

矩阵半张量积在求解复线性系统的特殊 Toeplitz 解中的应用

丁文旭,李莹,王栋,王涛

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘要 利用矩阵的半张量积研究复线性系统的三角形 Toeplitz 解.首先提出复矩阵的实向量表示概念,结合矩阵的半张量积将复线性系统转化为相应的实线性系统,进而给出原系统在三角形 Toeplitz 约束下相容的充要条件及通解表达式,并给出相应的数值算法,最后通过数值实验验证了该算法的有效性。

关键词 矩阵半张量积; Toeplitz 矩阵; 实向量表示; 矩阵方程

中图分类号 O151.21

文献标识码 A



开放科学(资源服务)标识码(OSID)

Application of Semi-tensor Product in Solving Special Toeplitz Solution of Complex Linear Systems

DING Wenxu, LI Ying, WANG Dong, WANG Tao

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract The semi-tensor product of matrices is used to study special Toeplitz solution of complex linear system. Firstly, the real vector representation of the complex matrix is proposed. Combined with the semi-tensor product of the matrices, the complex linear system is transformed into the corresponding real linear system. Then, the necessary and sufficient condition for the compatibility of the original system with constraint of triangular Toeplitz and the general solution expression are given. The corresponding numerical algorithm is provided. At last, the effectiveness of the algorithm is verified by numerical experiments.

Key words Semi-tensor product of matrices; Toeplitz matrix; real vector representation; matrix equation

0 引言

对于多线性乃至非线性系统问题计算的数值方法,矩阵表示一直是一个无法绕行的瓶颈问题。对此,程代展研究员提出了矩阵半张量积这一有利工具。相比矩阵普通乘法,矩阵半张量积打破了矩阵维数的限制,并且满足准交换性。目前,矩阵半张量积的应用越来越广泛,函数矩阵微分、非线性多元映射的泰勒展式、向量场和函数等运算都可通过矩阵半张量积来实现^[1]。此外,在非线性和控制系统的对称性^[2,3]、非正规反馈线性化^[4]、布尔网络的拓扑结构^[5,6]、系统的能控能观性的判断^[7]、布尔网络的稳定和镇定设计最优问题^[8]、图染色^[9]以及博弈论的逻辑动态过程和策略最优化^[10]等问题的研究中均体现出矩阵半张量积的合理性、有效

收稿日期:2020-12-01

基金项目:国家自然科学基金项目(11801249);山东省自然科学基金项目(ZR2020MA053)资助

通讯作者:李莹,女,汉,博士,教授,研究方向:线性系统理论, E-mail:liyngld@163.com。

性和优越性。本文将半张量积的应用范围进一步拓展到复线性矩阵方程的特型解的计算问题中。

特殊型矩阵在许多领域有广泛的应用,其中形如

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-n+1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

的矩阵被称为 Toeplitz 矩阵,其在工程中有大量应用。例如,在雷达、声呐探测等目标定位领域,有赖于利用 Toeplitz 矩阵将阵列观测数据的相干函数进行重排,构造一满秩的 Toeplitz 矩阵,再利用奇异值分解来提高对相干信源的 DOA 估计性能^[11];利用四元数 Toeplitz 矩阵重构算法解决电磁矢量阵列的相干信源波达方向估计^[12],此外,在偏微分方程和卷积型积分方程的求解、pade 逼近和控制理论中的最小实现问题中也起着十分重要的作用^[13]。

线性矩阵方程可以被用来解决结构设计、振动分析、自动控制等诸多实际问题,关于矩阵方程的理论及算法已有大量的文献^[14-16]。例如对于矩阵方程的 Toeplitz 解,应用格点滤波理论导出了一种递推解法^[17],利用矩阵的 Kronecker 积、Vec 算子和 MP 广义逆给出了 $\mathbf{AXB} + \mathbf{CYD} = \mathbf{E}$ 的 Toeplitz 矩阵解和对称 Toeplitz 矩阵解的表达式等^[18]。本文利用矩阵半张量积研究复矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 的下上三角形 Toeplitz 解。

