 即可得到图 1 右中的 3×3 矩阵。

1.2 图像质量的评估指标

1.2.1 结构相似性。结构相似性(Structural Similarity, SSIM)是从对比度, 亮度和结构三个方面衡量两张

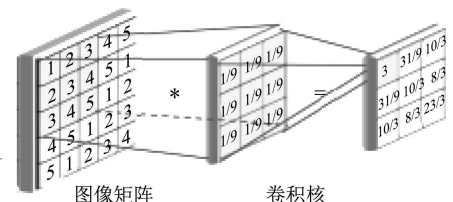


图 1 卷积运算的工作原理

图像的相似度,取值范围为 $[0,1]$,值越大相似度越高。对两个灰度图像 X 和 Y ,用 (μ_X, μ_Y) , (σ_X, σ_Y) 和 (σ_X^2, σ_Y^2) 分别表示图像的均值、标准差和方差,用 σ_{XY} 表示图像 X 和 Y 间的协方差。取 $k_1=0.01, k_2=0.03, L=255$ (最大像素值)。 $C_1, C_2, C_3 > 0$ 为常数,常取为 $C_1=(k_1 \times L)^2, C_2=(k_2 \times L)^2, C_3=C_2/2$ 。

计算

$$L_{(X,Y)} = \frac{2\mu_X\mu_Y + C_1}{\mu_X^2 + \mu_Y^2 + C_1}, C_{(X,Y)} = \frac{2\sigma_X\sigma_Y + C_2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + C_2}, S_{(X,Y)} = \frac{\sigma_{XY} + C_3}{\sigma_X\sigma_Y + C_3},$$

则有 $SSIM_{(X,Y)} = L_{(X,Y)} \cdot C_{(X,Y)} \cdot S_{(X,Y)} \in [0,1]$ 。

对两个彩色图像,通常有 2 种方法计算 SSIM 值(本文采用第(1)种方法)

- (1) 分别计算 R、G、B 通道上的 SSIM 值,然后求平均值;
- (2) 将彩色图像转换成 YCbCr 格式,仅计算 Y 分量(亮度分量)的 SSIM 值。

1.2.2 峰值信噪比。峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)是衡量图像质量的另一个指标,值越大,质量越好,图像越清晰。对灰度图像,给定大小为 $m \times n$ 的“干净”图像 I 和噪声图像 K ,两者间的均方误差(MSE)定义为

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [I(i,j) - K(i,j)]^2,$$

图像 K 的 PSNR 值定义为

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{255^2}{MSE} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{255}{\sqrt{MSE}} \right). \quad (1)$$

对彩色图像,通常有 3 种方法计算 PSNR 值(本文采用第(2)种方法)

- (1) 分别计算 R、G、B 各通道的 PSNR 值,然后求平均值;
- (2) 分别计算 R、G、B 各通道的 MSE 值,平均后利用(1)式计算 PSNR 值;
- (3) 将 RGB 转换成 YUV 颜色空间,仅计算 Y 分量(亮度分量)的 PSNR 值。

1.2.3 图像直方图。灰度图像的直方图展示了各像素值出现的频率,横轴为像素值,取值从 0 到 255(0 表示黑色,255 表示白色,即从暗到亮),纵轴是各像素值出现的频率,值越大出现的次数越多,见图 2 中左图。

彩色图像没有统一的直方图,是 R、G、B 三个通道上直方图的混合,如图 2 中右图所示,(a)、(b)、(c) 曲线分别表示 R、G、B 通道上的灰度图像直方图。

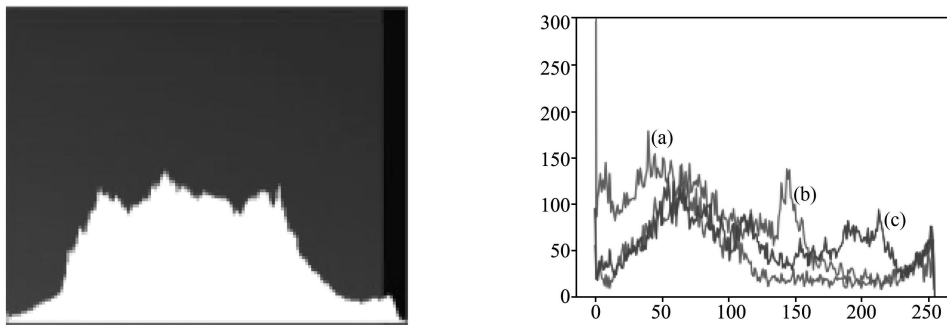


图 2 图像的直方图

2 卷积运算对彩色图像质量的影响

本节分别讨论卷积运算对“干净”彩图和噪声彩图的影响。随机选用 McMaster 数据集^[22]中的 10 张彩图(见图 3)作为“干净”图像进行实验。McMaster 数据集包含 18 张彩图,每张大小为 500×500 ,格式为.tif。实验中将其归一化为 125×125 ,格式为.jpg。



图 3 McMaster 数据集中的 10 张彩图

选用常用的 $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_4$ 四组卷积核进行卷积运算, 并利用 1.2 节中介绍的评价指标衡量卷积运算对图像质量的影响

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1/16 & 2/16 & 1/16 \\ 2/16 & 4/16 & 2/16 \\ 1/16 & 2/16 & 1/16 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 \mathbf{K}_1 是高斯滤波, 其在水平方向和垂直方向均呈现高斯分布, 突出了中心点在像素平滑后的权重。 \mathbf{K}_2 是角点均值滤波, 即选取中心点和四个角点的平均值。 \mathbf{K}_3 是均匀滤波, 均值滤波卷积核所覆盖的九个像素点具有同样权重, 该卷积核的作用在于取九个值的平均值代替中间像素值, 所以起到的平滑的效果。 \mathbf{K}_4 是平移滤波, 将原图向左上平移一个单位。

2.1 卷积运算对“干净”彩图的影响

本节通过两组比对实验来讨论卷积运算对“干净”彩图的影响。第 1 组实验是将彩图按 R、G、B 三个通道分解为灰度图像(分别记为 R 灰图、G 灰图和 B 灰图), 然后再合成为彩图(记为伪彩图 1, 见图 4)。通过 SSIM 值和 PSNR 值比对真彩图与伪彩图 1 之间的图像质量, 实验结果见表 1。

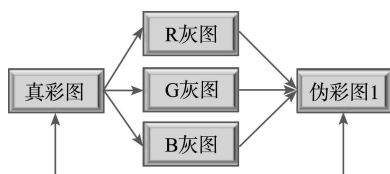


图 4 第 1 组实验过程

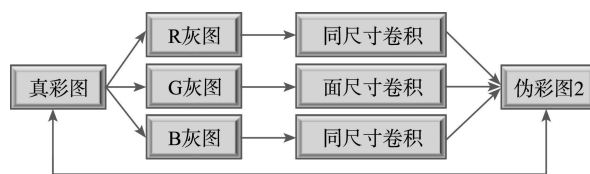


图 5 第 2 组实验过程

第 2 组实验是先将彩图分解为 R、G、B 三个灰图, 然后进行同尺寸卷积运算后再合成为伪彩图 2(见图 5)。通过 SSIM 值和 PSNR 值比对真彩图与伪彩图 2 之间的图像质量, 实验结果见表 1。

从表 1 中可以看出, 不经过卷积运算, “干净”彩图的质量几乎不发生变化。经过卷积运算后, “干净”彩图的质量有所下降, 也就是丢失了部分“干净”净彩图的特征, 使之模糊化。从 SSIM 的取值还可以看出, 卷积核的选择也对图像质量有影响, \mathbf{K}_1 影响较小, \mathbf{K}_4 影响则较大。

为了直观起见, 随机选择 1 张图像, 利用直方图对比四组卷积核(从左至右从上至下分别为 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \mathbf{K}_4$)下图像质量的变化(见图 6), 每组卷积核下的左小图为“干净”彩图, 右小图为伪彩图 2(下同)。

从图 6 中可以看出, 卷积核 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$ 主要影响 R 灰图的特征, 而卷积核 \mathbf{K}_4 不仅影响了 R 灰图的特征, 还影响了 B 灰图的特征。因此, 卷积运算降低了“干净”彩图的质量, 导致“干净”彩图模糊化。

