文章编号　1672-6634(2021)06-0001-06　　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2021.06.001

强 L -凸结构的新刻画

赵方方,庞　斌

(北京理工大学 数学与统计学院,北京 102488)

摘　要　为了刻画强 L -凸结构,本文借助 L -子集之间的模糊包含关系和由其决定的模糊下确界,分别引入了 L -格序凸结构、L -格序凸包算子和 L -封闭关系,并建立它们与强 L -凸结构之间的关系。结果表明,强 L -凸空间范畴、L -格序凸空间范畴、L -格序凸包空间范畴和 L -封闭空间范畴是同构的。

关键词　L -凸结构,L -凸包算子,L -封闭关系,范畴同构

中图分类号　O189

文献标识码　A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)

New Characterizations of Strong L -convex Structures

ZHAO Fangfang,PANG Bin

(School of Mathematics and Statistics,Beijing Institute of Technology,Beijing 102488,China)

Abstract　In order to characterize strong L -convex structures, the concepts of L -ordered convex structures, L -ordered hull operators and L -enclosed relations were introduced by means of fuzzy inclusions orders between L -subsets and their determined fuzzy infimums respectively, and their relations with strong L -convex structures were established. It is finally shown that the categories of strong L -convex spaces, L -ordered convex spaces, L -ordered hull spaces and L -enclosed spaces are isomorphic.

Key words　L -convex structure, L -hull operator, L -enclosed relation, categorical isomorphism

0　引言

凸结构是通过抽象不同研究框架下不同类型的凸集的共同特征而引入的一种空间结构。由于凸集在各个领域的广泛存在性,凸结构理论与众多的数学结构理论紧密相关[1]。随着模糊集理论的发展,尤其受到模糊拓扑学的影响,凸结构的概念也被推广到了模糊情形下,进而产生了多种不同类型的模糊凸结构,比较具有代表性的模糊凸结构主要有 L -凸结构[2]、M -模糊化凸结构[3]和 (L,M) -模糊凸结构[4](L 和 M 均代表所选取的格值背景)。当前对于模糊凸结构理论的研究也都是分别基于三种模糊凸结构框架进行开展。

凸包算子在凸结构理论中起到至关重要的作用,原因体现在两个方面。一方面是可以用凸包算子刻画凸结构,进而将其作为研究凸结构空间性质的基本工具;另一方面是凸包算子可以作为联系凸结构和其它与

收稿日期:2021-04-10

基金项目:国家自然科学基金项目(12071033,11701122)资助

通讯作者:庞斌,男,汉族,博士,副研究员,博士生导师,研究方向:模糊凸结构理论和模糊拓扑学,E-mail:pangbin1205@163.com。

之相关的空间结构之间的桥梁。在模糊凸结构理论中,模糊凸包算子也应该起到相应的作用。然而,在 L-凸结构理论中,引入满足以上两个方面要求的 L-凸包算子相较于经典凸包算子却困难得多,这也导致了 L-凸结构理论曾经在很长一段时间内一直没有取得实质性的研究进展。针对这一问题,庞斌等从多个角度系统研究 L-凸结构框架下的 L-凸包算子[5,6]。在此基础上,沈冲和吴修云等分别从 Domain 理论和模糊集之间二元关系的角度对 L-凸结构做了进一步的刻画[7,8]。同时,庞斌、李令强和吴修云等还将范畴论的方法与模糊凸结构理论相结合,借助范畴的语言描述不同类型的模糊凸结构之间的关系[9,10,11,12]。基于上述奠基性的工作,L-凸结构理论的研究正在逐步开展。

考虑到模糊集之间的模糊包含序[13,14],庞斌和史福贵引入了强 L-凸结构的概念[8],并给出了相应的 L-序凸包算子刻画。众所周知,模糊幂集上赋予模糊包含序便成为一个模糊完备格,而模糊完备格中的模糊上确界和下确界可以用来描述模糊集族对任意并和任意交的封闭性。受此启发,本文中将借助模糊集族的模糊下确界来描述 L-凸结构理论中相关概念对任意交的封闭性。具体地,将模糊集族的模糊下确界与凸结构、凸包算子和封闭关系的概念相结合,引入 L-格序凸结构、L-格序凸包算子和 L-封闭关系。然后,从范畴的角度,界定它们与强 L-凸结构之间的关系。