本文将使用的符号, \mathbf{R} 表示实数域, \mathbf{R}^n 表示 n 维实列向量集合, $\mathbf{R}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 阶实矩阵集合, \mathbf{C} 表示复数域, $\mathbf{C}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 阶复矩阵集合, $\mathbf{LT}^{n \times n}$ 表示 n 阶下三角 Toeplitz 矩阵集合, $\mathbf{UT}^{n \times n}$ 表示 n 阶上三角 Toeplitz 矩阵集合, \otimes 表示 Kronecker 积, \times 表示半张量积, $\|\cdot\|$ 表示矩阵的 Frobenius 范数或向量的 Euclid 范数, $0_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 阶零矩阵, δ_n^i 表示 n 阶单位矩阵的第 i 列, \mathbf{I}_n 表示 n 阶单位矩阵。我们拟解决以下问题。

问题 1 给定 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{C}^{m \times n}$, 记 $L = \{\mathbf{X} | \mathbf{X} \in \mathbf{LT}^{n \times n}, \mathbf{AX} = \mathbf{B}\}$, 寻找 $\mathbf{X}_L \in L$, 满足 $\|\mathbf{X}_L\| = \min_{\mathbf{X} \in L} \|\mathbf{X}\|$, \mathbf{X}_L 称为 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 的极小范数下三角 Toeplitz 解。

问题 2 给定 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{C}^{m \times n}$, 记 $U = \{\mathbf{X} | \mathbf{X} \in \mathbf{UT}^{n \times n}, \mathbf{AX} = \mathbf{B}\}$, 寻找 $\mathbf{X}_U \in U$, 满足 $\|\mathbf{X}_U\| = \min_{\mathbf{X} \in U} \|\mathbf{X}\|$, \mathbf{X}_U 称为 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 的极小范数上三角 Toeplitz 解。

本文内容安排,第 1 部分给出所需的预备知识,第 2 部分提出关于复向量、复矩阵的新的实向量表示并研究其运算性质,第 3 部分,结合复矩阵的实向量表示和矩阵半张量积研究问题 1、2 的解,第 4 部分,给出算法及数值例子检验方法的有效性,最后,第 5 部分总结全文。

1 预备知识

定义 1^[19] 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{p \times q}$, n 与 p 的最小公倍数为 $t = \text{lcm}(n, p)$, 则 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的半张量积定义为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_{t/n}) (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_{t/p})$ 。

当 $n = p$ 时, \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的半张量积转化成 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的普通乘积。

半张量积具有如下性质。

定理 1^[20] 设 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, 则 $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ 。

定理 2^[21] 设 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, \mathbf{A} 为任意实矩阵, 则 $\mathbf{x} \times \mathbf{A} = (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}) \times \mathbf{x}$ 。

定理 3^[22] 设 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, 则 $\mathbf{W}_{[m, n]} \times \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{y} \times \mathbf{x}$, 其中 $\mathbf{W}_{[m, n]} = [\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\delta}_m^1, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\delta}_m^2, \dots, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\delta}_m^m]$ 称为换位矩阵。

定义 2^[23] 设 $\mathbf{W}_i (i=0, 1, \dots, n)$ 为一组向量空间, 映射 $\mathbf{F}: \prod_{i=1}^n \mathbf{W}_i \rightarrow \mathbf{W}_0$ 为多线性映射, 若 $\dim(\mathbf{W}_i) = k_i$ 且 $\{\boldsymbol{\delta}_{k_i}^1, \boldsymbol{\delta}_{k_i}^2, \dots, \boldsymbol{\delta}_{k_i}^{k_i}\}$ 为 \mathbf{W}_i 的基底, 记 $\mathbf{F}(\boldsymbol{\delta}_{k_1}^{j_1}, \boldsymbol{\delta}_{k_2}^{j_2}, \dots, \boldsymbol{\delta}_{k_n}^{j_n}) = \sum_{s=1}^{k_0} c_s^{j_1, j_2, \dots, j_n} \boldsymbol{\delta}_{k_0}^s$, $j_t = 1, \dots, k_t$, $t=1, \dots, n$, 则称 $\{c_s^{j_1, j_2, \dots, j_n} | j_t = 1, \dots, k_t, t=1, \dots, n; s=1, \dots, k_0\}$ 为 \mathbf{F} 的结构常数。将结构常数按 s 分组, 每组按字典排序排成一行, 再依 s 的顺序排成一个矩阵, 可得

