

# 一类广义三阶 KdV 方程的动力学分析和精确解

李雪霞,刘汉泽

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

**摘要** 运用动力系统的方法,研究了一类广义三阶 KdV 方程在不同区域内的动力学行为,并得到了此方程的多个新的精确解;给出了该方程相应的动力系统的分岔和相图,证明了在参数空间下,该系统具有无穷多个孤立波解、光滑周期波解,并给出了它们的精确表达式。

**关键词** 动力系统;精确解;广义三阶 KdV 方程;相图

**中图分类号** O175.2

**文献标识码** A



开放科学(资源服务)标识码(OSID)

## Dynamic Behavior and Exact Solutions of a Class of Generalized Third-order KdV Equation

LI Xuexia, LIU Hanze

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

**Abstract** The dynamic behavior of a class of generalized third-order KdV equation in different regions is studied by using the method of dynamical systems, and several new precise solutions of the equations are obtained. First, the bifurcation and phase diagrams of the corresponding dynamical systems are given, and it is proved that the system has infinitely many isolated wave solutions and smooth periodic wave solutions in the parameter space, and their exact expressions are given.

**Key words** dynamic system; exact solution; generalized third order KdV equation; phase diagram

### 0 引言

非线性科学是研究各种非线性现象的基础学科<sup>[1-3]</sup>,它不仅具有重要的科学意义,而且在工程、社会和经济领域,如财政问题、人力资源等方面也具有重要的现实意义。在数学和物理中,带有非线性项的偏微分方程称为非线性偏微分方程<sup>[4-7]</sup>。在自然界中,非线性偏微分方程可以描述许多非线性现象<sup>[8-10]</sup>,因此寻找求解非线性偏微分方程的新方法是非线性科学研究的重要任务之一,有助于人们更好的理解非线性现象的物理意义。到目前为止,已有大量学者提出了许多求解非线性偏微分方程精确解的有效方法,如 sin-cos 法,雅克比行列式法,不变子空间法,  $\frac{G'}{G}$  法, Bäcklund 变换法,动力系统法等。

收稿日期:2020-12-25

基金项目:国家自然科学基金项目(11171041);山东省自然科学基金项目(ZR2020MA011)

通讯作者:刘汉泽,男,汉族,博士,教授,研究方向:微分方程理论与应用,E-mail:honz\_liu@aliyun.com。

本文研究一类广义三阶 KdV 方程

$$u_t + u_x + a_1 u_{xxt} + a_2 u_x u_{xx} + 2a_3 uu_x + \frac{1}{3}a_1 a_3 (uu_{xxx} + u_x u_{xx}) = 0 \quad (1)$$

其中  $u = u(x, t)$ ,  $a_i (i=1, 2, 3)$  是任意常数, 方程(1)既可以表示在重力作用下的浅水中的长波运动, 同时也是研究量子力学和非线性光学的一个重要模型<sup>[11-13]</sup>。2020年, 李奇芳将方程(1)转化为了多个简单的常系数高阶微分方程, 然后通过求解转化后简单的微分方程进而得到了方程(1)的精确解。本文中, 作者将利用动力学系统方法得到方程(1)的分岔和相位图, 并对在不同区域下时方程的分岔和相图进行探讨, 最后给出了系统孤立波解、周期波解的显式参数表示。

## 1 行波变换与首次积分

在本节中, 通过将方程(1)转换为平面动力系统得到方程的首次积分, 然后利用首次积分方法研究了参数空间中矢量场的所有的分岔和相位图。

为了求方程(1)的行波解, 我们设

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = x - ct, \quad (2)$$

其中  $c$  为传播波速, 我们将式(2)代入方程(1)中, 得到

$$(1-c)u' - a_1 cu''' + a_2 u'u'' + 2a_3 uu' + \frac{1}{3}a_1 a_3 (uu''' + u'u'') = 0. \quad (3)$$

对(3)进行积分得

$$(1-c)u - a_1 cu'' + \frac{a_2}{2}u'^2 + a_3 u^2 + \frac{1}{3}a_1 a_3 uu'' = 0, \quad (4)$$

