文章编号 1672-6634(2021)04-0015-08 **DOI** 10.19728/j.issn1672-6634.2021.04.003

非线性麦克斯韦方程最优系统及精确解

郭增鑫,胡彦鑫,辛祥鹏

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘 要 研究一类二阶非线性麦克斯韦方程的对称约化以及精确解问题。首先利用李群方法求出该方程的向量场,进而方程的对称也可以得到,并通过求解常微分方程初值问题得到了该方程的对称群。其次,为了研究对称的等价性,利用一维最优化方法得到该方程的最优系统,借助最优系统对方程进行对称约化。为了方便求解约化后的常微分方程,对一些参数做了一定的约束,因此得到的解是在上述约束条件下的解析解。最后构造了这些情况下的群不变解,并求出一系列新的精确解。

关键词 非线性麦克斯韦方程;李群;对称;精确解;最优系统

中图分类号 O175

文献标志码 A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)

Optimal Systems and Exact Solutions of a Nonlinear Maxwell Equation

GUO Zengxin, HU Yanxin, XIN Xiangpeng

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract Study the symmetry reductions and exact solutions of a class of second-order nonlinear Maxwell equation. Firstly, under the constraint of invariable form, the vector fields and symmetries of the equation are obtained by using Lie group method. Secondly, in order to study the equivalence of symmetry, the one-dimensional optimization method is used to obtain the optimal system of the equation, and the equation is reduced with the help of the optimal system. In order to solve the reduced ordinary differential equations, some parameters are constrained, so solutions are the analytic solutions under the above constraints. Finally, the group invariant solutions in these cases are constructed, and a series of new exact solutions are obtained.

Key words nonlinear Maxwell equation; Lie Group; symmetry; exact solution; optimal system

0 引言

自然界很多现象如流体力学,电磁学,种群发展,量子力学等领域都可以用非线性偏微分方程表述。如今非线性偏微分方程已经成为构成当代数学和物理沟通的重要桥梁,近几十年已经有很多方法求解非线性偏微分方程,比如 Lax 方法[1,2],Bäcklund 变换法[3,4],Riccati 方程法[5],反演散射法[6],Darbox 变换法[7,8],双线性函数法[9,10],函数展开法[11],CK 直接约化法[12],Painlevé 检验方法[13,14],经典李群方法[15-17],并得到

收稿日期:2020-11-12

基金项目:国家自然科学基金项目(11505090)资助

通讯作者:辛祥鹏,男,汉族,博士,副教授,硕士生导师,研究方向:微分方程理论及精确解,E-mail:xinxiangpeng@lcu.edu.cn。

了大量的结果。其中李群方法是构造精确解非常有效的方法,近年来很多优秀的成果都与李群方法相关。如文献[13]作者对 Zakharov-Kuzentsov 方程进行对称约化并求出其精确解,文献[15]作者求出 2+1 维广义浅水波方程的类孤子解与周期解,文献[18]作者求出一类 Poisson 方程的最优系统和群不变解。

本文研究一类二阶非线性麦克斯韦方程

$$u_{xx}(c-u_t^2)+2u_xu_tu_{xt}-u_{tt}(1+u_x^2)=0, \tag{1}$$

其中 $u(x,t)$ 为 x,t 的函数,c 为由真空电介常量 ε_0 和磁常数 μ_0 所确定的正数。麦克斯韦方程作为电磁学理论的基础,其线性形式和非线性形式在物理及工程领域有着广泛的应用。线性的麦克斯韦理论已被大众所熟知,对于非线性麦克斯韦理论,目前大部分学者对该方程的数值解和误差分析做了一些研究,如文献[19]中作者提出了非线性麦克斯韦方程在满足齐次狄利克雷边界条件和给定初始值情况下,采用后向欧拉方法进行时域离散化的方法,对利普希茨连续 情形的误差进行了计算,并在适当的函数空间得到了误差估计。数值仿真表明,误差估计结果依赖于非线性特性,而且能快速收敛。文献[20]中作者用一种新的有限元法得到非线性麦克斯韦方程的数值解及误差估计,并提出了一个线性化的 Crank-Nicolson 全离散格式,并导出了在 L_2 模意义下的误差估计,并建立了时间和空间离散系统,在适当的条件下导出了相应的误差结果。文献[21]中作者利用时间和空间上的有限差分对非线性麦克斯韦方程进行离散化,并给出适当的傅里叶基来求出方程的数值解,文献[22]中作者使用松弛近似的方法得到非线性麦克斯韦方程的初边值问题,并证明了 Kerr-Debye 模型的输入波条件解的极限是 Kerr 模型的解。也有部分学者对该方程行波解进行过讨论研究,如文献[23]中作者研究了柱面非线性麦克斯韦方程在具有任意非线性因子与幂律非均匀因子的非色散介质中传播的柱面电磁波的行波解,得到了电场分量正切函数形式的解,并讨论其物理意义。

本文由以下四个部分组成:第一部分利用李群方法得到方程(1)的对称群,并得到方程(1)的群不变解;第二部分利用一维最优化方法得到方程(1)的最优系统;第三部分利用最优系统将方程(1)转化为常微分方程,并求得方程(1)的精确解;最后一部分利用方程(1)的对称群和精确解构造出方程(1)的一组新解。

1 方程(1)的李对称

根据经典 Lie 群方法,首先考虑方程(1)的单参数 Lie 变换群具有下面形式

$$\begin{aligned} x^* &= x^*(x,t,u,\varepsilon), \\ t^* &= t^*(x,t,u,\varepsilon), \\ u^* &= u^*(x,t,u,\varepsilon), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 (x^*,t^*,u^*) 为 (x,t,u) 经过变换后的新变量,ε 为变换下的参数。为了构造 Lie 变换,要求方程(1)在变换(2)下是不变的,即满足条件

$$u^*_{x^*x^*}(c-u^{*2}_{t^*})+2u^*_{x^*}u^*_{t^*}u^*_{x^*t^*}-u^*_{t^*t^*}(1+u^{*2}_{x^*})=0。 \tag{3}$$