1 预备知识

文中总假设 X 是一个非空集合,$(L,*,\rightarrow,\vee,\wedge,\top,\bot)$ 是完备剩余格[15]。X 上的 L-子集全体记为 L^X。L^X 上赋予逐点序仍然是一个完备剩余格,最大元和最小元分别记为 $\overline{\top}$ 和 $\overline{\bot}$。若 $\{A_j\}_{j\in J}\subseteq L^X$ 满足:对任意的 $i,k\in J$,存在 $j\in J$,使得 $A_i\vee A_k\leqslant A_j$,则称 $\{A_j\}_{j\in J}$ 是 L^X 的定向子集,记为 $\{A_j\}_{j\in J}\subseteq^d L^X$。借助 L 上蕴涵运算 $\rightarrow$,可以定义 L-子集的模糊包含序 $S:L^X\times L^X\rightarrow L$ 如下:$S(A,B)=\bigwedge\limits_{x\in X}(A(x)\rightarrow B(x))$。此时,$(L^X,S)$ 是一个模糊偏序集。对于 L^X 的一个 L-子集 $\mathcal{A}:L^X\rightarrow L$,在模糊预序集 (L^X,S) 中的下确界是 $\sqcap\mathcal{A}=\bigwedge\limits_{B\in L^X}(\mathcal{A}(B)\rightarrow B)$。

定 Y 也是一个非空集合,$f:X\rightarrow Y$ 是一个映射。f 的查德扩张记为 $f_L^{\rightarrow}:L^X\rightarrow L^Y$ 和 $f_L^{\leftarrow}:L^Y\rightarrow L^X$,具体定义分别为 $f_L^{\rightarrow}(A)(y)=\bigvee\limits_{f(x)=y}A(x)$ 和 $f_L^{\leftarrow}(B)=B\circ f$。

下面给出本文要刻画的强 L-凸结构和 L-序凸包算子的概念[8]。

定义 1 设 $C\subseteq L^X$。若 C 满足

(LCO1) $\overline{\top},\overline{\bot}\in C$;

(LCO2) $\forall\ \{A_i\}_{i\in I}\subseteq C$, $\bigwedge\limits_{i\in I}A_i\in C$;

(LCO3) $\forall\ \{A_j\}_{j\in J}\subseteq^d C$, $\bigvee\limits_{j\in J}A_j\in C$;

(LCO4) $\forall a\in L,\forall A\in C,a\rightarrow A\in C$,

则称 C 是 X 上的一个强 L-凸结构。序对 (X,C) 称为一个强 L-凸空间。

定义 2 若映射 $f:(X,C_X)\rightarrow(Y,C_Y)$ 满足:$B\in C_Y$ 蕴涵 $f_L^{\leftarrow}(B)\in C_X$,则称 f 是一个 L-凸保持映射。

由强 L-凸空间作为对象类,L-凸保持映射作为态射类构成的范畴记为 SL-CS。

定义 3 若映射 $c:L^X\rightarrow L^X$ 满足

(LCL1) $c(\overline{\bot})=\overline{\bot}$;

(LCL2) $\forall A\in L^X,c(A)\geqslant A$;

(LCL3) $\forall A\in L^X,c(c(A))\leqslant c(A)$;

(LCL4) $\forall A,B\in L^X,S(A,B)\leqslant S(c(A),c(B))$,

则称 c 是 X 上的一个 L-序凸包算子。序对 (X,c) 称为一个 L-序凸包空间。

定义 4 若映射 $f:(X,c_X)\rightarrow(Y,c_Y)$ 满足:$f_L^{\rightarrow}(c_X(A))\leqslant c_Y(f_L^{\rightarrow}(A))$,则称 f 是一个 L-凸包保持映射。