$$M_F = \begin{bmatrix} c_1^{11\dots 1} & \cdots & c_1^{11\dots k_n} & \cdots & c_1^{k_1 k_2 \dots k_n} \\ c_2^{11\dots 1} & \cdots & c_2^{11\dots k_n} & \cdots & c_2^{k_1 k_2 \dots k_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{k_0}^{11\dots 1} & \cdots & c_{k_0}^{11\dots k_n} & \cdots & c_{k_0}^{k_1 k_2 \dots k_n} \end{bmatrix},$$

M_F 称为 F 的结构矩阵。

2 复矩阵的实向量表示及性质

本节我们将提出复矩阵的实向量表示的概念。为此,首先定义复数的实向量表示。

定义 3 设 $x = x_1 + x_2 \mathbf{i} \in \mathbf{C}$, 记 $v^{\mathbf{R}}(x) = (x_1, x_2)^{\mathbf{T}}$, 称 $v^{\mathbf{R}}(x)$ 为复数 x 的实排列式。

利用矩阵半张量积,可将两复数相乘的实排列式利用两复数的实排列表示。

定理 4 设 $x, y \in \mathbf{C}$, 则 $v^{\mathbf{R}}(xy) = M_C \times v^{\mathbf{R}}(x) \times v^{\mathbf{R}}(y)$, 其中 $M_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是复数乘积的结构

矩阵。

相仿地,可以定义复向量的实排列。

定义 4 设 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $\mathbf{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n)^{\mathbf{T}}$ 为复向量,分别称

$$v^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v^{\mathbf{R}}(x^1) \\ \vdots \\ v^{\mathbf{R}}(x^n) \end{pmatrix}, v^{\mathbf{R}}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} v^{\mathbf{R}}(y^1) \\ \vdots \\ v^{\mathbf{R}}(y^n) \end{pmatrix}$$

为复向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的实排列。

下面利用复向量的实排列定义复矩阵的实向量表示的概念。

定义 5 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $Col_j(\mathbf{A})$ ($1 \leq j \leq n$), $Row_i(\mathbf{A})$ ($1 \leq i \leq m$) 分别表示 \mathbf{A} 的第 j 列和第 i 行,称

$$v_c^{\mathbf{R}}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} v^{\mathbf{R}}(Col_1(\mathbf{A})) \\ v^{\mathbf{R}}(Col_2(\mathbf{A})) \\ \vdots \\ v^{\mathbf{R}}(Col_n(\mathbf{A})) \end{pmatrix}, v_r^{\mathbf{R}}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} v^{\mathbf{R}}(Row_1(\mathbf{A})) \\ v^{\mathbf{R}}(Row_2(\mathbf{A})) \\ \vdots \\ v^{\mathbf{R}}(Row_m(\mathbf{A})) \end{pmatrix}$$

分别为复矩阵 \mathbf{A} 的实列排及实行排。

我们提出并证明复向量和复矩阵的实向量表示的如下性质。

定理 5 设 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$, $\mathbf{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n)^{\mathbf{T}}$, $a \in \mathbf{R}$, 则

$$(1) v^{\mathbf{R}}(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) = v^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) + v^{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{x}}),$$

$$(2) v^{\mathbf{R}}(a\mathbf{x}) = av^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}),$$

$$(3) v^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}\mathbf{y}) = M_C \times \left[\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathbf{T}} \times (\mathbf{I}_{2n} \otimes (\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathbf{T}}) \right] \times v^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) \times v^{\mathbf{R}}(\mathbf{y}).$$