把变换(2)在 $\varepsilon=0$ 处展开,可以得到如下形式的无穷小变换,

$$\begin{aligned} x^* &= x+\varepsilon X(x,t,u)+o(\varepsilon^2), \\ t^* &= t+\varepsilon T(x,t,u)+o(\varepsilon^2), \\ u^* &= u+\varepsilon U(x,t,u)+o(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{4}$$

其中 X,T,U 称为无穷小变量。为了求得上述变换,设方程(1)的向量场表示为

$$\mathbf{V}=U\frac{\partial}{\partial u}+X\frac{\partial}{\partial x}+T\frac{\partial}{\partial t},$$

其中 U,X,T 为 x,t,u 的未知函数,即 $U=U(x,t,u),X=X(x,t,u),T=T(x,t,u)$。由于公式(4)仅是变量 (x,t,u) 的变换,方程(1)中还包含 u 的一阶和二阶导数项,为了求得这些导数项的变换,需要把向量场延拓到导数空间上,其二阶延拓记作 $pr^{(2)}V$,即

$$pr^{(2)}\mathbf{V}=\mathbf{V}+U^x\frac{\partial}{\partial u_x}+U^t\frac{\partial}{\partial u_t}+U^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}+U^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+U^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \tag{5}$$

其中 U^x,U^t 表示 u_x,u_t 在变换下的无穷小量,U^{xt},U^{xx},U^{tt} 表示 u_{xt},u_{xx},u_{tt} 变换下的无穷小量。用(5)作用到方程(1)得到

$$2u_{xt}u_tU^x-u_t^2U^{xx}+2u_xu_tU^t+2u_xu_tU^{xt}-u_x^2U^{tt}-u_xu_{tt}U^x+cU^{xx}-U^{tt}=0,\tag{6}$$

其中延拓向量场的无穷小量由如下公式决定[15]

$$\begin{cases}U^x=D_x(U-Xu_x-Tu_t)+Xu_{xx}+Tu_{tx},\\U^t=D_t(U-Xu_x-Tu_t)+Xu_{xt}+Tu_{tt},\\U^{xt}=D_{xt}(U-Xu_x-Tu_t)+Xu_{xxt}+Tu_{ttx},\\U^{xx}=D_{xx}(U-Xu_x-Tu_t)+Xu_{xxx}+Tu_{txx},\\U^{tt}=D_{tt}(U-Xu_x-Tu_t)+Xu_{xtt}+Tu_{ttt}。\end{cases}\tag{7}$$

将公式(7)及 $u_{xt}=\dfrac{u_{tt}(1+u_x^2)-u_{xx}(c-u_t^2)}{2u_xu_t}$ 带入方程(6)并令 u 及其各阶导数项系数为 0，得到关于 U,X,T 的决定方程组，求解得到

$$\begin{aligned}U&=c_3ct+c_2u-c_5x+c_7,\\T&=c_1x+c_2t+c_3u+c_4,\\X&=c_1ct+c_2x+c_5u+c_6,\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7$ 为任意常数。由(8)式我们可以得到方程(1)有 7 个基本的向量场

$$\begin{aligned}&\mathbf{V}_1=ct\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial t},\ \mathbf{V}_2=x\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial u},\mathbf{V}_3=u\frac{\partial}{\partial t}+ct\frac{\partial}{\partial u},\\&\mathbf{V}_4=\frac{\partial}{\partial t},\ \mathbf{V}_5=u\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial u},\mathbf{V}_6=\frac{\partial}{\partial x},\ V_7=\frac{\partial}{\partial u}。\end{aligned}\tag{9}$$

为了构造变换群，对(9)中的 7 个向量分别求解下面初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\varepsilon}=X,x^*|_{\varepsilon=0}=x,\\\dfrac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}\varepsilon}=T,t^*|_{\varepsilon=0}=t,\\\dfrac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}\varepsilon}=U,u^*|_{\varepsilon=0}=u,\end{cases}$$

得到它们对应如下 7 个单参数变换群

$$\begin{aligned}&g_1:(x,t,u)\to\left(\sqrt{c}\left(x^*\cosh(\sqrt{c}\varepsilon)-t^*\sinh(\sqrt{c}\varepsilon)\right),t^*\cosh(\sqrt{c}\varepsilon)-x^*\sinh(\sqrt{c}\varepsilon),u^*\right),\\&g_2:(x,t,u)\to(x^*e^{-\varepsilon},t^*e^{-\varepsilon},u^*e^{-\varepsilon}),\\&g_3:(x,t,u)\to\left(x^*,t^*\cosh(\sqrt{c}\varepsilon)-u^*\sinh(\sqrt{c}\varepsilon),\sqrt{c}\left(u^*\cosh(\sqrt{c}\varepsilon)-t^*\sinh(\sqrt{c}\varepsilon)\right)\right),\\&g_4:(x,t,u)\to(x^*,t^*-\varepsilon,u^*),\\&g_5:(x,t,u)\to(x^*\cos(\varepsilon)-u^*\sin(\varepsilon),t^*,u^*\cos(\varepsilon)+x^*\sin(\varepsilon)),\\&g_6:(x,t,u)\to(x^*-\varepsilon,t^*,u^*),\\&g_7:(x,t,u)\to(x^*,t^*,u^*-\varepsilon),\end{aligned}$$

即若 $u=f(x,t)$ 为方程(1)的解，则

$$\begin{aligned}&u_1=f\left(t\sinh(\sqrt{c}\varepsilon)+\frac{x}{\sqrt{c}}\cosh(\sqrt{c}\varepsilon),t\cosh(\sqrt{c}\varepsilon)+\frac{x}{\sqrt{c}}\sinh(\sqrt{c}\varepsilon)\right),\\&u_2=e^{\varepsilon}f(xe^{\varepsilon},te^{\varepsilon}),\\&u_3=\frac{\cosh(\sqrt{c}\varepsilon)}{\sqrt{c}}f\left(x,\cosh(\sqrt{c}\varepsilon)t+\frac{1}{\sqrt{c}}\sinh(\sqrt{c}\varepsilon)f(x,t)\right)+\sinh(\sqrt{c}\varepsilon)t,\\&u_4=f(x,t-\varepsilon),\\&u_5=\cos(\varepsilon)f(x\cos(\varepsilon)+\sin(\varepsilon)f(x,t),t)-x\sin(\varepsilon),\\&u_6=f(x-\varepsilon,t),\\&u_7=f(x,t)-\varepsilon,\end{aligned}\tag{10}$$