2.2 噪声对“干净”彩图的影响

在“干净”彩图的不同位置添加同一噪声(本文选用高斯噪声, 方差 $\sigma = 20$), 是否对彩图的质量有不同的影响呢? 本节通过两组对比实验来讨论这一问题。第 1 组实验是先将“干净”彩图(记为真彩图)分解为 R、G、B 三个灰图, 分别在灰图上加噪声后再合并为伪彩图 3(称为后加噪, 见图 7)。利用 1.2 节中介绍的评价指标对比真彩图与伪彩图 3 之间的质量变化, 实验结果见表 2 和图 9 中的左图。第 2 组实验是先在真彩图上加噪(称为前加噪), 然后分解为三个灰图(R1 灰图、G1 灰图和 B1 灰图), 再合成为伪彩图 4(见图 8)。对比真彩图与伪彩图 4 之间的质量变化, 实验结果见表 2 和图 9 中的右图。

从表 2 和图 9 中可以看出, 后加噪不仅丢失了 B 灰图的特征, 还丢失了 G 灰图的特征, 对图像的质量影响较大。前加噪主要丢失的是 G 灰图的特征, 对图像的质量影响较小。总之, 不论是前加噪还是后加噪都对“干净”彩图的质量有影响, 且后加噪影响更大。

2.3 卷积运算对噪声彩图的影响

本节主要讨论卷积运算对噪声彩图的影响。首先讨论同一卷积核对不同强度噪声图像的影响, 进而讨论不同卷积核相同强度噪声图像的影响。

表 1 10 张彩图在不同卷积核中的两组实验结果

卷积核	图像	SSIM(伪彩图 1/伪彩图 2)	PSNR(伪彩图 1/伪彩图 2)
K_1	1	1 / 0.8990	100 / 24.4288
	2	1 / 0.9326	100 / 27.6020
	3	1 / 0.8542	100 / 24.1729
	4	1 / 0.8417	100 / 22.0001
	5	1 / 0.9174	100 / 27.5270
	6	1 / 0.9114	100 / 28.5382
	7	1 / 0.9240	100 / 28.7759
	8	1 / 0.9254	100 / 27.6200
	9	1 / 0.9164	100 / 27.5645
	10	1 / 0.9275	100 / 29.4596
K_2	1	1 / 0.7949	100 / 21.3484
	2	1 / 0.8620	100 / 24.2973
	3	1 / 0.7434	100 / 21.4576
	4	1 / 0.7264	100 / 19.0948
	5	1 / 0.8372	100 / 24.3131
	6	1 / 0.8187	100 / 25.2816
	7	1 / 0.8599	100 / 25.4035
	8	1 / 0.8591	100 / 24.6131
	9	1 / 0.8432	100 / 24.6089
	10	1 / 0.8566	100 / 26.2068
K_3	1	1 / 0.8323	100 / 22.2974
	2	1 / 0.8889	100 / 25.3874
	3	1 / 0.7705	100 / 22.1688
	4	1 / 0.7543	100 / 19.9300
	5	1 / 0.8652	100 / 25.3492
	6	1 / 0.8523	100 / 26.3432
	7	1 / 0.8799	100 / 26.5475
	8	1 / 0.8799	100 / 25.5182
	9	1 / 0.8665	100 / 25.4773
	10	1 / 0.8810	100 / 27.2660
K_4	1	1 / 0.5167	100 / 15.9315
	2	1 / 0.6543	100 / 18.3082
	3	1 / 0.4783	100 / 16.4905
	4	1 / 0.4329	100 / 14.2637
	5	1 / 0.5781	100 / 18.2159
	6	1 / 0.5541	100 / 19.6973
	7	1 / 0.5737	100 / 19.1054
	8	1 / 0.6535	100 / 19.4561
	9	1 / 0.6357	100 / 19.5279
	10	1 / 0.6197	100 / 19.9839

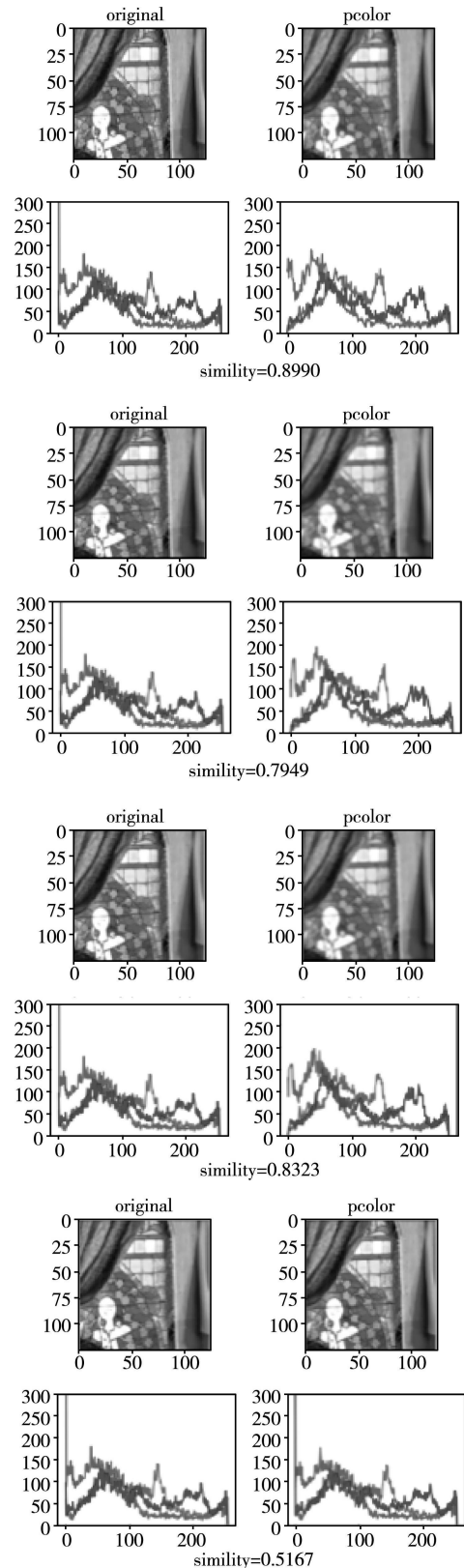


图 6 不同卷积核下图像质量的变化情况

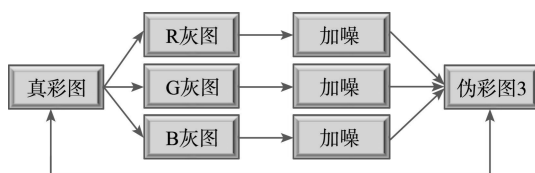


图 7 后加噪过程

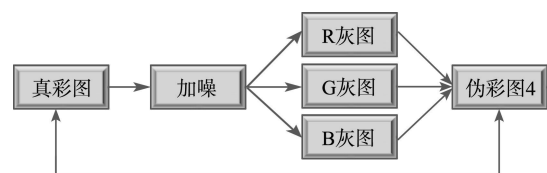


图 8 前加噪过程

表 2 前后加噪对“干净”彩图质量影响的实验结果

图像	SSIM(伪彩图 3/伪彩图 4)	PSNR(伪彩图 3/伪彩图 4)
1	0.4445 / 0.7792	11.9731 / 22.5180
2	0.3635 / 0.6759	10.4186 / 22.7735
3	0.5036 / 0.7515	13.5497 / 22.4016
4	0.3640 / 0.6682	12.8828 / 22.4684
5	0.5274 / 0.6890	15.3559 / 22.3416
6	0.5024 / 0.6534	14.4463 / 22.3410
7	0.4455 / 0.6293	11.8608 / 22.5181
8	0.1584 / 0.5584	6.9361 / 23.5630
9	0.3210 / 0.5781	11.8105 / 22.5187
10	0.3004 / 0.6437	10.0532 / 22.8263