由 L-序凸包空间作为对象类,L-凸包保持映射作为态射类构成的范畴记为 L-OCL。

定理 1 SL-CS 和 L-OCL 同构。

2　L -格序凸结构和 L -格序凸包算子

在本节中，主要借助 (L^X, S) 中的下确界和 L -子集的模糊包含序，引入一种新型的 L -凸结构和 L -凸包算子，并证明它们分别等价于强 L -凸结构和 L -序凸包算子，从而给出 L -凸结构的新刻画。

定义 5　设 $C \subseteq L^X$。若 C 满足

(LCO1) $\overline{\top}, \overline{\bot} \in C$；

(LCO3) $\forall \{A_j\}_{j\in J} \subseteq^d C, \bigvee_{j\in J} A_j \in C$；

(LCO5) $\forall \mathcal{A}: C \to L, \sqcap\mathcal{A} \in C$，

则称 C 是 X 上的一个 L- 格序凸结构。序对 (X, C) 称为一个 L -格序凸空间。

由 L -格序凸空间作为对象类，L —凸保持映射作为态射类构成的范畴记为 L -OCS。

命题 1　设 $C \subseteq L^X$。则 C 满足 (LCO5) 当且仅当 C 满足 (LCO2)＋(LCO4)。

证明　充分性显然，下证必要性。

$\forall \{A_i\}_{i\in I} \subseteq C, \forall a \in L, \forall A \in C$，定义 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2: C \to L$ 为 $\forall B \in C, \mathcal{A}_1(B) = \begin{cases} \top, B \in \{A_i\}_{i\in I}; \\ \bot, B \notin \{A_i\}_{i\in I}. \end{cases}$

$\mathcal{A}_2(B) = \begin{cases} a, B = A; \\ \bot, B \neq A. \end{cases}$ 则 $\bigwedge_{i\in I} A_i = \bigwedge_{i\in I} (\top \to A_i) = \bigwedge_{B\in C} (\mathcal{A}_1(B) \to B) = \sqcap\mathcal{A}_1 \in C$ 且 $a \to A = \bigwedge_{B\in C} (\mathcal{A}_2(B) \to B) = \sqcap\mathcal{A}_2 \in C$。

推论 1　L -OCS 和SL -CS 同构。

定义 6　若映射 $c: L^X \to L^X$ 满足

(LCL1) $c(\overline{\bot}) = \overline{\bot}$；

(LCL2) $\forall A \in L^X, c(A) \geqslant A$；

(LCL5) $\forall A, B \in L^X, S(A, c(B)) \leqslant S(c(A), c(B))$，

则称 c 是 X 上的一个 L -格序凸包算子。序对 (X, c) 称为一个 L -格序凸包空间。

由 L -格序凸包空间作为对象类，L -凸包保持映射作为态射类构成的范畴记为 L -OHU。

命题 2　设 $c: L^X \to L^X$ 是一个映射且 c 满足 (LCL2)。则 c 满足 (LCL5) 当且仅当 c 满足 (LCL3)＋(LCL4)。

证明　必要性，任取 $A, B \in L^X$，则有

$$S(A, B) \leqslant S(A, c(B)) \leqslant S(c(A), c(B)) \text{ and } \top = S(c(A), c(A)) \leqslant S(c(c(A)), c(A))。$$

充分性 任取 $A, B \in L^X$，则有

$$S(A, c(B)) \leqslant S(c(A), c(c(B))) \leqslant S(c(A), c(B))。$$

推论 2　L -OHU 和 L -OCL 同构。

3　L -格序凸包算子和 L -封闭关系

本节主要借助 L -子集的模糊包含关系，引入 L -子集之间的一种二元关系，进而给出强 L -凸结构的一种新刻画。

定义 7　若映射 $\mathfrak{R}: L^X \times L^X \to L$ 满足

(LER1) $\mathfrak{R}(\overline{\bot}, \overline{\bot}) = \top$；

(LER2) $\mathfrak{R}(A, B) \leqslant S(A, B)$；

(LER3) $\mathfrak{R}(B, \sqcap\mathcal{A}) = \bigwedge_{A\in L^X} (\mathcal{A}(A) \to \mathfrak{R}(B, A))$；