且(4)式等价于下列二维系统<sup>[14-15]</sup>

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = y, \\ \frac{dy}{d\xi} = \frac{(1-c)u + \frac{a_2}{2}y^2 + a_3 u^2}{\frac{1}{3}a_1(3c - a_3 u)}, \end{cases} \quad (5)$$

则(5)式有首次积分

$$\begin{aligned} H(u, y) = & y^2 + \frac{6(a_1 a_2 a_3^2 + 3a_2^2 a_3)u^2}{(2a_1^2 a_3^2 + 9a_1 a_2 a_3 + 9a_2^2)a_2} + \frac{6(4a_1 a_2 a_3 c + 2a_1 a_2 a_3 - 3a_2^2 c + 3a_2^2)u}{(2a_1^2 a_3^2 + 9a_1 a_2 a_3 + 9a_2^2)a_2} \\ & + \frac{6(4a_1^2 a_3 c^2 + 2a_1^2 a_3 c - 3a_1 a_2 c^2 + 3a_1 a_2 c)}{(2a_1^2 a_3^2 + 9a_1 a_2 a_3 + 9a_2^2)a_2} = h, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $h$  是任意常数。

在下文中, 我们将研究行波解的分岔和相位图, 并给出有界行波解的所有可能的精确显式参数表示。

## 2 方程分岔与相位图

本节我们主要讨论参数空间  $(a_1, a_2, a_3)$  中(5)系统给出的向量场的所有可能的分岔和相位图, 使时间尺度变换, 令  $d\xi = \frac{1}{3}a_1(3c - a_3 u)d\theta$ , 则奇异系统(5)可转化为如下规则平面系统

$$\begin{cases} \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{3}a_1(3c - a_3 u)y, \\ \frac{dy}{d\theta} = (1-c)u + \frac{a_2}{2}y^2 + a_3 u^2. \end{cases} \quad (7)$$

式(7)和式(5)具有相同的哈密顿函数, 并且除了围绕奇异直线  $u = c$  的轨线外, (7)和(5)具有相同的拓扑相图。接下来我们讨论系统(7)在参数空间  $(a_1, a_2, a_3)$  中图像的分相问题, 由定性理论可知系统(5)有两

个平衡点  $A_1(0,0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$ 。设  $M(u_e,0)$  为(6)线性化方程组在平衡点  $(u_e,0)$  处的系数矩阵,令  $J(u_e,0) = \det M(u_e,0)$ ,则有

$$J(u_e, y_e) = -\frac{1}{3}a_1a_2a_3y_e^2 - (a_1c - \frac{1}{3}a_1a_3u_e)(2a_3u_e + 1 - c)。 \quad (8)$$