仍为方程(1)的解，这样可以通过方程的解及(10)构造方程(1)的无穷多精确解。

2 李代数及最优系统

含有多个自变量的偏微分方程,对于其封闭李代数上的所有 $s(s<n)$ 维子代数分别对应了该方程上的一组群不变解,往往这些子代数有无穷多个,所以要列出方程所有的群不变解几乎是不可能的。对于这种情况,需要找到有限并且能代表所有情况的群不变解,即找到所有不等价的群不变解,下面我们构造对称(9)的最优系统。

由第1部分可得方程(1)的李点对称(9),由李括号的运算定义 $[\boldsymbol{V}_i,\boldsymbol{V}_j]=\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{V}_j-\boldsymbol{V}_j\boldsymbol{V}_i$,得到李代数交换子表如表1所示。

表1 李代数交换子表

	$\boldsymbol{V}_1$	$\boldsymbol{V}_2$	$\boldsymbol{V}_3$	$\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_5$	$\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_7$
$\boldsymbol{V}_1$	0	0	$-\boldsymbol{V}_5$	$-\boldsymbol{V}_6$	$-\boldsymbol{V}_3$	$-\boldsymbol{V}_4$	0
$\boldsymbol{V}_2$	0	0	0	$-\boldsymbol{V}_4$	0	$-\boldsymbol{V}_6$	$-\boldsymbol{V}_7$
$\boldsymbol{V}_3$	$\boldsymbol{V}_5$	0	0	$-\boldsymbol{V}_7$	$\boldsymbol{V}_1$	0	$\boldsymbol{V}_4$
$\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_7$	0	0	0	0
$\boldsymbol{V}_5$	$\boldsymbol{V}_3$	0	$-\boldsymbol{V}_1$	0	0	$\boldsymbol{V}_7$	$-\boldsymbol{V}_6$
$\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_6$	0	0	$-\boldsymbol{V}_7$	0	0
$\boldsymbol{V}_7$	0	$\boldsymbol{V}_7$	$\boldsymbol{V}_4$	0	$\boldsymbol{V}_6$	0	0

再由伴随表达式 $Ad_{\exp(\varepsilon\boldsymbol{V}_i)}\boldsymbol{V}_j=\boldsymbol{V}_j-\varepsilon[\boldsymbol{V}_i,\boldsymbol{V}_j]+\frac{\varepsilon^2}{2}[\boldsymbol{V}_i,[\boldsymbol{V}_i,\boldsymbol{V}_j]]-\cdots$,得到李代数伴随表示如表2所示。

表2 李代数伴随表

	$\boldsymbol{V}_1$	$\boldsymbol{V}_2$	$\boldsymbol{V}_3$	$\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_5$	$\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_7$
$\boldsymbol{V}_1$	$\boldsymbol{V}_1$	$\boldsymbol{V}_2$	$k_1\boldsymbol{V}_5+k_2\boldsymbol{V}_3$	$k_1\boldsymbol{V}_6+k_2\boldsymbol{V}_4$	$k_1\boldsymbol{V}_3+k_2\boldsymbol{V}_5$	$k_1\boldsymbol{V}_4+k_2\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_7$
$\boldsymbol{V}_2$	$\boldsymbol{V}_1$	$\boldsymbol{V}_2$	$\boldsymbol{V}_3$	$e^{\varepsilon}\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_5$	$e^{\varepsilon}\boldsymbol{V}_6$	$e^{\varepsilon}\boldsymbol{V}_7$
$\boldsymbol{V}_3$	$-k_1\boldsymbol{V}_5+k_2\boldsymbol{V}_1$	$\boldsymbol{V}_2$	$\boldsymbol{V}_3$	$-k_1\boldsymbol{V}_7+k_2\boldsymbol{V}_4$	$-k_1\boldsymbol{V}_1+k_2\boldsymbol{V}_5$	$\boldsymbol{V}_6$	$-k_1\boldsymbol{V}_4+k_2\boldsymbol{V}_7$
$\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_1-\varepsilon\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_2-\varepsilon\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_3-\varepsilon\boldsymbol{V}_7$	$\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_5$	$\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_7$
$\boldsymbol{V}_5$	$-k_3\boldsymbol{V}_3+k_4\boldsymbol{V}_1$	$\boldsymbol{V}_2$	$k_3\boldsymbol{V}_1+k_4\boldsymbol{V}_3$	$\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_5$	$-k_3\boldsymbol{V}_7+k_4\boldsymbol{V}_6$	$k_3\boldsymbol{V}_6+k_4\boldsymbol{V}_7$
$\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_1-\varepsilon\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_2-\varepsilon\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_3$	$\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_5+\varepsilon\boldsymbol{V}_7$	$\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_7$
$\boldsymbol{V}_7$	$\boldsymbol{V}_1$	$\boldsymbol{V}_2-\varepsilon\boldsymbol{V}_7$	$\boldsymbol{V}_3-\varepsilon\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_4$	$\boldsymbol{V}_5-\varepsilon\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_6$	$\boldsymbol{V}_7$

注:$k_1=\sinh(\varepsilon)$,$k_2=\cosh(\varepsilon)$,$k_3=\sin(\varepsilon)$,$k_4=\cos(\varepsilon)$。

根据求一维最优系统的方法,设 $\boldsymbol{V}=\sum_{n=1}^{7}a_n\boldsymbol{V}_n$,其中 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ 为任意常数。为化简向量 $\boldsymbol{V}$,分成以下几类情形。

情形1 $a_1\neq0$,$a_2\neq0$。用 $Ad_{\exp(\varepsilon_1V_4)}$ 对 $\boldsymbol{V}$ 作用,并取 $\varepsilon_1=\frac{a_6}{a_1}$,此时可以将 $\boldsymbol{V}_6$ 消去,得到

$$Ad_{\exp(\varepsilon_1V_4)}\boldsymbol{V}=a_1\boldsymbol{V}_1+a_2\boldsymbol{V}_2+a_3\boldsymbol{V}_3+\frac{a_1a_4-a_2a_6}{a_1}\boldsymbol{V}_4+a_5\boldsymbol{V}_5+\frac{a_7a_1-a_3a_6}{a_1}\boldsymbol{V}_7,$$