(LER4) $\mathfrak{R}(A, B) \leqslant \mathfrak{R}(B, C) \to \mathfrak{R}(A, C)$；

(LER5) $\mathfrak{R}(A, B) \leqslant \bigvee_{C\in L^X} (\mathfrak{R}(A, C) * \mathfrak{R}(C, B))$；

(LER6) $\mathfrak{R}(a\rightarrow A,B)\geqslant a*\mathfrak{R}(A,B)$,

则称 $\mathfrak{R}$ 是 X 上的一个 L -封闭关系。序对 $(X,\mathfrak{R})$ 称为一个 L -封闭空间。

定义 8　若映射 $f:(X,\mathfrak{R}_X)\rightarrow(Y,\mathfrak{R}_Y)$ 满足:$\mathfrak{R}_X(f_L^{\leftarrow}(A),f_L^{\leftarrow}(B))\geqslant\mathfrak{R}_Y(A,B)$,则称 f 是 L -封闭关系保持映射。

由 L -封闭空间作为对象类,L -封闭关系保持映射作为态射类构成的范畴记为 L -ERS 。

接下来,我们将建立 L -封闭关系和 L -格序凸包算子的联系,进而得到 L -封闭关系和强 L -凸结构的联系。

命题 3　设 $(X,\mathfrak{R})$ 是一个 L -封闭空间。定义 $c^{\mathfrak{R}}:L^X\rightarrow L^X$ 为 $\forall A\in L^X$, $c^{\mathfrak{R}}(A)=\bigwedge\limits_{B\in L^X}(\mathfrak{R}(A,B)\rightarrow B)$ 。则 $c^{\mathfrak{R}}$ 是 X 上的一个 L -格序凸包算子。

证明　由命题 2 可知,只需证明 $c^{\mathfrak{R}}$ 满足(LCL1)-(LCL4)。

(LCL1) $c^{\mathfrak{R}}(\overline{\bot})=\bigwedge\limits_{B\in L^X}(\mathfrak{R}(\overline{\bot},B)\rightarrow B)\leqslant\mathfrak{R}(\overline{\bot},\overline{\bot})\rightarrow\overline{\bot}=\mathfrak{R}\rightarrow\overline{\bot}=\overline{\bot}$;

(LCL2) $c^{\mathfrak{R}}(A)=\bigwedge\limits_{B\in L^X}(\mathfrak{R}(A,B)\rightarrow B)\geqslant\bigwedge\limits_{B\in L^X}(S(A,B)\rightarrow B)\geqslant A$;

(LCL3) 任取 $A,B\in L^X$,则有

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(c^{\mathfrak{R}}(A),B)&=\mathfrak{R}(\bigwedge_{C\in L^X}(\mathfrak{R}(A,C)\rightarrow C),B))\\&\geqslant\bigvee_{C\in L^X}\mathfrak{R}(\mathfrak{R}(A,C)\rightarrow C,B)\\&\geqslant\bigvee_{C\in L^X}(\mathfrak{R}(A,C)*\mathfrak{R}(C,B))((\text{LER6}))\\&\geqslant\mathfrak{R}(A,B).((\text{LER5})),\end{aligned}$$

从而, $c^{\mathfrak{R}}(c^{\mathfrak{R}}(A))=\bigwedge\limits_{B\in L^X}(\mathfrak{R}(c^{\mathfrak{R}}(A),B)\rightarrow B)\leqslant\bigwedge\limits_{B\in L^X}(\mathfrak{R}(A,B)\rightarrow B)=c^{\mathfrak{R}}(A)$ 。