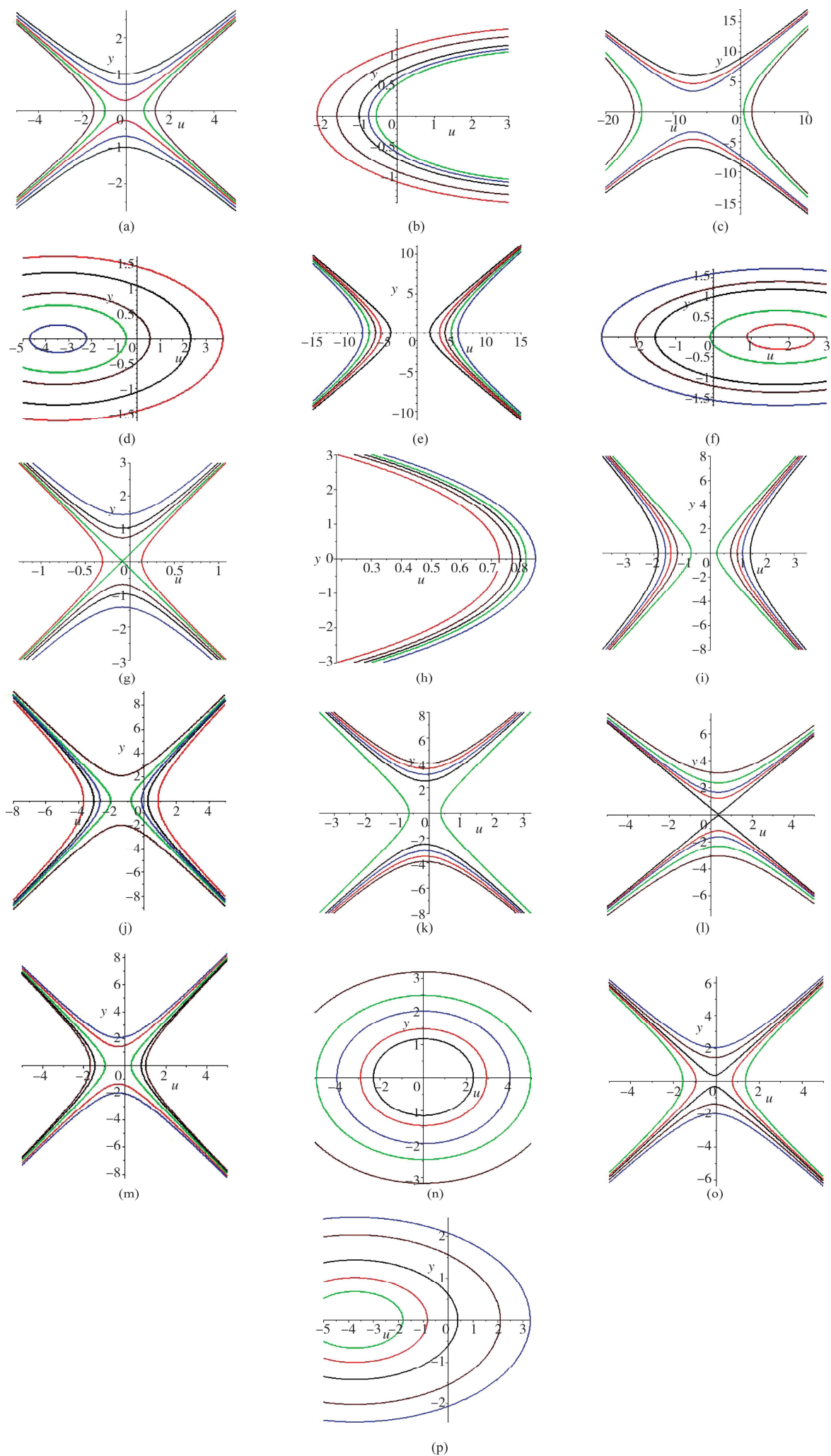
由动力学分岔理论可知,对于平面可积系统的平衡点,如果  $J > 0$ ,则平衡点  $(u_e,0)$  是一个中心点;如果  $J < 0$ ,则平衡点  $(u_e,0)$  是一个鞍点;如果  $J = 0$  且平衡点  $(u_e,0)$  的 Poincare 指数为 0,则平衡点  $(u_e,0)$  是一个尖点。

## 2.1 情形 1:当 $a_2 > 0$ 时

(1) 若  $a_1 > 1, c > 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 1(a) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  为中心点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  为中心点。(2) 若  $a_1 > 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 1(b)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  均为鞍点。(3) 若  $a_1 > 1, c < 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 1(c)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  均为鞍点。(4) 若  $a_1 > 1, c < 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 1(d)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  均为鞍点。(5) 若  $0 < a_1 < 1, c > 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 1(e)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  均为鞍点。(6) 若  $0 < a_1 < 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 1(f)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  均为鞍点。(7) 若  $0 < a_1 < 1, c < 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 1(g)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  为中心点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  为鞍点。(8) 若  $0 < a_1 < 1, c < 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 1(h)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  为中心点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  为鞍点。(9) 若  $a_1 < 0, c > 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 1(i)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  为鞍点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  为中心点。(10) 若  $a_1 < 0, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 1(j)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  均为中心点。(11) 若  $a_1 < 0, c < 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 1(k)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  为鞍点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  为尖点。(12) 若  $a_1 < 0, c < 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 1(L)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  均为中心点。(13) 若  $a_1 = 1, c > 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 1(m)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  为鞍点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  为中心点。(14) 若  $a_1 = 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 1(n)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  为中心点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  为鞍点。(15) 若  $a_1 = 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 1(o)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  为中心点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  为鞍点。(16) 若  $a_1 = 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 1(p)所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  为中心点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3},0)$  为鞍点。