再依次用 $Ad_{\exp(\varepsilon_2\boldsymbol{V}_3)}$,$Ad_{\exp(\varepsilon_3\boldsymbol{V}_7)}$,$\mathrm{Ad}_{\exp(\varepsilon_4\boldsymbol{V}_5)}$ 作用,并取 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为适当的值,以此将 $\boldsymbol{V}_5,\boldsymbol{V}_7,\boldsymbol{V}_3$ 消去,可得向量 $\boldsymbol{V}$ 等价于生成算子 $k_1\boldsymbol{V}_1+k_2\boldsymbol{V}_2+k_4\boldsymbol{V}_4$。

同理,可求出如下情形。

情形2 $a_1\neq0$,$a_2\neq0$,$a_3\neq0$。此时用 $Ad_{\exp(\varepsilon_5\boldsymbol{V}_4)}$ 作用到 $\boldsymbol{V}$ 上并取 ε_5 为适当的值可以将 $\boldsymbol{V}_6$ 消去,再用 $Ad_{\exp(\varepsilon_6\boldsymbol{V}_3)}$,$Ad_{\exp(\varepsilon_7\boldsymbol{V}_6)}$ 依次作用并取适当的 $\varepsilon_6,\varepsilon_7$ 可将 $\boldsymbol{V}_5,\boldsymbol{V}_4$ 消去,于是可得向量 $\boldsymbol{V}$ 和生成算子 $k_1\boldsymbol{V}_1+k_3\boldsymbol{V}_3+k_7\boldsymbol{V}_7$ 等价。

情形3 $a_1\neq0$,$a_2=0$,$a_3=0$。此时用 $Ad_{\exp(\varepsilon_8\boldsymbol{V}_4)}$ 作用到 $\boldsymbol{V}$ 上并取 ε_8 为适当的值可以将 $\boldsymbol{V}_9$ 消去,再用 $Ad_{\exp(\varepsilon_9\boldsymbol{V}_3)}$,$Ad_{\exp(\varepsilon_{10}\boldsymbol{V}_6)}$ 依次作用并取适当的 $\varepsilon_9,\varepsilon_{10}$ 可将 $\boldsymbol{V}_5$,$\boldsymbol{V}_4$ 消去,于是可得向量 $\boldsymbol{V}$ 和生成算子 $k_1\boldsymbol{V}_1+$

$k_7\boldsymbol{V}_7$ 等价。

情形 4　$a_1=0, a_2\neq 0$。此时用 $Ad_{\exp(\varepsilon_{11}\boldsymbol{V}_4)}$ 作用到 $\boldsymbol{V}$ 上并取 ε_{11} 为适当的值消去 $\boldsymbol{V}_4$，再用 $Ad_{\exp(\varepsilon_{12}\boldsymbol{V}_6)}$，$Ad_{\exp(\varepsilon_{13}\boldsymbol{V}_1)}$ 依次作用，并取 $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}$ 为适当的值，可依次消去 $\boldsymbol{V}_6, \boldsymbol{V}_3$。于是得到向量 $\boldsymbol{V}$ 和生成算子 $k_2\boldsymbol{V}_2+k_5\boldsymbol{V}_5+k_7\boldsymbol{V}_7$ 等价。

情形 5　$a_1=a_2=0, a_3\neq 0$。此时用 $Ad_{\exp(\varepsilon_{14}\boldsymbol{V}_4)}$ 作用到 $\boldsymbol{V}$ 上并取 ε_{14} 为适当的值消去 $\boldsymbol{V}_7$，再用 $Ad_{\exp(\varepsilon_{15}\boldsymbol{V}_7)}$ 依次作用并取适当的 ε_{16} 可将 $\boldsymbol{V}_4$ 消去，于是可得向量 $\boldsymbol{V}$ 和生成算子 $k_3\boldsymbol{V}_3+k_5\boldsymbol{V}_5+k_6\boldsymbol{V}_6$ 等价。

情形 6　$a_1=a_2=a_3=0, a_5\neq 0$。此时用 $Ad_{\exp(\varepsilon_{17}\boldsymbol{V}_7)}$ 作用到 $\boldsymbol{V}$ 上并取 ε_{17} 为适当的值消去 $\boldsymbol{V}_6$，再用 $Ad_{\exp(\varepsilon_{18}\boldsymbol{V}_6)}$ 依次作用并取适当的 ε_{18} 可将 $\boldsymbol{V}_7$ 消去，于是可得向量 $\boldsymbol{V}$ 和生成算子 $k_4\boldsymbol{V}_4+k_5\boldsymbol{V}_5$ 等价。

情形 7　$a_1=a_2=a_3=a_5=0, a_6\neq 0$。此时用 $Ad_{\exp(\varepsilon_{19}\boldsymbol{V}_5)}$ 作用到 $\boldsymbol{V}$ 上并取 ε_{19} 为适当的值消去 $\boldsymbol{V}_7$，可得向量 $\boldsymbol{V}$ 和生成算子 $k_4\boldsymbol{V}_4+k_6\boldsymbol{V}_6$ 等价。

情形 8　$a_1=a_2=a_3=a_5=a_6=0$。此时向量 $\boldsymbol{V}$ 和生成算子 $k_4\boldsymbol{V}_4+k_7\boldsymbol{V}_7$ 等价。

综上所述，方程(1)的李代数的一维子代数的最优系统为

$$\begin{cases}k_1\boldsymbol{V}_1+k_2\boldsymbol{V}_2+k_4\boldsymbol{V}_4, k_1\boldsymbol{V}_1+k_7\boldsymbol{V}_7, k_1\boldsymbol{V}_1+k_3\boldsymbol{V}_3+k_7\boldsymbol{V}_7,\\ k_2\boldsymbol{V}_2+k_5\boldsymbol{V}_5+k_7\boldsymbol{V}_7, \mathrm{k}_3\boldsymbol{V}_3+k_5\boldsymbol{V}_5+k_6\boldsymbol{V}_6, k_4\boldsymbol{V}_4+k_5\boldsymbol{V}_5, k_4\boldsymbol{V}_4+k_6\boldsymbol{V}_6,\end{cases}$$