(LCL4) 任取 $A,B\in L^X$,则有

$$\begin{aligned}S(c^{\mathfrak{R}}(A),c^{\mathfrak{R}}(B))&=S(\bigwedge_{D\in L^X}(\mathfrak{R}(A,D)\rightarrow D),\bigwedge_{C\in L^X}(\mathfrak{R}(B,C)\rightarrow C))\\&\geqslant\bigwedge_{C\in L^X}S(\mathfrak{R}(A,C)\rightarrow C,\mathfrak{R}(B,C)\rightarrow C)\\&\geqslant\bigwedge_{C\in L^X}(\mathfrak{R}(B,C)\rightarrow\mathfrak{R}(A,C))\\&\geqslant S(A,B)。\end{aligned}$$

命题 4　若 $f:(X,\mathfrak{R}_X)\rightarrow(Y,\mathfrak{R}_Y)$ 是 L -封闭关系保持映射,则 $f:(X,c^{\mathfrak{R}_X})\rightarrow(Y,c^{\mathfrak{R}_Y})$ 是 L -凸包保持映射。

证明　由于 $f:(X,\mathfrak{R}_X)\rightarrow(Y,\mathfrak{R}_Y)$ 是 L -封闭关系保持映射,可以得到 $\forall B,C\in L^Y$, $\mathfrak{R}_X(f_L^{\leftarrow}(B),f_L^{\leftarrow}(C))\geqslant\mathfrak{R}_Y(B,C)$ 。从而,对于任意的 $A\in L^X$,有

$$\begin{aligned}f_L^{\leftarrow}(c^{\mathfrak{R}_Y}(f_L^{\rightarrow}(A)))&=\bigwedge_{B\in L^Y}f_L^{\leftarrow}(\mathfrak{R}_Y(f_L^{\rightarrow}(A),B)\rightarrow B)\\&=\bigwedge_{B\in L^Y}(\mathfrak{R}_Y(f_L^{\rightarrow}(A),B)\rightarrow f_L^{\leftarrow}(B))\\&\geqslant\bigwedge_{B\in L^Y}(\mathfrak{R}_X(f_L^{\leftarrow}(f_L^{\rightarrow}(A)),f_L^{\leftarrow}(B))\rightarrow f_L^{\leftarrow}(B))\\&\geqslant\bigwedge_{B\in L^Y}(\mathfrak{R}_X(A,f_L^{\leftarrow}(B))\rightarrow f_L^{\leftarrow}(B))\\&\geqslant\bigwedge_{D\in L^X}(\mathfrak{R}_X(A,D)\rightarrow D)\\&=c^{\mathfrak{R}_X}(A)。\end{aligned}$$

故 $f:(X,c^{\mathfrak{R}_X})\rightarrow(Y,c^{\mathfrak{R}_Y})$ 是 L -凸包保持映射。

命题 5　设 (X,c) 是一个 L -格序凸包空间。定义 $\mathfrak{R}^c:L^X\times L^X\rightarrow L$ 为 $\forall A,B\in L^X$, $\mathfrak{R}^c(A,B)=S(c(A),B)$ 。则 $\mathfrak{R}^c$ 是 X 上的一个 L -封闭关系。

证明　只需验证 $\mathfrak{R}^c$ 满足(LER1)-(LER6)。(LER1)显然。

(LER2) 任取 $A,B\in L^X$,则有 $\mathfrak{R}^c(A,B)=S(c(A),B)\leqslant S(A,B)$ 。

(LER3) 任取 $B\in L^X$ 和 $\mathcal{A}:L^X\rightarrow L$,则有

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^c(B,\sqcap\mathcal{A}) &= S(c(B),\sqcap\mathcal{A}) = S(c(B),\bigwedge_{A\in L^X}(\mathcal{A}(A)\to A))\\ &= \bigwedge_{A\in L^X} S(c(B),\mathcal{A}(A)\to A)\\ &= \bigwedge_{A\in L^X}(\mathcal{A}(A)\to S(c(B),A))\\ &= \bigwedge_{A\in L^X}(\mathcal{A}(A)\to \mathfrak{R}^c(B,A))。\end{aligned}$$

（LER4）任取 $A,B,C\in L^X$，则有

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^c(B,C)\to\mathfrak{R}^c(A,C) &= S(c(B),C)\to S(c(A),C)\\ &\geqslant S(c(A),c(B))\\ &\geqslant S(A,B)。\end{aligned}$$