## 2.2 情形 2:当 $a_2 < 0$ 时

(1) 若  $a_1 > 1, c > 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 2(a) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0,0)$  为中心点, 平

图1 当  $a_2 > 0$  时的相图

平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  为鞍点。(2) 若  $a_1 > 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 2(b) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  为中心点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  为鞍点。(3) 若  $a_1 > 1, c < 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 2(c) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  均为鞍点。(4) 若  $a_1 > 1, c < 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 2(d) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  为中心点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  为鞍点。(5) 若  $0 < a_1 < 1, c > 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 2(e) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  为中心点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  为鞍点。(6) 若  $0 < a_1 < 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 2(f) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  均为中心点。(7) 若  $0 < a_1 < 1, c < 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 2(g) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  均为鞍点。(8) 若  $0 < a_1 < 1, c < 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 2(h) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  为中心点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  为鞍点。(9) 若  $a_1 < 0, c > 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 2(i) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  为鞍点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  为中心点。(10) 若  $a_1 < 0, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 2(j) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  为鞍点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  均为中心点。(11) 若  $a_1 < 0, c < 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 2(k) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  为中心点。(12) 若  $a_1 < 0, c < 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 2(l) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  均为鞍点。(13) 若  $a_1 = 1, c > 1$ , 且  $a_3 < 0$ , 如图 2(m) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  为中心点, 平衡点  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  为鞍点。(14) 若  $a_1 = 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 2(n) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  均为中心点。(15) 若  $a_1 = 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 2(o) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  均为鞍点。(16) 若  $a_1 = 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$ , 如图 2(p) 所示, 系统(7)有两个平衡点, 平衡点  $A_1(0, 0)$  和  $A_2(\frac{c-1}{a_3}, 0)$  均为中心点。