证明 (1), (2) 显然成立。下面仅证性质(3)。利用定理 4, 可得

$$\begin{aligned} v^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}\mathbf{y}) &= v^{\mathbf{R}}(\mathbb{1}x^1y^1 + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n) \\ &= M_C \times v(x^1) \times v^{\mathbf{R}}(y^1) + \cdots + M_C \times v(x^n) \times v^{\mathbf{R}}(y^n) \\ &= M_C \times [v(x^1) \times v^{\mathbf{R}}(y^1) + \cdots + v(x^n) \times v^{\mathbf{R}}(y^n)] \\ &= M_C \times \left[\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathbf{T}} \times v^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) \times (\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathbf{T}} \times v^{\mathbf{R}}(\mathbf{y}) \right] \\ &= M_C \times \left[\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathbf{T}} \times (\mathbf{I}_{2n} \otimes (\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathbf{T}}) \right] \times v^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) \times v^{\mathbf{R}}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

定理 6 设 $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{C}^{n \times p}$, $a \in \mathbf{R}$, 则 (1) $v_r^{\mathbf{R}}(\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}}) = v_r^{\mathbf{R}}(\mathbf{A}) + v_r^{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{A}})$; (2) $v_r^{\mathbf{R}}(a\mathbf{A}) = av_r^{\mathbf{R}}(\mathbf{A})$;

(3) $\|\mathbf{A}\| = \|v_r^{\mathbf{R}}(\mathbf{A})\| = \|v_c^{\mathbf{R}}(\mathbf{A})\|$; (4) $v_r^{\mathbf{R}}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{G} \times v_r^{\mathbf{R}}(\mathbf{A}) \times v_c^{\mathbf{R}}(\mathbf{B})$, 其中

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \times (\boldsymbol{\delta}_m^1)^T \times [\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^1)^T] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times (\boldsymbol{\delta}_m^1)^T \times [\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^p)^T] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times (\boldsymbol{\delta}_m^m)^T \times [\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^1)^T] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times (\boldsymbol{\delta}_m^m)^T \times [\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^p)^T] \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \mathbf{M}_C \times \left[\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\delta}_n^i)^T \times (\mathbf{I}_{2n} \otimes (\boldsymbol{\delta}_n^i)^T) \right].$$

证明 (1)-(3)显然成立,仅证(4)。记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \text{Row}_1(\mathbf{A}) \\ \text{Row}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \text{Row}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}, \mathbf{B} = (\text{Col}_1(\mathbf{B}), \text{Col}_2(\mathbf{B}), \dots, \text{Col}_p(\mathbf{B})),$$

则有

$$\begin{aligned} v_r^R(\mathbf{AB}) &= \begin{pmatrix} v^R(\text{Row}_1(\mathbf{A})\text{Col}_1(\mathbf{B})) \\ \vdots \\ v^R(\text{Row}_1(\mathbf{A})\text{Col}_p(\mathbf{B})) \\ \vdots \\ v^R(\text{Row}_m(\mathbf{A})\text{Col}_1(\mathbf{B})) \\ \vdots \\ v^R(\text{Row}_m(\mathbf{A})\text{Col}_p(\mathbf{B})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \times v^R(\text{Row}_1(\mathbf{A})) \times v^R(\text{Col}_1(\mathbf{B})) \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times v^R(\text{Row}_1(\mathbf{A})) \times v^R(\text{Col}_p(\mathbf{B})) \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times v^R(\text{Row}_m(\mathbf{A})) \times v^R(\text{Col}_1(\mathbf{B})) \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times v^R(\text{Row}_m(\mathbf{A})) \times v^R(\text{Col}_p(\mathbf{B})) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^1)^T \times v_r^R(\mathbf{A})] \times [(\boldsymbol{\delta}_p^1)^T \times v_c^R(\mathbf{B})] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^1)^T \times v_r^R(\mathbf{A})] \times [(\boldsymbol{\delta}_p^p)^T \times v_c^R(\mathbf{B})] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^m)^T \times v_r^R(\mathbf{A})] \times [(\boldsymbol{\delta}_p^1)^T \times v_c^R(\mathbf{B})] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^m)^T \times v_r^R(\mathbf{A})] \times [(\boldsymbol{\delta}_p^p)^T \times v_c^R(\mathbf{B})] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^1)^T \times (\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^1)^T)] \times [v_r^R(\mathbf{A}) \times v_c^R(\mathbf{B})] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^1)^T \times (\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^p)^T)] \times [v_r^R(\mathbf{A}) \times v_c^R(\mathbf{B})] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^m)^T \times (\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^1)^T)] \times [v_r^R(\mathbf{A}) \times v_c^R(\mathbf{B})] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^m)^T \times (\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^p)^T)] \times [v_r^R(\mathbf{A}) \times v_c^R(\mathbf{B})] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^1)^T \times (\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^1)^T)] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^1)^T \times (\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^p)^T)] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^m)^T \times (\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^1)^T)] \\ \vdots \\ \mathbf{F} \times [(\boldsymbol{\delta}_m^m)^T \times (\mathbf{I}_{2mn} \otimes (\boldsymbol{\delta}_p^p)^T)] \end{pmatrix} \\ &\quad \times v_r^R(\mathbf{A}) \times v_c^R(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