（LER5）任取 $A,B\in L^X$，则有

$$\begin{aligned}\bigvee_{C\in L^X}(\mathfrak{R}^c(A,C)*\mathfrak{R}^c(C,B)) &= \bigvee_{C\in L^X}(S(c(A),C)*S(c(C),B))\\ &\geqslant S(c(A),c(A))*S(c(c(A)),B)\\ &= S(c(c(A)),B)\\ &\geqslant S(c(A),B)\\ &= \mathfrak{R}^c(A,B)。\end{aligned}$$

（LER6）任取 $A,B\in L^X$ 和 $a\in L$，则有

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^c(A,B)\to\mathfrak{R}^c(a\to A,B) &= S(c(A),B)\to S(c(a\to A),B)\\ &\geqslant S(c(a\to A),c(A))\\ &\geqslant S(a\to A,A)\\ &\geqslant a。\end{aligned}$$

从而，$a*\mathfrak{R}^c(A,B)\leqslant\mathfrak{R}^c(a\to A,B)$。

命题 6　若 $f:(X,c_X)\to(Y,c_Y)$ 是 L-凸包保持映射，则 $f:(X,\mathfrak{R}^{c_X})\to(Y,\mathfrak{R}^{c_Y})$ 是 L-封闭关系保持映射。

证明　由 $f:(X,c_X)\to(Y,c_Y)$ 是 L-凸包保持映射可知，$\forall A\in L^X$，$f_L^{\to}(c_X(A))\leqslant c_Y(f_L^{\to}(A))$。从而，对于任意的 $B,C\in L^X$，有

$\mathfrak{R}^{c_X}(f_L^{\leftarrow}(B),f_L^{\leftarrow}(C)) = S(c_X(f_L^{\leftarrow}(B)),f_L^{\leftarrow}(C)) = S(f_L^{\to}(c_X(f_L^{\leftarrow}(B))),C)\geqslant S(c_Y(f_L^{\to}(f_L^{\leftarrow}(B))),C)\geqslant S(c_Y(B),C) = \mathfrak{R}^{c_Y}(B,C)$。

故 $f:(X,\mathfrak{R}^{c_X})\to(Y,\mathfrak{R}^{c_Y})$ 是 L-封闭关系保持映射。

引理 1　设 (X,c) 是一个 L-格序凸包空间。则有 $c(B,a\to A)=a\to c(B,A)$。

证明　定义 $\mathcal{A}:L^X\to L$ 为 $\forall C\in L^X$，$\mathcal{A}(C)=\begin{cases}a, C=A;\\ \bot, C\neq A.\end{cases}$。则有 $\sqcap\mathcal{A}=\bigwedge_{C\in L^X}(\mathcal{A}(C)\to C)=\bigwedge_{C\in\{A\}}(\mathcal{A}(C)\to C)=a\to A$。从而，

$$c(B,a\to A)=c(B,\sqcap\mathcal{A})=\bigwedge_{C\in L^X}(\mathcal{A}(C)\to c(B,C))=a\to c(B,A)。$$

命题 7　L-ERS 和 L-OHU 同构。

证明　根据命题 4-6，只需证明 (1) $c^{\mathfrak{R}^c}=c$ 和 (2) $\mathfrak{R}^{c^{\mathfrak{R}}}=\mathfrak{R}$。

(1) 任取 $A\in L^X$。有 $c^{\mathfrak{R}^c}(A)=\bigwedge_{B\in L^X}(\mathfrak{R}^c(A,B)\to B)=\bigwedge_{B\in L^X}(S(c(A),B)\to B)\geqslant c(A)$，$c^{\mathfrak{R}^c}(A)=\bigwedge_{B\in L^X}(S(c(A),B)\to B)\leqslant S(c(A),c(A))\to c(A)=c(A)$。