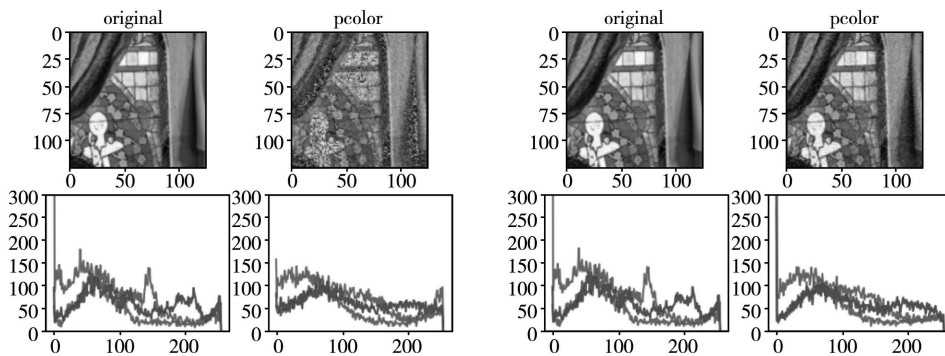


图 9 前后加噪的直方图对比结果

2.3.1 同一卷积核对不同强度噪声彩图的影响。本节选用卷积核 K_1 ，噪声强度分别取为 $\sigma = 10, 20, 30, 40, 50$ ，进行两组对比实验。第 1 组实验是后加噪得到伪彩图 5，再进行卷积运算，得到伪彩图 6(见图 10)。对比真彩图与伪彩图 5 以及与伪彩图 6 的质量变化情况。第 2 组实验是前加噪得到伪彩图 7，再进行卷积运算，得到伪彩图 8(见图 11)。对比真彩图与伪彩图 7 以及与伪彩图 8 的质量变化情况。实验结果均见表 3。

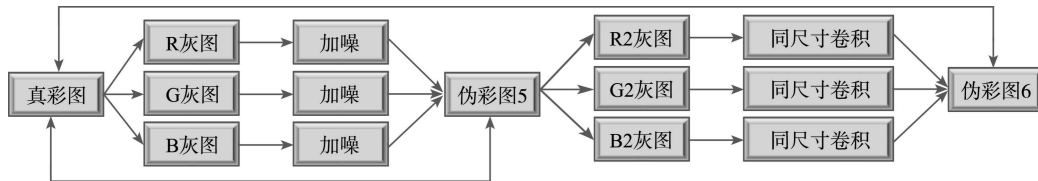


图 10 后加噪+卷积运算的过程

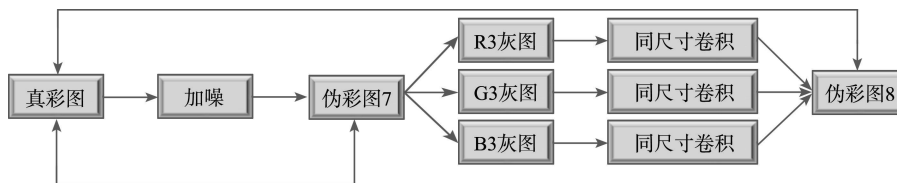


图 11 前加噪+卷积运算的过程

从表 3 中可以看出,不同强度的噪声对图像质量的影响不同,强度越大,质量越差;对后加噪过程,卷积运算明显可以提高图像的质量;对前加噪过程,绝大多数情况下(除 $\sigma = 10$ 外)卷积运算同样可以提高图像的质量,起到降噪的作用。为直观感受卷积运算的影响,随机选择 1 张彩图,观察其在同一强度($\sigma = 50$)噪声下质量的变化情况,见图 12,其中左图依次为真彩图、伪彩图 5 和伪彩图 6,右图依次为真彩图、伪彩图 7 和伪彩图 8。

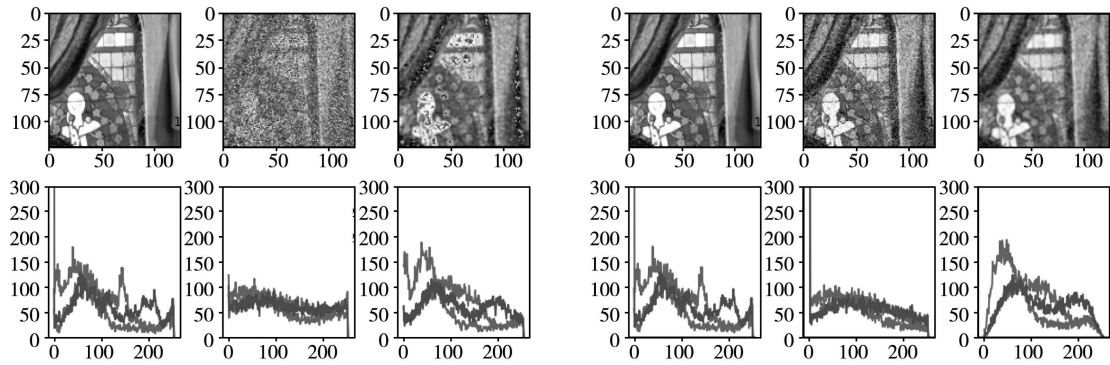


图 12 不同位置加噪+卷积运算下图像质量的变化情况

表 3 10 张彩图在不同强度噪声下的实验结果(同一卷积核)

方差	图像	SSIM(伪彩图 5/伪彩图 6)	SSIM(伪彩图 7/伪彩图 8)	PSNR(伪彩图 5/伪彩图 6)	PSNR(伪彩图 7/伪彩图 8)
$\sigma=10$	1	0.6275 / 0.8672	0.9135 / 0.8807	13.7199 / 21.7148	28.3272 / 24.1014
	2	0.5531 / 0.8595	0.8545 / 0.9005	12.5670 / 21.1483	28.5455 / 27.0445
	3	0.6926 / 0.8205	0.8949 / 0.8323	15.7978 / 22.8021	28.2868 / 23.8908
	4	0.6380 / 0.8162	0.8285 / 0.8061	17.1275 / 21.8755	28.2555 / 21.8219
	5	0.7714 / 0.8886	0.8689 / 0.8918	18.4562 / 24.3364	28.1655 / 26.9719
	6	0.7299 / 0.8765	0.8614 / 0.8850	17.2226 / 25.5134	28.2331 / 27.8706
	7	0.6883 / 0.8580	0.8318 / 0.8869	13.6202 / 18.8353	28.3443 / 28.0819
	8	0.2513 / 0.6743	0.7752 / 0.8550	8.23510 / 14.5801	29.3017 / 27.0711
	9	0.5221 / 0.8587	0.7759 / 0.8619	13.8463 / 24.2616	28.3862 / 27.0037
	10	0.4929 / 0.8532	0.8467 / 0.8925	11.8942 / 22.723	28.5503 / 28.6411
$\sigma=20$	1	0.4465 / 0.8166	0.7779 / 0.8395	12.0343 / 19.9085	22.4856 / 23.3663
	2	0.3636 / 0.7601	0.6769 / 0.8334	10.3363 / 16.8028	22.7719 / 25.8258
	3	0.5101 / 0.7773	0.7505 / 0.7843	13.6891 / 20.7202	22.3672 / 23.2360
	4	0.3688 / 0.7524	0.6697 / 0.7355	12.8522 / 20.9856	22.4710 / 21.3681
	5	0.5358 / 0.8413	0.6887 / 0.8353	15.4522 / 22.6824	22.3336 / 25.7890
	6	0.4986 / 0.8137	0.6537 / 0.8251	14.5017 / 21.4144	22.3039 / 26.4468
	7	0.4490 / 0.7950	0.6287 / 0.8120	11.9301 / 17.1812	22.5149 / 26.6128
	8	0.1636 / 0.5468	0.5593 / 0.7311	7.0350 / 11.4471	23.5875 / 25.8037
	9	0.3219 / 0.7658	0.5822 / 0.7616	11.7395 / 20.1805	22.6020 / 25.8135
	10	0.3015 / 0.7749	0.6446 / 0.8166	9.9856 / 17.7875	22.8558 / 26.9858
$\sigma=30$	1	0.3005 / 0.7688	0.6557 / 0.7885	10.7537 / 18.2468	19.1596 / 22.3798
	2	0.2475 / 0.6910	0.5459 / 0.7578	9.3193 / 15.1963	19.5115 / 24.2993
	3	0.3657 / 0.7285	0.6243 / 0.7331	12.2377 / 19.3680	19.0241 / 22.3625
	4	0.2270 / 0.6765	0.5672 / 0.6676	10.8998 / 19.3094	19.2653 / 20.7223
	5	0.3545 / 0.7840	0.5407 / 0.7656	13.2181 / 20.3972	18.9684 / 24.2870
	6	0.3181 / 0.7703	0.4910 / 0.7462	12.8369 / 19.8662	18.9212 / 24.7562
	7	0.2833 / 0.7383	0.4811 / 0.7271	10.7105 / 15.7454	19.1310 / 24.7494
	8	0.1090 / 0.4899	0.4250 / 0.6192	6.5960 / 10.4189	20.2878 / 24.1976
	9	0.2014 / 0.6878	0.4518 / 0.6658	10.5831 / 18.1022	19.2789 / 24.3865
	10	0.1835 / 0.6909	0.4881 / 0.7301	8.996 / 15.5205	19.5131 / 25.1052