其中 $k_i(i=1,\ldots,7)$ 均为任意常数，根据上述最优系统，我们可以得到方程(1)的对称约化。

3　方程(1)的对称约化及精确解

根据方程(1)的最优系统，取情形 1-4 进行对称约化，将方程(1)转化为常微分方程，并求出其精确解。

3.1　对于情形 1，$k_1\boldsymbol{V}_1+k_2\boldsymbol{V}_2+k_4\boldsymbol{V}_4$

此时方程对称为 $\sigma=(ck_1t+k_2x)u_x+(k_1x+k_2t+k_4)u_t-k_2u$，求其特征方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{ck_1t+k_2x}=\dfrac{\mathrm{d}t}{k_1x+k_2t+k_4}=\dfrac{\mathrm{d}u}{k_2u}$，此时特征方程的首次积分比较复杂，使得约化后的常微分方程较难求解，为使计算简便，取 $k_1=0$，可得方程(1)的群不变解为

$$u=xf\left(\frac{k_2t+k_4}{k_2x}\right)。\tag{11}$$

将不变量 $\theta=\dfrac{k_2t+k_4}{k_2x}$，及群不变解(11)代入方程(1)得到约化方程 $(-c\theta^2+f^2+1)f''=0$，易得该方程解为 $f(\theta)=\pm\sqrt{c\theta^2-1}$，将该解代入群不变解(11)得到方程(1)的精确解为

$$u=\pm\frac{1}{k_2}\sqrt{ck_2t^2+2ck_2k_4t-k_2^2x^2+\mathrm{k}_4c}。$$

3.2　对于情形 2，$k_1\boldsymbol{V}_1+k_3\boldsymbol{V}_3+k_7\boldsymbol{V}_7$

此时方程对称为 $\sigma=k_1ctu_x+(k_1x+k_3u)u_t-k_3ct-k_7$，求其特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{k_1ct}=\frac{\mathrm{d}t}{k_1x+k_3u}=\frac{\mathrm{d}u}{k_3ct+k_7},$$

同样为使计算简便，不妨取 $k_1=0$，可得方程(1)的群不变解为

$$u=\frac{\sqrt{k_3}}{k_3}\sqrt{k_3ct^2+k_3f(x)+2k_7t}。\tag{12}$$

将不变量 $\theta=x$，及群不变解(12)代入方程(1)得到约化方程 $ck_3^2f''f-ck_3^2(f')^2-ck_3^22f-k_7^2f''+2k_7^2=0$，求得该方程解为

$$f(\theta)=\frac{1}{2ck_3^2C_1\sqrt{cC_1}}\left(C_1e^{\mp\xi}+4k_3^2\sqrt{cC_1}e^{\pm\xi}+2k_7^2C_1\sqrt{cC_1}+4\sqrt{cC_1}\right),$$

其中 $\xi=k_3\sqrt{cC_1}(C_2+\theta)$。将该解代入群不变解(12)得到方程(1)的精确解为

$$u=\sqrt{ct^2+\frac{1}{2ck_3^2C_1\sqrt{cC_1}}\left(C_1e^{\mp\xi_1}+4k_3^2\sqrt{cC_1}e^{\pm\xi_1}+2k_7^2C_1\sqrt{cC_1}+4\sqrt{cC_1}\right)+2t},$$

其中 $\xi_1 = k_3\sqrt{cC_1}(C_2 + x)$,$C_1$,$C_2$ 为任意常数。

特别的,当 $C_1 = 16k_3^4 c$ 时,方程(1)有双曲余弦解

$$u = \sqrt{ct^2 + \frac{1}{8c^2k_3^4}(k_3^2\cosh(4ck_3^3x + 4ck_3^3C_2) + k_7^2k_3^4c + 1) + 2t}\ 。$$

3.3 对于情形 3, $k_1\mathbf{V}_1 + k_7\mathbf{V}_7$

易知此时方程(1)的对称为 $\sigma = k_1ctu_x + k_1xu_t - k_7$,求其特征方程 $\frac{\mathrm{d}x}{k_1ct} = \frac{\mathrm{d}t}{k_1x} = \frac{\mathrm{d}u}{k_7}$ 得到方程群不变解为

$$u = f\left(\frac{ct^2 - x^2}{c}\right) + \frac{k_7\ln(\sqrt{c}x + ct)}{k_1\sqrt{c}}, \tag{13}$$

此时,取 $k_7 = 0$,并将不变量 $\theta = t^2 - \frac{x^2}{c}$ 及群不变解(13)代入方程(1)得到约化方程

$$2(f')^3\theta - cf''\theta - cf' = 0, \tag{14}$$

求解得到方程(14)的解为

$$f(\theta) = \pm\frac{\sqrt{c}\arctan(\varphi)}{\sqrt{C_3}} + C_4, \tag{15}$$

其中 $\varphi = \frac{(\theta - 2C_3)}{\sqrt{\theta(\theta - 4C_3)}}$ 。

将得到的解(15)代入群不变解(13)可得方程(1)的精确解为

$$u = \pm\frac{\sqrt{c}\arctan(\varphi_1)}{\sqrt{C_3}} + C_3, \tag{16}$$

其中 $\varphi_1 = \frac{(ct^2 - x^2 - 2C_3c)}{\sqrt{(ct^2 - x^2)(ct^2 - x^2 - 4C_3c)}}$,其中 C_3,C_4 为任意常数。

3.4 对于情形 4, $k_2\mathbf{V}_2 + k_5\mathbf{V}_5 + k_7\mathbf{V}_7$

此时方程对称为 $\sigma = (k_2x + k_5u)u_x + k_2tu_t - k_2u + k_5\mathrm{x} - k_7$,求其特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{k_2x + k_5u} = \frac{\mathrm{d}t}{k_2t} = \frac{\mathrm{d}u}{k_2u + k_7 - k_5x}。$$