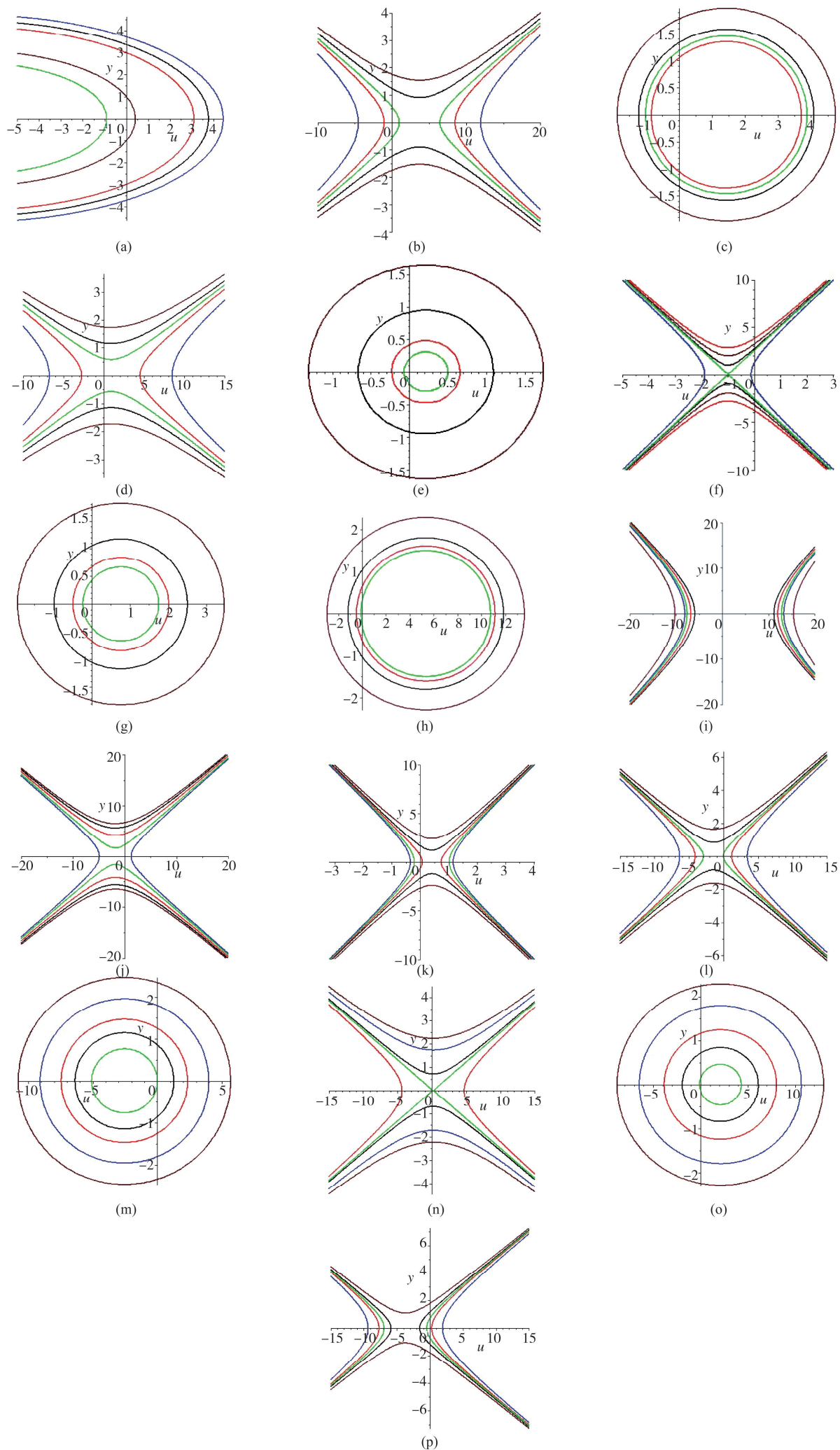
### 3 广义三阶 KdV 方程的精确解

在本节中, 利用平面动力系统(5)和第一积分  $H(u, y)$  进行计算, 给出在图 1 和图 2 中给定的参数条件下方程(1)的显示行波解。

#### 3.1 当 $a_2 > 0$ 时

(i) 设  $a_1 > 1, c > 1$ , 且  $a_3 < 0$  时, 我们考虑如图 1(a) 所示的情况, 令  $H(u, y) = h$ , 则式(6)可以写为

$$y^2 = -\frac{6(a_1 a_2 a_3^2 + 3a_2^2 a_3)u^2}{(2a_1^2 a_3^2 + 9a_1 a_2 a_3 + 9a_2^2)a_2} - \frac{6(4a_1 a_2 a_3 c + 2a_1 a_2 a_3 - 3a_2^2 c + 3a_2^2)u}{(2a_1^2 a_3^2 + 9a_1 a_2 a_3 + 9a_2^2)a_2} - \frac{6(4a_1^2 a_3 c^2 + 2a_1^2 a_3 c - 3a_1 a_2 c^2 + 3a_1 a_2 c)}{(2a_1^2 a_3^2 + 9a_1 a_2 a_3 + 9a_2^2)a_2} + h = -\frac{6(a_1 a_2 a_3^2 + 3a_2^2 a_3)}{(2a_1^2 a_3^2 + 9a_1 a_2 a_3 + 9a_2^2)a_2} (u - u_1)(u_2 - u). \quad (9)$$

图2 当  $a_2 < 0$  时的相图

利用上述公式(9)可以得到系统(5)的第一个方程即

$$\frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}} = \sqrt{-\frac{6(a_1a_2a_3^2+3a_2^2a_3)}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2}} d\xi. \quad (10)$$

求解(10)式可得方程(1)的行波解如下

$$u(\xi) = u_2 - \frac{u_2 - u_1}{2(1 + \tan^2(\sqrt{A} + k_0) + \tan(\sqrt{A} + k_0) \sqrt{1 + \tan^2(\sqrt{A} + k_0)})}, \quad (11)$$

其中  $A = -\frac{6(a_1a_2a_3^2+3a_2^2a_3)}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2}$ ,  $k_0$  为任意常数,  $u_1, u_2$  为图 1(a) 中选取的研究轨线与  $x$  轴的交点, 且满足  $u_2 < 0 < u_1$ 。