表 3 10 张彩图在不同强度噪声下的实验结果(同一卷积核)(续)

方差	图像	SSIM(伪彩图 5/伪彩图 6)	SSIM(伪彩图 7/伪彩图 8)	PSNR(伪彩图 5/伪彩图 6)	PSNR(伪彩图 7/伪彩图 8)
$\sigma=40$	1	0.2074 / 0.7196	0.5584 / 0.7398	9.8579 / 17.2313	16.9082 / 21.3798
	2	0.1630 / 0.6323	0.4494 / 0.6915	8.6808 / 14.0427	17.2339 / 22.8722
	3	0.2457 / 0.6873	0.5158 / 0.6820	11.0569 / 18.2214	16.6479 / 21.4056
	4	0.1487 / 0.6034	0.4908 / 0.6077	9.5476 / 17.3419	17.0859 / 20.0305
	5	0.2275 / 0.7334	0.4324 / 0.7020	11.6407 / 19.1123	16.6472 / 22.9119
	6	0.1965 / 0.7099	0.3716 / 0.6660	11.5698 / 18.4549	16.5358 / 23.1918
	7	0.1825 / 0.6809	0.3867 / 0.6610	9.8827 / 15.2706	16.8180 / 23.2051
	8	0.0744 / 0.4611	0.3344 / 0.5352	6.4199 / 9.6519	17.9082 / 22.6091
	9	0.1313 / 0.6244	0.3570 / 0.5894	9.7586 / 16.7084	16.9130 / 22.8923
	10	0.1133 / 0.6317	0.3777 / 0.6504	8.4438 / 14.5776	17.2403 / 23.4456
$\sigma=50$	1	0.1463 / 0.6677	0.4800 / 0.6933	9.2416 / 16.1855	15.2091 / 20.4521
	2	0.1101 / 0.5844	0.3751 / 0.6244	8.1506 / 12.9572	15.4433 / 21.4954
	3	0.1609 / 0.6377	0.4237 / 0.6222	10.2461 / 17.165	14.8664 / 20.3600
	4	0.1056 / 0.5371	0.4247 / 0.5549	8.7392 / 15.5207	15.4373 / 20.3821
	5	0.1495 / 0.6821	0.3452 / 0.6333	10.614 / 18.1104	14.9200 / 21.6587
	6	0.1237 / 0.6551	0.2900 / 0.5935	10.6629 / 17.6878	14.7801 / 21.8577
	7	0.1189 / 0.6249	0.3142 / 0.5918	9.2449 / 14.0907	15.1058 / 21.7830
	8	0.0489 / 0.4309	0.2700 / 0.4679	6.3974 / 9.3909	16.1221 / 21.2683
	9	0.0819 / 0.5698	0.2904 / 0.5246	9.0605 / 15.3555	15.2022 / 21.6757
	10	0.0729 / 0.5869	0.3014 / 0.5759	8.0581 / 14.0689	15.6222 / 22.0176

从图 12 中可以看出,后加噪比前加噪更影响图像的质量,但卷积运算明显起到了降噪作用,提高了图像质量。对后加噪情况(左图),通过卷积运算,R2、G2 和 B2 三个灰图的部分特征都得到了恢复(见左图中的右小图)。对前加噪情况(右图),通过卷积运算,只是 G3 和 B3 两个灰图的部分特征得到了恢复,而 R3 灰图的特征恢复得并不好(见右图中的右小图)。综上所述,卷积运算对噪声彩图有降噪的作用,噪声越强,作用越明显。

2.3.2 不同卷积核对相同强度噪声彩图的影响。本节选用四个卷积核 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \mathbf{K}_4$ 强度噪声取 $\sigma=20$,进行两组对比实验。实验过程同 2.3.1 节(见图 10 和图 11)。对比真彩图与伪彩图 5 和伪彩图 6,以及对比真彩图与伪彩图 7 和伪彩图 8 的质量变化情况。实验结果均见表 4。

从表 4 中可以看出:不同卷积核对图像质量的影响不同,可以提升或降低图像质量;对后加噪过程,卷积运算绝大多数情况下(除 \mathbf{K}_4 外)提高图像的质量;对前加噪过程,图像质量有升有降,受卷积核的影响较大。为直观起见,随机选择 1 张彩图,观察其在四个卷积核 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \mathbf{K}_4$ 下质量的变化情况,见图 13,其中前两排从左至右从上到下分别为卷积核 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \mathbf{K}_4$ 下后加噪对比,左中右小图分别为真彩图、伪彩图 5 和伪彩图 6;后两排从左至右从上到下分别为卷积核 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \mathbf{K}_4$ 下前加噪对比。左中右小图分别为真彩图、伪彩图 7 和伪彩图 8。

从图 13 中可以看出,不同卷积核对同一噪声图像的质量的影响是不同的;无论是后加噪,还是前加噪,卷积核 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$ 比卷积核 \mathbf{K}_4 的降噪效果更明显,在各通道上均恢复的更好,故卷积运算对噪声彩图的降噪效果依赖于卷积核的选择。

表 4 10 张彩图在不同卷积核下的实验结果(同一噪声)