此时利用不变量约化的常微分方程相对比较复杂,为使计算简便,不妨取 $k_2 = 0$,可得方程(1)的群不变解为

$$u = \frac{\sqrt{k_5}}{k_5}\sqrt{-k_5x^2 + k_5f(t) + 2k_7x}, \tag{17}$$

将不变量 $\theta = x$,及群不变解(17)代入方程(1)得到约化方程 $k_5^2f''f - k_5^2(f')^2 + 2k_5^2cf + k_7^2f'' + 2k_7^2c = 0$,求得该方程解为

$$f(\theta) = \frac{1}{2C_5^3k_5^2}(4c^2e^{\mp\mu} + C_5^2e^{\pm\mu} - 2C_5^3k_7^2 - 4cC_5), \tag{18}$$

其中 $\mu = C_5k_5(C_6 + \theta)$ 。将该解代入群不变解(17)得到方程(1)的精确解为

$$u = \frac{\sqrt{k_5}}{k_5}\sqrt{-k_5x^2 + \frac{1}{2C_5^3k_5}(4c^2e^{\mp\mu1} + C_5^2e^{\pm\mu1} - 2C_5^3k_7^2 - 4cC_5) + 2k_7x},$$

其中 $\mu_1 = C_5k_5(C_6 + t)$,C_5,C_6 为任意常数。

特别的当 $C_5 = 2c$ 时,方程(1)有双曲余弦解

$$u = \frac{\sqrt{k_5}}{k_5}\sqrt{-k_5x^2 + \frac{1}{4k_5}(c\cosh(2ck_5t + 2ck_5C_5) - 4c^2k_7^2 - 2c) + 2k_7x}\ 。$$

综上所述,由方程(1)的最优系统,可以得到以上四种类型的不变量及对应的精确解。

4 方程(1)新的精确解的构造

由方程(1)的单参数变换群可得,若 $u = f(x,t)$ 是方程(1)的解,那么

$$u_1=f\left(te^{\varepsilon}\sinh(\sqrt{c}\varepsilon)+\frac{x}{\sqrt{c}}e^{\varepsilon}\cosh(\sqrt{c}\varepsilon),te^{\varepsilon}\cosh(\sqrt{c}\varepsilon)+\frac{x}{\sqrt{c}}e^{\varepsilon}\sinh(\sqrt{c}\varepsilon)\right), \tag{19}$$

也为方程(1)的解。记 $\varphi_+=\sqrt{c}t+x,\varphi_-=\sqrt{c}t-x,\mu=e^{\varepsilon\sqrt{c}},k=e^{\varepsilon},\varepsilon\in R$，则(19)可写为

$$u_1=f\left(\frac{k}{2\sqrt{c}}(\varphi_+\mu-\varphi_-\mu^{-1}),\frac{k}{2\sqrt{c}}(\varphi_+\mu+\varphi_+\mu^{-1})\right)。$$

下面对 3 中的 4 个精确解进行讨论。

情况 1　$u=\pm\frac{1}{k_2}\sqrt{ck_2t^2+2ck_2k_4t-k_2^2x^2+k_4c}$。

为便于计算，不妨取 $k_2=k_4=1$ 时的特解 $u=\pm\sqrt{ct^2+2ct-x^2+c}$。令 $t=\frac{k}{2\sqrt{c}}(\varphi_+\mu-\varphi_-\mu^{-1})$，$x=\frac{k}{2\sqrt{c}}(\varphi_+\mu+\varphi_-\mu^{-1})$，则

$$ct^2-x^2+2ct=\frac{k}{4c}(c\varphi_+^2\mu^2-\varphi_+^2\mu^2-2c\varphi_+\varphi_--2\varphi_+\varphi_-+c\varphi_-^2\mu^{-2}-\varphi_-^2\mu^{-2}+4c\sqrt{c}\varphi_+\mu-4c\sqrt{c}\varphi_-\mu),$$

代入 $u=\pm\sqrt{ct^2+2ct-x^2+c}$，化简得到

$$u=\pm\sqrt{k(c-1)\varphi_+{}^2\mu^2-4c\varphi_+\mu-2k(c+1)\varphi_+\varphi_-+4c\sqrt{c}\varphi_-\mu^{-1}+k(c-1)\varphi_-^2\mu^{-2}},$$

也为方程(1)的精确解。

情况 2　$u=\sqrt{ct^2+\frac{1}{8c^2k_3^4}(k_3^2\cosh(4ck_3^3x+4ck_3^3C_2)+k_7^2k_3^4c+1)+2t}$。

为便于计算，不妨取 $k_3=k_7=1$ 时的特解 $u=\sqrt{ct^2+\frac{1}{2c^2}\cosh(2cx+2cC_2)+\frac{1}{c}+\frac{1}{2c^2}+2t}$。令 $t=\frac{k}{2\sqrt{c}}(\varphi_+\mu-\varphi_-\mu^{-1})$，$x=\frac{k}{2\sqrt{c}}(\varphi_+\mu+\varphi_-\mu^{-1})$，$C_2=0$，则 $ct^2+2t=\frac{k}{4}(\varphi_+-\varphi_-\mu^{-2})\left(k\varphi_++4\sqrt{c}\mu^{-1}-k\varphi_-\mu^{-2}\right)$，

代入 $u=\sqrt{ct^2+\frac{1}{2c^2}\cosh(2cx+2cC_2)+\frac{1}{c}+\frac{1}{2c^2}+2t}$，化简得到

$$u=\frac{1}{2c}\sqrt{k(\varphi_+-\varphi_-\mu^{-2})\left(k\varphi_++4\sqrt{c}\mu^{-1}-k\varphi_-\mu^{-2}\right)+4c+2+2\cosh\left(kc\sqrt{c}(\varphi_+\mu+\varphi_-\mu^{-1})\right)}$$

也为方程(1)的精确解。

情况 3　$u=\pm\frac{\sqrt{c}\arctan\left(\frac{(ct^2-x^2-2C_3c)}{\sqrt{(ct^2-x^2)(ct^2-x^2-4C_3c)}}\right)}{\sqrt{C_3}}+C_3$。

令 $t=\frac{k}{2\sqrt{c}}(\varphi_+\mu-\varphi_-\mu^{-1})$，$x=\frac{k}{2\sqrt{c}}(\varphi_+\mu+\varphi_-\mu^{-1})$，$C_3=\frac{1}{c}$，则

$$ct^2-x^2=\frac{k^2}{4c}(c\varphi_+\mu^2-\varphi_+\mu^2-2c\varphi_+\varphi_--2\varphi_+\varphi_-+c\varphi_-\mu^{-2}-\varphi_-\mu^{-2}),$$