(ii) 设  $0 < a_1 < 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$  时, 我们考虑如图 1(f) 所示的情况, 令  $H(u, y) = h$ , 则式(6)可以写为

$$y^2 = -\frac{6(a_1a_2a_3^2+3a_2^2a_3)u^2}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2} - \frac{6(4a_1a_2a_3c+2a_1a_2a_3-3a_2^2c+3a_2^2)u}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2} - \frac{6(4a_1^2a_3c^2+2a_1^2a_3c-3a_1a_2c^2+3a_1a_2c)}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2} + h = -\frac{6(a_1a_2a_3^2+3a_2^2a_3)}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2} u(u_1-u). \quad (12)$$

利用上述公式(12)可以得到系统(5)的第一个方程即

$$\frac{du}{\sqrt{u(u_1-u)}} = \sqrt{-\frac{6(a_1a_2a_3^2+3a_2^2a_3)}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2}} d\xi. \quad (13)$$

求解(13)式可得方程(1)的行波解如下

$$u(\xi) = u_1 - \frac{u_1}{2(1 + \tan^2(\sqrt{A} + k_1) + \tan(\sqrt{A} + k_1) \sqrt{1 + \tan^2(\sqrt{A} + k_1)})}, \quad (14)$$

其中  $A = -\frac{6(a_1a_2a_3^2+3a_2^2a_3)}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2}$ ,  $k_1$  为任意常数,  $u_1$  为图 1(f) 中选取的研究轨线与  $x$  轴的交点且满足  $0 < u_1$ 。

### 3.2 当 $a_2 < 0$ 时

(iii) 设  $a_1 = 1, c > 1$ , 且  $a_3 < 0$  时, 我们考虑如图 2(m) 所示的情况, 令  $H(u, y) = h$ , 则式(6)可以写为

$$y^2 = -\frac{6(a_1a_2a_3^2+3a_2^2a_3)u^2}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2} - \frac{6(4a_1a_2a_3c+2a_1a_2a_3-3a_2^2c+3a_2^2)u}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2} - \frac{6(4a_1^2a_3c^2+2a_1^2a_3c-3a_1a_2c^2+3a_1a_2c)}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2} + h = -\frac{6(a_1a_2a_3^2+3a_2^2a_3)}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2} u(u-u_1). \quad (15)$$

利用上述公式(15)可以得到系统(5)的第一个方程即

$$\frac{du}{\sqrt{u(u-u_1)}} = \sqrt{-\frac{6(a_1a_2a_3^2+3a_2^2a_3)}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2}} d\xi. \quad (16)$$

求解(16)式可得方程的如下孤立波解

$$u(\xi) = \frac{(u_1 + 2k_2 e^{-\frac{6(a_1a_2a_3^2+3a_2^2a_3)}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2} \xi})^2}{8k_2 e^{-\frac{6(a_1a_2a_3^2+3a_2^2a_3)}{(2a_1^2a_3^2+9a_1a_2a_3+9a_2^2)a_2} \xi}}, \quad (17)$$

其中  $k_2$  是任意常数, 其中  $u_1$  为图 2(m) 中选取的研究轨线与  $x$  轴的交点, 且满足  $u_1 < 0$ 。

(iv) 当  $a_1 = 1, c > 1$ , 且  $a_3 > 0$  时, 我们考虑如图 2(o) 所示的情况, 令  $H(u, y) = h$ , 则式(6)可以写为

$$y^2 = -\frac{6(a_2a_3^2+3a_2^2a_3)u^2}{(2a_3^2+9a_2a_3+9a_2^2)a_2} - \frac{6(4a_2a_3c+2a_2a_3-3a_2^2c+3a_2^2)u}{(2a_3^2+9a_2a_3+9a_2^2)a_2} - \frac{6(4a_3c^2+2a_3c-3a_2c^2+3a_2c)}{(2a_3^2+9a_2a_3+9a_2^2)a_2} + h = -\frac{6(a_2a_3^2+3a_2^2a_3)}{(2a_3^2+9a_2a_3+9a_2^2)a_2} (u_1-u)(u-u_2). \quad (18)$$