卷积核	图像	SSIM(伪彩图 5/伪彩图 6)	SSIM(伪彩图 7/伪彩图 8)	PSNR(伪彩图 5/伪彩图 6)	PSNR(伪彩图 7/伪彩图 8)
K_1	1	0.4465 / 0.8166	0.7779 / 0.8395	12.0343 / 19.9085	22.4856 / 23.3663
	2	0.3636 / 0.7601	0.6769 / 0.8334	10.3363 / 16.8028	22.7719 / 25.8258
	3	0.5101 / 0.7773	0.7505 / 0.7843	13.6891 / 20.7202	22.3672 / 23.2360
	4	0.3688 / 0.7524	0.6697 / 0.7355	12.8522 / 20.9856	22.4710 / 21.3681
	5	0.5358 / 0.8413	0.6887 / 0.8353	15.4522 / 22.6824	22.3336 / 25.7890
	6	0.4986 / 0.8137	0.6537 / 0.8251	14.5017 / 21.4144	22.3039 / 26.4468
	7	0.4490 / 0.7950	0.6287 / 0.8120	11.9301 / 17.1812	22.5149 / 26.6128
	8	0.1636 / 0.5468	0.5593 / 0.7311	7.0350 / 11.4471	23.5875 / 25.8037
	9	0.3219 / 0.7658	0.5822 / 0.7616	11.7395 / 20.1805	22.6020 / 25.8135
	10	0.3015 / 0.7749	0.6446 / 0.8166	9.9856 / 17.7875	22.8558 / 26.9858
K_2	1	0.4385 / 0.7065	0.7771 / 0.7257	11.9619 / 18.3027	22.5317 / 20.6412
	2	0.3557 / 0.6745	0.6800 / 0.7455	10.3022 / 15.8143	22.8544 / 23.0999
	3	0.5134 / 0.6626	0.7519 / 0.6626	13.7311 / 19.2321	22.3692 / 20.7441
	4	0.3662 / 0.6095	0.6693 / 0.5942	12.8871 / 18.1516	22.4870 / 18.6394
	5	0.5319 / 0.7451	0.6881 / 0.7335	15.4105 / 20.2453	22.3189 / 23.1118
	6	0.4952 / 0.7087	0.6530 / 0.7118	14.4144 / 20.2615	22.3167 / 23.7962
	7	0.4456 / 0.7101	0.6287 / 0.7235	11.8142 / 16.2494	22.5049 / 23.8167
	8	0.1591 / 0.4710	0.5561 / 0.6382	7.0229 / 10.9794	23.5434 / 23.3763
	9	0.3134 / 0.6656	0.5794 / 0.6575	11.6785 / 19.2533	22.5411 / 23.3274
	10	0.2975 / 0.6729	0.6413 / 0.7220	10.0034 / 17.2214	22.8141 / 24.4729
K_3	1	0.4329 / 0.7674	0.7757 / 0.7848	11.8715 / 19.3401	22.4716 / 21.7249
	2	0.3589 / 0.7484	0.6772 / 0.8080	10.3119 / 17.6988	22.7857 / 24.4298
	3	0.5081 / 0.7061	0.7523 / 0.7176	13.5456 / 19.8770	22.4083 / 21.6709
	4	0.3677 / 0.6920	0.6722 / 0.6702	12.8516 / 19.5393	22.5050 / 19.5985
	5	0.5369 / 0.8023	0.6865 / 0.7978	15.5005 / 21.2672	22.3072 / 24.3967
	6	0.4933 / 0.7759	0.6543 / 0.7848	14.3336 / 21.0596	22.3312 / 25.2217
	7	0.4515 / 0.7722	0.6284 / 0.7874	11.9037 / 17.3080	22.5014 / 25.3189
	8	0.1608 / 0.5346	0.5622 / 0.7064	7.0180 / 11.7733	23.6519 / 24.4595
	9	0.3200 / 0.7453	0.5789 / 0.7371	11.7558 / 20.8231	22.5410 / 24.5068
	10	0.3015 / 0.7529	0.6439 / 0.7860	9.9990 / 19.2526	22.8395 / 25.8406
K_4	1	0.4442 / 0.3519	0.7777 / 0.4055	12.0460 / 12.8146	22.5067 / 15.1511
	2	0.3630 / 0.3739	0.6779 / 0.4460	10.3711 / 11.7211	22.7961 / 17.0433
	3	0.5073 / 0.3322	0.7526 / 0.3587	13.6936 / 13.8344	22.4001 / 15.5842
	4	0.3666 / 0.2402	0.6705 / 0.2372	12.8725 / 11.7809	22.4812 / 13.7009
	5	0.5366 / 0.4096	0.6881 / 0.3978	15.5254 / 15.0905	22.3116 / 16.8429
	6	0.4943 / 0.3802	0.6514 / 0.3740	14.3953 / 15.3547	22.2746 / 17.8403
	7	0.4438 / 0.3594	0.6286 / 0.3717	11.7670 / 12.9978	22.5405 / 17.5276
	8	0.1611 / 0.2766	0.5585 / 0.3470	6.9888 / 8.8048	23.5827 / 18.1516
	9	0.3260 / 0.3579	0.5814 / 0.3410	11.8255 / 13.9280	22.5876 / 17.8687
	10	0.2996 / 0.3602	0.6420 / 0.4051	9.9759 / 12.5620	22.8237 / 18.2733

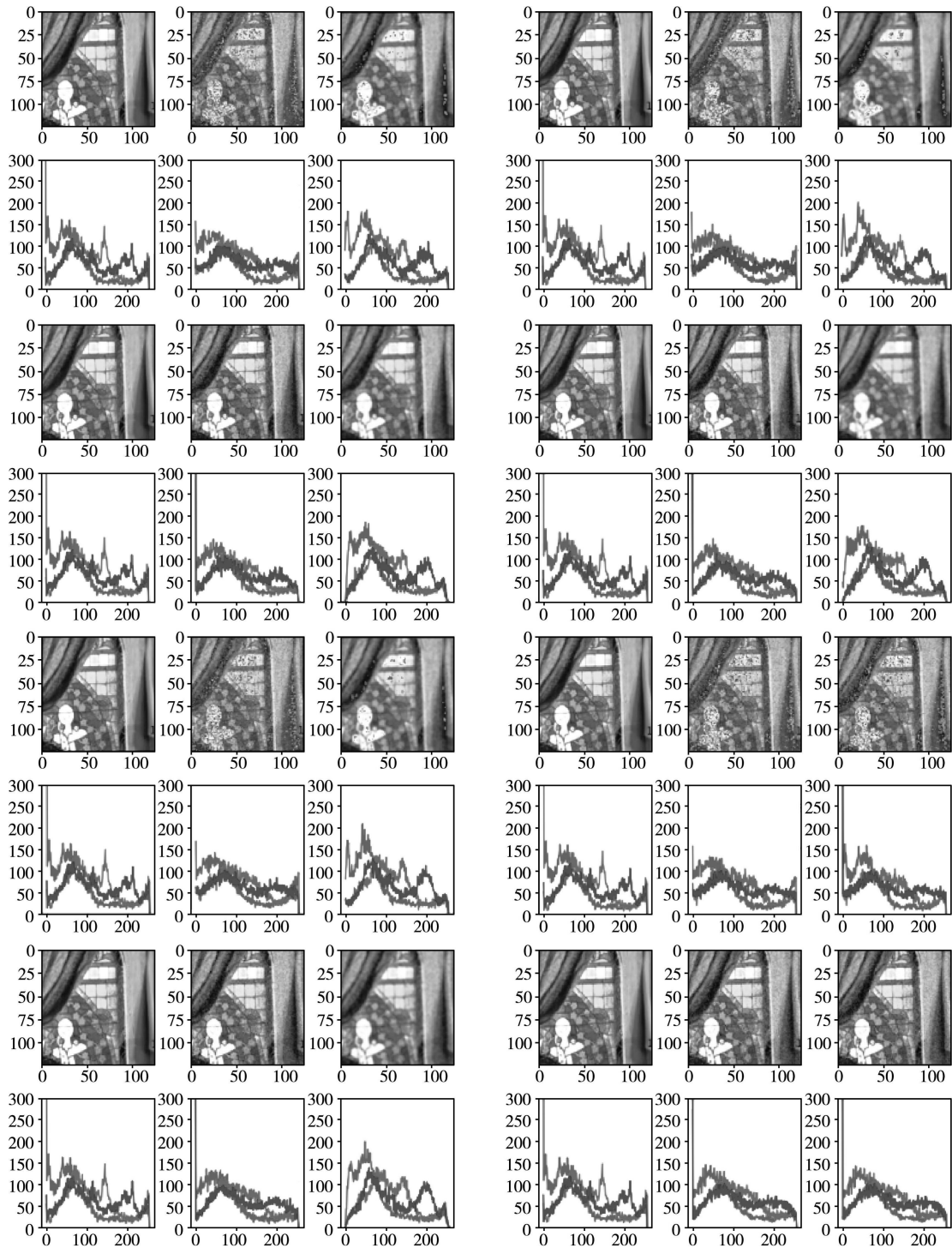


图 13 不同位置加噪+不同卷积核下图像质量的变化情况

3 卷积核权重的调整方法

从第 2 节的讨论知,不论是“干净”彩图还是噪声彩图,不同卷积核对图像质量的影响是不同的。对噪声彩图,如何选择一个更能提高质量的卷积核呢?针对这一问题,本节先讨论二维卷积核权重的调整方法,然后再讨论三维张量卷积核权重的调整方法。

3.1 二维卷积核权重的调整方法

3.1.1 二维卷积误差的计算。本节借助 CNN 网络来讨论二维卷积误差的计算方法。先看正向卷积过程。不失一般性,设 $\mathbf{z}^l = [z_{ij}^l] \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为第 l 层的输入矩阵,经激活函数 σ 激活后得第 l 层的输出矩阵 $\mathbf{a}^l = [a_{ij}^l] \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 。用 $\mathbf{w}^{l+1} = [w_{ij}^{l+1}] \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 和 $b^{l+1} \in \mathbf{R}$ 分别表示第 $l+1$ 层的卷积核和偏差。用 $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 表示 $2 \times$

2 的 1 矩阵(即每个元素均为 1),用 $*$ 表示卷积运算,则有 $\mathbf{a}^l * \mathbf{w}^{l+1} + \mathbf{b}^{l+1} \mathbf{E} = \mathbf{z}^{l+1}$ 。在初始化阶段,卷积核和偏差一般设为随机数,然后用反向传播方法进行更新。反向传播算法是由 Rumelhart 和 McClelland 等科学家于 1986 年首次提出的,是一种按照误差逆向传播算法训练的方法,目前广泛应用于神经网络的参数训练中。