代入 $u=\pm\frac{\sqrt{c}\arctan\left(\frac{(ct^2-x^2-2C_3c)}{\sqrt{(ct^2-x^2)(ct^2-x^2-4C_3c)}}\right)}{\sqrt{C_3}}+C_3$，化简得到

$$u=\pm c\arctan\left(\frac{c\varphi_+\mu^2-\varphi_+\mu^2-2c\varphi_+\varphi_--2\varphi_+\varphi_-+c\varphi_-\mu^{-2}-\varphi_-\mu^{-2}-8c}{\sqrt{(c(\varphi_+\mu-\varphi_-\mu^{-1})^2-(\varphi_+\mu+\varphi_-\mu^{-1})^2)(c(\varphi_+\mu-\varphi_-\mu^{-1})^2-(\varphi_+\mu+\varphi_-\mu^{-1})^2-16)}}\right)+\frac{1}{c}$$

也为方程(1)的精确解。

情况 4　$u=\frac{\sqrt{k_5}}{k_5}\sqrt{-k_5x^2+\frac{1}{4k_5}(c\cosh(2ck_5t+2ck_5C_5)-4c^2k_7^2-2c)+2k_7x}$。

为便于计算,不妨取 $k_5=k_7=1$ 时的特解

$$u=\sqrt{-x^2+\frac{1}{2c}\cosh(2ct+2cC_6)-\frac{1}{2c}-1+2x},$$

令 $t=\frac{k}{2\sqrt{c}}(\varphi_+\mu-\varphi_-\mu^{-1})$,$x=\frac{k}{2\sqrt{c}}(\varphi_+\mu+\varphi_+\mu^{-1})$,$C_6=0$,则 $x^2-2x=\frac{k}{4}(\varphi_+-\varphi_-\mu^2)\left(k\varphi_++k\varphi_--4\sqrt{c}\mu^{-1}\right)$,

代入 $u=\sqrt{-x^2+\frac{1}{2c}\cosh(2ct+2cC_6)-\frac{1}{2c}-1+2x}$,化简得到

$$u=\frac{1}{2}\sqrt{\cosh\left(k\sqrt{c}(\varphi_+\mu-\varphi_-\mu^{-1})\right)-ck(\varphi_+-\varphi_-\mu^2)\left(k\varphi_++k\varphi_--4\sqrt{c}\mu^{-1}\right)-2-4c}$$

也为方程(1)的精确解。

综上,根据方程(1)的李对称群及精确解可得到如下精确解

$$u_1=\pm\sqrt{k(c-1)\varphi_+{}^2\mu^2-4c\varphi_+\mu-2k(c+1)\varphi_+\varphi_-+4c\sqrt{c}\varphi_-\mu^{-1}+k(c-1)\varphi_-^2\mu^{-2}},$$

$$u_2=\frac{1}{2c}\sqrt{k(\varphi_+-\varphi_-\mu^{-2})\left(k\varphi_++4\sqrt{c}\mu^{-1}-k\varphi_-\mu^{-2}\right)+4c+2+2\cosh\left(kc\sqrt{c}(\varphi_+\mu+\varphi_-\mu^{-1})\right)},$$

$$u_3=\pm c\arctan\left(\frac{c\varphi_+\mu^2-\varphi_+\mu^2-2c\varphi_+\varphi_--2\varphi_+\varphi_-+c\varphi_-\mu^{-2}-\varphi_-\mu^{-2}-8c}{\sqrt{(c(\varphi_+\mu-\varphi_-\mu^{-1})^2-(\varphi_+\mu+\varphi_-\mu^{-1})^2)(c(\varphi_+\mu-\varphi_-\mu^{-1})^2-(\varphi_+\mu+\varphi_-\mu^{-1})^2-16)}}\right),$$

$$u_4=\frac{1}{2}\sqrt{\cosh\left(k\sqrt{c}(\varphi_+\mu-\varphi_-\mu^{-1})\right)-ck(\varphi_+-\varphi_-\mu^2)\left(k\varphi_++k\varphi_--4\sqrt{c}\mu^{-1}\right)-2-4c},$$

其中 $\varphi_+=\sqrt{c}t+x$,$\varphi_-=\sqrt{c}t-x$,$\mu=e^{\varepsilon\sqrt{c}}$,$k=e^{\varepsilon}$,$\varepsilon\in\mathbf{R}$ 。进一步任然可以利用得到的解当成旧解继续构造方程新的精确解,进而可以得到方程无穷多精确解。

5 结论

本文运用经典李群方法研究了非线性麦克斯韦方程,得到了方程的 Lie 对称。由于对称中包含任意常数,因此包含了无穷多对称,但由于其中许多对称是等价的,因此找到一组不等价的对称就可以得到不同的约化方程。本文利用最优化方法构造了方程(1)的最优系统,即找到了一组不等价的对称,并利用最优系统对该方程进行约化,由于最优系统中也包含任意常数,为了方便求出约化后常微分方程的解,我们适当对参数做了一些约束条件,令其中的一些参数为特定常数,进而得到的精确解是在一定的约束条件下的解析解。最后用该方程的群不变解及单参数变换群构造出一些新的精确解。

参 考 文 献

[1] 刘萍,徐恒睿,杨建荣.Boussinesq 方程的 Lax 对,Bäcklund 变换,对称群变换和 Riccati 展开相容性[J].物理学报,2020,69(1):64-73.

[2] 马红彩.求非线性系统对称群的新方法[J].宁波大学学报(理工版),2020(5):32-38.

[3] 郭鼎.若干非线性微分方程的贝克隆变换、非局域对称及解析解的研究[D].北京:中国矿业大学,2020.

[4] 陈芳,孙泽宇,陈敏茹,等.新的(2+1)维超对称可积方程[J].数学物理学报,2020,40(5):1132-1141.

[5] 呼星汝.(1+1)维经典 Boussinesq-Burgers 系统的相容 Riccati 展开可解性和精确解[J].纯粹数学与应用数学,2020,36(3):302-311.