利用上述公式(18)可以得到系统(5)的第一个方程即

$$\frac{du}{\sqrt{(u_1-u)(u-u_2)}} = \sqrt{-\frac{6(a_2a_3^2+3a_2^2a_3)}{(2a_3^2+9a_2a_3+9a_2^2)a_2}} d\xi. \quad (19)$$

求解(19)式可得方程的如下光滑周期波解

$$u(\xi) = u_2 - \frac{u_1 - u_2}{2(1 + \tan^2(\sqrt{A} + k_3) + \tan(\sqrt{A} + k_3) \sqrt{1 + \tan^2(\sqrt{A} + k_3)})}, \quad (20)$$

其中  $A = -\frac{6(a_2 a_3^2 + 3a_2^2 a_3)}{(2a_3^2 + 9a_2 a_3 + 9a_2^2)a_2}$ ,  $k_3$  是任意常数,  $u_1, u_2$  为图 2(o)中选取的研究轨线与  $x$  轴的交点, 且满足  $0 < u_2 < u_1$ 。

## 4 结语

本文利用动力系统方法研究了一类三阶 KdV 方程在不同区域下的所有分岔和相位图, 然后给出了该方程的光滑孤立波解、光滑周期波解等 4 个精确解, 并给出了它们的精确表达式, 这些精确解是新的, 可能有助于解释一些实际的物理问题。

## 参 考 文 献

- [1] 唐晓苓, 刘汉泽. (2+1)维广义柱 Kadomtsev-Petviashvili 方程的 Painlevé 分析及精确解[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2020, 33(3): 1-5.
- [2] 谢元喜. 一类非线性偏微分方程的摄动解法[J]. 湖南人文科技学院学报, 2005(5): 15-17.
- [3] 孙世飞, 李雪霞, 刘汉泽. 两类非线性方程(组)的对称约化和精确解[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2020, 33(4): 11-16.
- [4] 李奇芳. 基于一类广义三阶 KdV 方程的精确解探讨[J]. 呼伦贝尔学院学报, 2020(2): 92-99.
- [5] 常丽娜, 刘汉泽. 广义变系数 Kawachara 方程的等价变换、精确解和守恒律[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2020, 33(2): 11-17.
- [6] Wang Z L, Liu X Q. Bifurcations and exact traveling wave solutions for the KdV-like equation[J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 95(5): 465-477.
- [7] Liu H Z, Li J B. Lie symmetry analysis and exact solutions for the extended mKdV equation [J]. Acta Applicandae Mathematica, 2010, 109(3): 1107-1119.
- [8] Li J B. Bifurcations of travelling wave solutions for two generalized Boussinesq systems [J]. Science in China Series A: Mathematics, 2008, 51(9): 1577-1592.
- [9] Chang L N, Liu H Z, Xin X P. Lie symmetry analysis, bifurcations and exact solution for the (2+1)-dimensional dissipative long wave system [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2020, 64(3): 807-823.
- [10] Osman M S, Machado J A T. New nonautonomous combined multi-wave solutions for (2+1)-dimensional variable coefficients KdV equation [J]. Nonlinear Dynamics, 2018 (93) : 1-8.
- [11] Feng D H, Li J B. Bifurcation methods of dynamical systems for handling nonlinear wave equations. [J]. Pramana Journal of Physics, 2007 (68): 863-868.
- [12] 朱晖, 郑立景. 修正的非线性水波方程的精确行波解 [J]. 南华大学学报(自然科学版), 2018(1): 63-66.
- [13] Li J B, Zhou Y. Exact solutions in invariant manifolds of some higher-order models describing nonlinear waves [J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2019 (18) : 183-199.
- [14] Feng L L, Tian S F, Wang X B, et al. Rogue waves, homoclinic breather waves and soliton waves for the (2 + 1) -dimensional B-type Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2017, 65: 90-97.
- [15] Mancas, S C, Ronald A. Elliptic solutions and solitary waves of a higher order KdV-BBM long wave equation [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2017 (2) : 2-13.