首先给出反向传播误差的定义。

定义 1 第 l 层位于 (x, y) 位置的反向传播误差定义为 $\delta_{(x,y)}^l = \partial C / \partial \mathbf{z}_{(x,y)}^l, x, y = 1, 2, 3$, 其中 C 表示损失函数。常用的损失函数有两种,交叉熵损失函数和均方误差损失函数,分别应用于机器学习中的分类问题和回归问题。

已知第 $l+1$ 层的误差矩阵 $\delta^{l+1} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, 求第 l 层的误差矩阵 $\delta^l \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 。用 $\delta_{(x,y)}^l$ 表示第 l 层位于 (x, y) 位置的误差,由定义 1 知

$$\delta_{(x,y)}^l = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{z}_{(x,y)}^l} = \sum_{x'} \sum_{y'} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{z}_{(x',y')}^{l+1}} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}_{(x',y')}^{l+1}}{\partial \mathbf{z}_{(x,y)}^l}, \quad (2)$$

其中 (x', y') 表示第 $l+1$ 层在前向传播时受 (x, y) 位置影响的点, $a \times b$ 为卷积核的大小且

$$\mathbf{z}_{(x',y')}^{l+1} = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sigma(\mathbf{z}^l(x'+a-1, y'+b-1)) \omega(a, b) + \mathbf{b}^{l+1}. \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式中,有 $\delta_{(x,y)}^l = \sum_{x'} \sum_{y'} \delta_{(x',y')}^{l+1} \omega(a, b) \sigma'(\mathbf{z}_{(x,y)}^l)$ 且 a, b 满足 $x'+a-1=x, y'+b-1=y$ 。进而可表示为

$$\delta_{(x,y)}^l = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \delta_{(x+a-1, y+b-1)}^{l+1} \omega(a, b) \sigma'(\mathbf{z}_{(x,y)}^l).$$

于是,误差矩阵 δ^l 可表示为

$$\delta^l = \delta^{l+1} * \text{ROT180}(\mathbf{w}^{l+1}) \odot \sigma'(\mathbf{z}^l), \quad (4)$$

其中 $*$ 号表示卷积运算, \odot 号表示点积运算, ROT180 表示旋转 180 度。从公式(4)中可以看出,第 l 层的误差矩阵 δ^l 是通过将第 $l+1$ 层误差矩阵 δ^{l+1} 上下左右填充 0 元素后旋转 180 度与 \mathbf{w}^{l+1} 做卷积运算,再与 $\sigma'(\mathbf{z}^l)$ 做点积运算得到的。

下面给出公式(4)的详细证明。由定义 1 并根据链式法则知

$$\delta^l = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{z}^l} = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{a}^l} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}^l}{\partial \mathbf{z}^l},$$

且

$$\begin{pmatrix} \nabla a_{11} & \nabla a_{12} & \nabla a_{13} \\ \nabla a_{21} & \nabla a_{22} & \nabla a_{23} \\ \nabla a_{31} & \nabla a_{32} & \nabla a_{33} \end{pmatrix} = \nabla \mathbf{a}^l = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{a}^l} = \frac{\partial \mathbf{z}^{l+1}}{\partial \mathbf{a}^l} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{z}^{l+1}} = \left(\frac{\partial \mathbf{z}^{l+1}}{\partial \mathbf{a}^l} \right) \delta^{l+1}. \quad (5)$$

为了计算 $\nabla \mathbf{a}^l$, 需要计算 $\partial \mathbf{z}^{l+1} / \partial \mathbf{a}^l$ 。根据表达式 $\mathbf{a}^l * \mathbf{w}^{l+1} + \mathbf{b}^{l+1} \mathbf{E} = \mathbf{z}^{l+1}$, 可具体计算各位置的 $\partial \mathbf{z}^{l+1} / \partial a_{(x,y)}^l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{z}^{l+1}}{\partial a_{(1,1)}^l} &= \omega_{(1,1)}, \frac{\partial \mathbf{z}^{l+1}}{\partial a_{(1,2)}^l} = \omega_{(1,2)} + \omega_{(1,1)}, \frac{\partial \mathbf{z}^{l+1}}{\partial a_{(1,3)}^l} = \omega_{(1,2)}, \\ \frac{\partial \mathbf{z}^{l+1}}{\partial a_{(2,1)}^l} &= \omega_{(2,1)} + \omega_{(1,1)}, \frac{\partial \mathbf{z}^{l+1}}{\partial a_{(2,2)}^l} = \omega_{(2,2)} + \omega_{(2,1)} + \omega_{(1,2)} + \omega_{(1,1)}, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

假设第 $l+1$ 层的输入 \mathbf{z}^{l+1} 的误差矩阵为 $\delta^{l+1} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$, 则由公式(5)和(6)可得

$$\begin{cases} \nabla a_{11}^l = \delta_{11} \cdot \omega_{11}, \nabla a_{12}^l = \delta_{11} \cdot \omega_{12} + \delta_{12} \cdot \omega_{11}, \nabla a_{13}^l = \delta_{12} \cdot \omega_{12}, \\ \nabla a_{21}^l = \delta_{11} \cdot \omega_{21} + \delta_{21} \cdot \omega_{11}, \nabla a_{22}^l = \delta_{11} \cdot \omega_{22} + \delta_{12} \cdot \omega_{21} + \delta_{21} \cdot \omega_{12} + \delta_{22} \cdot \omega_{11}, \nabla a_{23}^l = \delta_{12} \cdot \omega_{22} + \delta_{22} \cdot \omega_{12}, \\ \nabla a_{31}^l = \delta_{21} \cdot \omega_{21}, \nabla a_{32}^l = \delta_{21} \cdot \omega_{22} + \delta_{22} \cdot \omega_{21}, \nabla a_{33}^l = \delta_{22} \cdot \omega_{22}. \end{cases}$$

进而,得

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{11} & \delta_{12} & 0 \\ 0 & \delta_{21} & \delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w_{22} & w_{21} \\ w_{12} & w_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla a_{11} & \nabla a_{12} & \nabla a_{13} \\ \nabla a_{21} & \nabla a_{22} & \nabla a_{23} \\ \nabla a_{31} & \nabla a_{32} & \nabla a_{33} \end{pmatrix} = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{a}^l}.$$

此外, $\sigma'(\mathbf{z}^l) = \partial \mathbf{a}^l / \partial \mathbf{z}^l$ 。故公式(4)成立。

3.1.2 二维卷积核权重的更新方法。

第1步,已知第 l 层的误差矩阵 δ^l ,求误差函数对第 l 层参数求导,即求 $\partial C / \partial \mathbf{w}^l$ 和 $\partial C / \partial \mathbf{b}$ 。在前向卷积过程中(如图14所示),能与卷积核(中图)中区域A的参数进行计算并影响到卷积结果的只有左图中的有色部分。以此类推,可计算卷积核其它位置对参数的导数。