(2) 任取 $A\in L^X$。根据引理 1，首先有

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(A,c^{\mathfrak{R}}(A)) &= \mathfrak{R}(A,\bigwedge_{B\in L^X}(\mathfrak{R}(A,B)\to B))\\ &= \bigwedge_{B\in L^X}\mathfrak{R}(A,(\mathfrak{R}(A,B)\to B))\\ &= \bigwedge_{B\in L^X}(\mathfrak{R}(A,B)\to\mathfrak{R}(A,B))\\ &= \top。\end{aligned}$$

从而,对于任意的 $A,B\in L^X$,得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^{c^{\mathfrak{R}}}(A,B) &= S(c^{\mathfrak{R}}(A),B)\\ &\leqslant \mathfrak{R}(A,c^{\mathfrak{R}}(A))\to\mathfrak{R}(A,B)\\ &=\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}(A,B)\\ &=\mathfrak{R}(A,B),\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^{c^{\mathfrak{R}}}(A,B) &= S(c^{\mathfrak{R}}(A),B)\\ &= S(\bigwedge_{C\in L^X}(\mathfrak{R}(A,C)\to C),B)\\ &\geqslant S(\mathfrak{R}(A,B)\to B,B)\\ &\geqslant \mathfrak{R}(A,B)。\end{aligned}$$

故,$\mathfrak{R}^{c^{\mathfrak{R}}}=\mathfrak{R}$,得证。

推论 3 SL-CS,L-OCS,L-OCL,L-OHU 和 L-ERS 同构。

4 结语

基于 L-子集之间的模糊包含关系研究 L-凸结构是当前模糊凸结构理论研究的一种新方法。本文在此基础上,利用论域上 L-集族的模糊下确界定义研究 L-凸结构理论中相关概念对任意交的封闭性,并与传统的定义方式相比较,发现模糊包含序的方式和模糊下确界的方式是协调的。文中具体将模糊下确界的思想应用到了 L-凸结构、L-凸包算子和 L-封闭关系的定义中,并从范畴的角度证明了这些概念之间的范畴同构。作为此种思想方法的进一步应用,还可以考虑凸结构定义中定向并封闭的模糊情形,即用定向 L-集族的模糊上确界定义 L-凸结构对定向并的封闭性。

参考文献

[1] Van De Vel M L J. Theory of convex structures[M], North-Holland, Amsterdam, 1993.

[2] Rosa M V. On fuzzy topology fuzzy convexity spaces and fuzzy local convexity[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 62: 97-100.

[3] Shi F G, Xiu Z Y. A new approach to the fuzzification of convex structures[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, ID: 249183, 12 pages.

[4] Shi F G, Xiu Z Y. (L,M)-fuzzy convex structures[J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 2017, 10(7): 3655-3669.

[5] Pang B, Zhao Y, Xiu Z Y. A new definition of order relation for the introduction of algebraic fuzzy closure operators[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2018, 92:87-96.

[6] Pang B, Shi F G. Fuzzy counterparts of hull operators and interval operators in the framework of L-convex spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2019, 369: 20-39.

[7] Shen C, Shi F G. Characterizations of L-convex spaces via domain theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 380: 44-63.

[8] Wu X Y, Liu Q, Liao C Y, et al. L-topological derived internal (resp. enclosed) relation spaces[J]. Filomat, Accepted.

[9] Pang B, Shi F G. Subcategories of the category of L-convex spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 313: 61-74.

[10] Jin Q, Li L Q. On the embedding of L-convex spaces in stratified L-convex spaces[J]. SpringerPlus, 2016, 5(1): 1610.

[11] Li L Q. On the category of enriched (L,M)-convex spaces[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017, 33: 3209-3216.

[12] Wu X Y, Li E Q. Category and subcategories of (L,M)-fuzzy convex spaces[J]. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2019, 16(1): 173-190.

[13] B lohálvek R. Fuzzy relation systems, Foundation and Principles[M]. Kluwer Academic, Plenum Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2002.

[14] 方进明. 剩余格与模糊集[M]. 北京:科学出版社,2012.

[15] Hájek P. Metamathematics of fuzzy logic[M]. Kluer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.