[6] 居林.一类新型浅水波方程的反散射逼近[J].江苏科技大学学报(自然科学版),2010(5):514-517.

[7] 李倩,舒级,杨袁,等.一类具非线性阻尼项的 Schrödinger 方程的达布变换[J].四川师范大学学报(自然科学版),2018,41(2):154-158.

[8] YANG C,XIE X Y.Binary Darboux transformation and multi-dark solitons for a higher-order nonlinear Schrödinger equation in the inhomogeneous optical fiber[J].Communications in Theoretical Physics,2020,72 (12):20-26.

[9] 信鑫,套格图桑.广田双线性方法与(3+1)维 Jimbo-Miwa-Like 方程的几种新解[J].数学的实践与认识,2020,50(10):315-320.

[10] 刘中柱,黄念宁.用广田直接法求带高阶修正的扩充的非线性 Schrodinger 方程的孤子解[J].物理学报,1991,40(1):1-7.

[11] 孙世飞,李雪霞,刘汉泽.两类非线性方程(组)的对称约化和精确解[J].聊城大学学报(自然科学版),2020,33(4):8-13.

(下转第 53 页)

gas sensors[J].Applied Physics A，2020，126(10)：4-7.

[27] YAMASHITA T，HAYES P.Analysis of XPS spectra of Fe^{2+} and Fe^{3+} ions in oxide materials[J].Applied Surface Science，2008，254(8)：2441-2449.

[28] RADU T，IACOVITA C，BENEA D，et al.X-ray photoelectron spectroscopic characterization of iron oxide nanoparticles[J].Applied Surface Science，2017，405：337-343.

[29] GROSVENOR A P，KOBE B A，BIESINGER M C，et al.Investigation of multiplet splitting of Fe 2p XPS spectra and bonding in iron compounds[J].Surface and Interface Analysis，2004，36(12)：1564-1574.

[30] CHEN X，LIU Y，KE X X，et al.A green method to synthesize AuNPs/mpg-C_3N_4 nanocomposites for constructing anti-interference electrochemical sensing interface toward methylmercury[J].Journal of Alloys and Compounds，2021.853：157365.

[31] WELSH I D，SHERWOOD P M.Photoemission and electronic structure of FeOOH：Distinguishing between oxide and oxyhydroxide[J].Physical Review B：Condense Matter，1989，40(9)：6386-6392.

[32] ZHOU S F，HAN X J，LIU Y Q.SWASV performance toward heavy metal ions based on a high-activity and simple magnetic chitosan sensing nanomaterials[J].Journal of Alloys and Compounds，2016，684：1-7.

[33] MAHMOUDIAN M R，BASIRUN W J，ALIAS Y，et al.Investigating the effectiveness of g-C_3N_4 on Pt/g-C_3N_4/ polythiophene nanocomposites performance as an electrochemical sensor for Hg^{2+} detection[J].Journal of Environmental Chemical Engineering，2020，8(5)：104204.

[34] XIONG S，YANG B，CAI D，et al.Individual and simultaneous stripping voltammetric and mutual interference analysis of Cd^{2+}，Pb^{2+} and Hg^{2+} with reduced graphene oxide-Fe_3O_4 nanocomposites[J].Electrochimica Acta，2015，185：52-61.

[35] ZHOU S F，WANG J J，GAN L，et al.，Individual and simultaneous electrochemical detection toward heavy metal ions based on L-cysteine modified mesoporous $MnFe_2O_4$ nanocrystal clusters[J].Journal of Alloys and Compounds，2017，721：492-500.

[36] LI W J，YAO X Z，GUO Z，et al.Fe_3O_4 with novel nanoplate-stacked structure：Surfactant-free hydrothermal synthesis and application in detection of heavy metal ions[J].Journal of Electroanalytical Chemistry，2015，749：75-82.

[37] GEORGE J M，MATHEW B.Curcuma longa rhizome extract mediated unmodified silver nanoparticles as multi-sensing probe for Hg(II) ions[J].Materials Research Express，2019，6(11)：1150h5.

[38] LU J，ZHANG X，ZHANG X，et al.Electrochemical sensor for mercuric chloride based on graphene-MnO_2 composite as recognition element[J].Electrochimica Acta，2015，174：221-229.

（上接第 22 页）

[12] 辛祥鹏.非线性发展方程中解的构造问题[D].聊城：聊城大学，2011.

[13] 陈南.Sharma-Tasso-Olever 方程的 Painlevé 分析与精确解[J].邵阳学院学报(自然科学版)，2020，17(1)：1-5.

[14] 唐晓苓，刘汉泽.(2+1)维广义柱 Kadomtsev-Petviashvilli 方程的 Painlevé 分析及精确解[J].聊城大学学报(自然科学版)，2020，33(3)：1-5.

[15] 张丽香，刘汉泽，辛祥鹏.广义(3+1)维 Zakharov-Kuzentsov 方程的对称约化，精确解和守恒律[J].物理学报，2017，66(8)：9-15.

[16] 李康，刘洪吉.广义 MKP 方程的对称约化和精确解[J].聊城大学学报(自然科学版)，2015(1)：19-23.

[17] 梅建琴，张鸿庆.2+1 维广义潜水波方程的类孤子解与周期解[J].数学物理学报，2005，25(6)：784-788.

[18] 白月星，苏道毕力格.Poisson 方程的一维最优系统和不变解[J].数学杂志，2018，38(4)：706-712.

[19] 赵海军，崔梦天，李明东，等.非线性麦克斯韦方程时域离散化的一种误差估计算法[J].西华师范大学学报(自然科学版)，2012，33(3)：308-310+314.

[20] 孔继荣.一种新的有限元逼近非线性麦克斯韦方程方法及误差估计技术[D].郑州：郑州大学，2016.

[21] Nkonga B，Colin T.Multiscale numerical method for nonlinear Maxwell equations[J].Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B (DCDS-B)，2012，5(3)：631-658.

[22] Carbou G，Hanouzet B.Relaxation approximation of some nonlinear Maxwell initial-boundary value problem [J].Communications in mathematical sciences，2007，4(2)：1-14.

[23] 胡亮，罗懋康.柱面非线性麦克斯韦方程组的行波解[J].物理学报，2017，66(13)：28-33.