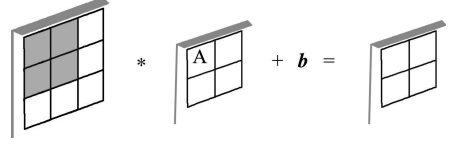


图14 二维卷积运算受卷积核影响图

因此有

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial w_{(1,1)}^l} &= \frac{\partial C}{\partial z_{(1,1)}^l} \frac{\partial z_{(1,1)}^l}{\partial w_{(1,1)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(1,2)}^l} \frac{\partial z_{(1,2)}^l}{\partial w_{(1,1)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(2,1)}^l} \frac{\partial z_{(2,1)}^l}{\partial w_{(1,1)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(2,2)}^l} \frac{\partial z_{(2,2)}^l}{\partial w_{(1,1)}^l} \\ &= \delta_{(1,1)}^l \cdot a_{(1,1)}^{l-1} + \delta_{(1,2)}^l \cdot a_{(1,2)}^{l-1} + \delta_{(2,1)}^l \cdot a_{(2,1)}^{l-1} + \delta_{(2,2)}^l \cdot a_{(2,2)}^{l-1}, \\ \frac{\partial C}{\partial w_{(1,2)}^l} &= \frac{\partial C}{\partial z_{(1,1)}^l} \frac{\partial z_{(1,1)}^l}{\partial w_{(1,2)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(1,2)}^l} \frac{\partial z_{(1,2)}^l}{\partial w_{(1,2)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(2,1)}^l} \frac{\partial z_{(2,1)}^l}{\partial w_{(1,2)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(2,2)}^l} \frac{\partial z_{(2,2)}^l}{\partial w_{(1,2)}^l} \\ &= \delta_{(1,1)}^l \cdot a_{(1,2)}^{l-1} + \delta_{(1,2)}^l \cdot a_{(1,3)}^{l-1} + \delta_{(2,1)}^l \cdot a_{(2,2)}^{l-1} + \delta_{(2,2)}^l \cdot a_{(2,3)}^{l-1}, \\ \frac{\partial C}{\partial w_{(2,1)}^l} &= \frac{\partial C}{\partial z_{(1,1)}^l} \frac{\partial z_{(1,1)}^l}{\partial w_{(2,1)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(1,2)}^l} \frac{\partial z_{(1,2)}^l}{\partial w_{(2,1)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(2,1)}^l} \frac{\partial z_{(2,1)}^l}{\partial w_{(2,1)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(2,2)}^l} \frac{\partial z_{(2,2)}^l}{\partial w_{(2,1)}^l} \\ &= \delta_{(1,1)}^l \cdot a_{(2,1)}^{l-1} + \delta_{(1,2)}^l \cdot a_{(2,2)}^{l-1} + \delta_{(2,1)}^l \cdot a_{(3,1)}^{l-1} + \delta_{(2,2)}^l \cdot a_{(3,2)}^{l-1}, \\ \frac{\partial C}{\partial w_{(2,2)}^l} &= \frac{\partial C}{\partial z_{(1,1)}^l} \frac{\partial z_{(1,1)}^l}{\partial w_{(2,2)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(1,2)}^l} \frac{\partial z_{(1,2)}^l}{\partial w_{(2,2)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(2,1)}^l} \frac{\partial z_{(2,1)}^l}{\partial w_{(2,2)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(2,2)}^l} \frac{\partial z_{(2,2)}^l}{\partial w_{(2,2)}^l} \\ &= \delta_{(1,1)}^l \cdot a_{(2,2)}^{l-1} + \delta_{(1,2)}^l \cdot a_{(2,3)}^{l-1} + \delta_{(2,1)}^l \cdot a_{(3,2)}^{l-1} + \delta_{(2,2)}^l \cdot a_{(3,3)}^{l-1}, \\ \frac{\partial C}{\partial \mathbf{b}} &= \frac{\partial C}{\partial \mathbf{z}^l} \frac{\partial \mathbf{z}^l}{\partial \mathbf{b}} = \sum_x \sum_y \frac{\partial C}{\partial z_{(x,y)}^l} \frac{\partial z_{(x,y)}^l}{\partial \mathbf{b}} = \sum_x \sum_y \delta_{(x,y)}^l. \end{aligned}$$

可简记为

$$\partial C / \partial \mathbf{w}^l = \delta^l * \mathbf{a}^{l-1}, \partial C / \partial \mathbf{b} = \sum_x \sum_y \delta^l.$$

第2步,利用梯度下降法更新卷积核权重,其中 η 为更新步长

$$\mathbf{w}^l \leftarrow \mathbf{w}^l - \eta \cdot \partial C / \partial \mathbf{w}^l, \mathbf{b}^l \leftarrow \mathbf{b}^l - \eta \cdot \partial C / \partial \mathbf{b}^l.$$

3.2 张量卷积核权重的调整方法

3.2.1 张量卷积误差的计算。

先看正向卷积过程。用 d 表示卷积核的组数,用 e^l 和 e^{l+1} 分别表示第 l 层和第 $l+1$ 层图像矩阵的通道数。因卷积核的通道数与被卷积图像矩阵的通道数相同,故 e^l 也是

\mathbf{w}^{l+1} 的通道数。用 h 表示行数, p 表示列数,用 $\mathbf{a}^l \in \mathbf{R}^{h \times p \times e^l}$ 表示第 l 层输出图像矩阵,该矩阵有 e^l 个通道,每个通道上的矩阵大小为 $h \times p$;用 $\mathbf{w}^{l+1} \in \mathbf{R}^{d \times h \times p \times e^l}$ 表示有 d 组卷积核,每组卷积核有 e^l 个通道,每个通道上的卷积核大小为 $h \times p$;用 $\mathbf{z}^{l+1} \in \mathbf{R}^{h \times p \times e^{l+1}}$ 表示第 $l+1$ 层

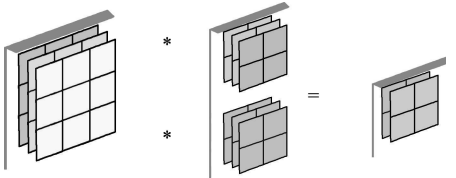


图15 张量卷积过程

输入图像矩阵,该矩阵有 e^{l+1} 个通道,且每个通道上的图像矩阵大小为 $h \times p$;用 $\mathbf{b}^{l+1} \in \mathbf{R}^d$ 表示第 $l+1$ 层的偏差向量。如图15示,左图为 $\mathbf{a}^l \in \mathbf{R}^{3 \times 3 \times 3}$,中图为 $\mathbf{w}^{l+1} \in \mathbf{R}^{2 \times 2 \times 2 \times 3}$,右图为 $\mathbf{z}^{l+1} \in \mathbf{R}^{2 \times 2 \times 2}$ 且 $\mathbf{b}^{l+1} \in \mathbf{R}^2$,则有 $\mathbf{a}^l * \mathbf{w}^{l+1} + \mathbf{b}^{l+1} = \mathbf{z}^{l+1}$ 。显然,张量卷积运算包含二维卷积运算,但二维卷积运算不能代表张量卷积运算。

再看反向传播过程(以图 15 为例)。已知第 $l+1$ 层的误差张量 $\delta^{l+1} \in \mathbf{R}^{2 \times 2 \times 2}$, 求第 l 层的误差张量 $\delta^l \in \mathbf{R}^{3 \times 3 \times 3}$ 。为此, 先求每个位置的误差值 $\delta_{h \times p \times e}^l$

$$\begin{aligned} \delta_{1 \times 1 \times 1}^l &= \frac{\partial C}{\partial z_{(1,1,1)}^l} = \sum_{e^{l+1}} \sum_{x'} \sum_{y'} \frac{\partial C}{\partial z_{(x',y',e^{l+1})}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(x',y',e^{l+1})}^{l+1}}{\partial z_{(1,1,1)}^l} \\ &= \sum_{x'} \sum_{y'} \frac{\partial C}{\partial z_{(x',y',1)}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(x',y',1)}^{l+1}}{\partial z_{(1,1,1)}^l} + \sum_{x'} \sum_{y'} \frac{\partial C}{\partial z_{(x',y',2)}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(x',y',2)}^{l+1}}{\partial z_{(1,1,1)}^l} \\ &= \frac{\partial C}{\partial z_{(1,1,1)}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(1,1,1)}^{l+1}}{\partial z_{(1,1,1)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(1,1,2)}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(1,1,2)}^{l+1}}{\partial z_{(1,1,1)}^l} \\ &= \delta_{(1,1,1)}^{l+1} \cdot w_{(1,1,1)}^{l+1} \cdot \sigma'(z_{(1,1,1)}^l) + \delta_{(1,1,2)}^{l+1} \cdot w_{(2,1,1)}^{l+1} \cdot \sigma'(z_{(1,1,1)}^l), \\ \delta_{1 \times 2 \times 1}^l &= \frac{\partial C}{\partial z_{(1,2,1)}^l} = \sum_{e^{l+1}} \sum_{x'} \sum_{y'} \frac{\partial C}{\partial z_{(x',y',e^{l+1})}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(x',y',e^{l+1})}^{l+1}}{\partial z_{(1,2,1)}^l} \\ &= \sum_{x'} \sum_{y'} \frac{\partial C}{\partial z_{(x',y',1)}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(x',y',1)}^{l+1}}{\partial z_{(1,2,1)}^l} + \sum_{x'} \sum_{y'} \frac{\partial C}{\partial z_{(x',y',2)}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(x',y',2)}^{l+1}}{\partial z_{(1,2,1)}^l} \\ &= \frac{\partial C}{\partial z_{(1,1,1)}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(1,1,1)}^{l+1}}{\partial z_{(1,2,1)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(1,2,1)}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(1,2,1)}^{l+1}}{\partial z_{(1,2,1)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(1,1,2)}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(1,1,2)}^{l+1}}{\partial z_{(1,2,1)}^l} + \frac{\partial C}{\partial z_{(1,2,2)}^{l+1}} \cdot \frac{\partial z_{(1,2,2)}^{l+1}}{\partial z_{(1,2,1)}^l} \\ &= \delta_{(1,1,1)}^{l+1} \cdot w_{(1,1,2,1)}^{l+1} \cdot \sigma'(z_{(1,2,1)}^l) + \delta_{(1,2,1)}^{l+1} \cdot w_{(1,1,1,1)}^{l+1} \cdot \sigma'(z_{(1,2,1)}^l) \\ &\quad + \delta_{(1,1,2)}^{l+1} \cdot w_{(2,1,2,1)}^{l+1} \cdot \sigma'(z_{(1,2,1)}^l) + \delta_{(1,2,2)}^{l+1} \cdot w_{(2,1,1,1)}^{l+1} \cdot \sigma'(z_{(1,2,1)}^l). \end{aligned}$$

以此类推, 可得各位置的误差值

$$\delta_{(x,y,e)}^l = \sum_{e^{l+1}} \sum_{x'} \sum_{y'} \delta_{(x',y',e^{l+1})}^{l+1} \cdot w_{(d,h,p,e)}^{l+1} \cdot \sigma'(z_{(x,y,e)}^l),$$

其中 $h \times p$ 为张量卷积核中一个二维卷积核的大小且满足 $x' + h - 1 = x, y' + p - 1 = y$ 。进而, 可表示为

$$\delta_{(x,y,e)}^l = \sum_{e^{l+1}} \sum_h \sum_p \delta_{(x-h+1,y-p+1,e^{l+1})}^{l+1} \cdot w_{(d,h,p,e)}^{l+1} \cdot \sigma'(z_{(x,y,e)}^l).$$

于是, 第 l 层每个通道的误差矩阵可表示为

$$\delta_{e^l}^l = \sum_d \sum_{e^{l+1}} \delta_{e^{l+1}}^{l+1} * w_{d,e^l}^{l+1} \odot \sigma'(z_{e^l}^l). \quad (7)$$

同 3.1.1 节, 第 l 层每个通道的误差矩阵是通过将第 $l+1$ 层各通道误差矩阵 $\delta_{e^{l+1}}^{l+1}$ 上下左右填充 0 后与 w_{d,e^l}^{l+1} 分别进行卷积运算, 再与 $\sigma'(z_{e^l}^l)$ 进行点积运算得到的。

3.2.2 张量卷积核权重的更新方法。

第一步, 已知第 l 层各通道的误差矩阵 δ^l , 求第 l 层的参数导数 $\partial C / \partial w^l$ 和 $\partial C / \partial b$ 。类似于 3.1.2 节, 在前向卷积过程中(如图 16 所示), 能与卷积核进行计算并影响到卷积后结果(右图区域 A)的只有左图第一通道的黄色部分。

因此有 $\partial C / \partial w^l = \delta^l * a^{l-1}, \partial C / \partial b = \sum_x \sum_y \delta^l$ 。

第二步, 利用梯度下降法更新各通道上卷积核权重

$$w \leftarrow w - \eta \frac{\partial C}{\partial w}, b \leftarrow b - \eta \frac{\partial C}{\partial b}.$$

第三步, 将更新后的各通道卷积核组合成 4 维张量。

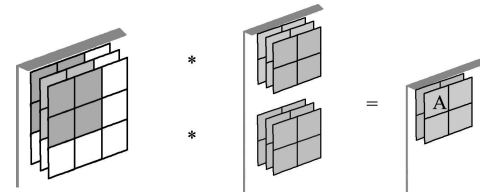


图 16 张量卷积受卷积核影响图

4 结论

卷积运算作为卷积神经网络的一部分常用于 CNN 模型中, 但卷积运算自身对彩色图像的质量有何影响, 这方面的研究却不多见。基于实证分析, 研究了卷积运算对“干净”彩图和噪声彩图的影响。对“干净”彩图, 卷积运算降低了图像质量, 导致图像模糊化。对噪声彩图, 卷积运算可以起到降噪的作用, 提高图像的质量, 但降噪效果的好坏严重依赖于卷积核的选择。为了解决这一问题, 进而研究了调整卷积核权重的方法。在本文的基础上利用卷积神经网络对噪声彩图的分类, 识别和降噪, 这将是我们的下一步工作。

参 考 文 献

- [1] Dabov K, Foi A, Katkovnik V, et al. Image denoising by sparse 3-d transform-domain collaborative filtering[J]. *Image Process*, 2007, 16(8): 2080-2095.
- [2] Elad M, Aharon M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries[J]. *Image Process*, 2006, 15(12): 3736-3745.
- [3] Zhang R, Feng X C, Yang L X, et al. A global sparse gradient based coupled system for image denoising[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2019, 78(11): 3692-3711.
- [4] 张玉征, 杨词慧, 林泉. 基于梯度特征的双核非局部均值降噪算法[J]. *计算机应用研究*, 2019, 36(5): 1573-1576.
- [5] Khan A, Waqas M, Ali M R, et al. Image de-noising using noise ratio estimation, k-means clustering and non-local means-based estimator[J]. *Computers and Electrical Engineering*, 2016, 54: 370-381.
- [6] 江珊珊, 杨静, 范丽亚. 基于 PDEs 的图像特征提取方法[J]. *山东大学学报(工学版)*, 2018, 48(4): 27-36.
- [7] 雷田田, 王振, 范丽亚, 等. 不同累积贡献率下 PDEs 对 CCA 的影响[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2020, 33(3): 12-21.
- [8] 王振, 雷田田, 范丽亚, 等. PDEs 对四种图像降噪降维方法的影响[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2020, 33(4): 14-25.
- [9] 江珊珊, 范丽亚. PDEs 对 RSVM 中模型参数的影响[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2019, 32(3): 36-45.
- [10] Schmidhuber J. Deep learning in neural networks: An overview[J]. *Neural Networks*, 2015, 61: 85-117.
- [11] Yu S, Ma J, Wang W. Deep learning for denoising[J]. *Geophysics*, 2019, 84(6): V333-V350.
- [12] Farooque M A, Rohankar J S. Survey on various noises and techniques for denoising the color image[J]. *International Journal of Application or Innovation in Engineering & Management*, 2013, 2(11): 217-221.
- [13] Fu B, Zhao X, Li Y, et al. A convolutional neural networks denoising approach for salt and pepper noise[J]. *Multimedia Tools and Applications*, 2019, 78(21): 30707-30721.
- [14] Khaw H Y, Soon F C, Chuah J H, et al. Image noise types recognition using convolutional neural network with principal components analysis[J]. *IET Image Processing*, 2017, 11(12): 1238-1245.
- [15] Hsu C C, Lin C W. Cnn-based joint clustering and representation learning with feature drift compensation for large-scale image data[J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2017, 20(2): 421-429.
- [16] Zhang K, Zuo W, Chen Y, et al. Beyond a gaussian denoiser: residual learning of deep cnn for image denoising[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2017, 26(7): 3142-3155.
- [17] Heinrich M P, Stille M, Buzug T M. Residual u-net convolutional neural network architecture for low-dose ct denoising[J]. *Current Directions in Biomedical Engineering*, 2018, 4(1): 297-300.
- [18] Peng Y, Zhang L, Liu S, et al. Dilated residual networks with symmetric skip connection for image denoising[J]. *Neurocomputing*, 2019, 345: 67-76.
- [19] Tian C W, Fei L K, Zheng W X, et al. Deep learning on image denoising: an overview[J]. *Neural Networks*, 2020, 131: 251-275.
- [20] Quan Y H, Chen Y X, Shao Y Z, et al. Image denoising using complex-valued deep CNN[J]. *Pattern Recognition*, 2021, 111: 107639.
- [21] He K M, Zhang X Y, Ren S Q, et al. Delving Deep into Rectifiers: Surpassing Human-Level Performance on ImageNet Classification[C]. // *IEEE International Conference on Computer Vision*, 2015.
- [22] Ssfna Asiq M S, Sam Emmanuel. Polyscale gradients residual demosaicking[J]. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, 2018, (10): 554-561.