3 问题 1、2 的解

本节我们将利用矩阵的半张量积解决问题 1 及 2。根据下、上三角 Toeplitz 矩阵 \mathbf{X} 的结构特点,我们提取其有效独立元素,并按照第 2 节介绍的方法进行实排列,记为 $v_s^R(\mathbf{X})$,通过寻找 $v_c^R(\mathbf{X})$ 与 $v_s^R(\mathbf{X})$ 之间的关系将大大降低原问题的复杂性。

定理 7 设 \mathbf{X} 为下三角 Toeplitz 矩阵,则 $v_c^R(\mathbf{X}) = \mathbf{T}v_s^R(\mathbf{X})$,其中

$$v_s^R(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} v^R(\mathbf{x}^1) \\ \vdots \\ v^R(\mathbf{x}^m) \\ \vdots \\ v^R(\mathbf{x}^n) \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_m \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n \end{pmatrix}, \mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{1m} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{rm} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{nm} \end{pmatrix} \quad m = (1, 2, \dots, n), \mathbf{T}_{rm} = 0_{2 \times 2n}, r < m, \mathbf{T}_{rm} = (\boldsymbol{\delta}_n^{r-m+1})^T \otimes \mathbf{I}_2, r \geq m.$$

定理 8 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ 有下三角 Toeplitz 解当且仅当

$$(\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger - \mathbf{I}_{2mn})v_r^R(\mathbf{B}) = 0, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{M} = \mathbf{G}_1 \times v_r^R(\mathbf{A}) \times \mathbf{T}$, \mathbf{G}_1 与定理 6 中的 \mathbf{G} (除维数外) 具有相同的结构。如果 (1) 成立, 则所有下三角 Toeplitz 解的集合为 $\mathbf{L} = \{\mathbf{X} \in \mathbf{L}\mathbf{T}^{m \times n} \mid v_s^R(\mathbf{X}) = \mathbf{M}^\dagger v_r^R(\mathbf{B}) + (\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{M}^\dagger \mathbf{M})\mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{2n}\}$, 其中极小范数下三角 Toeplitz 解 \mathbf{X}_L 满足

$$v_s^R(\mathbf{X}_L) = \mathbf{M}^\dagger v_r^R(\mathbf{B}). \quad (2)$$

证明 \mathbf{X} 为复矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ 的下三角 Toeplitz 解, 可以得到

$$\|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\| = 0,$$

利用 $\mathbf{M}\mathbf{P}$ 逆的性质得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\| &= \|\mathbf{G}_1 \times v_r^R(\mathbf{A}) \times \mathbf{T} \times v_s^R(\mathbf{X}) - v_r^R(\mathbf{B})\| = \|\mathbf{M}v_s^R(\mathbf{X}) - v_r^R(\mathbf{B})\| \\ &= \|\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger \mathbf{M}v_s^R(\mathbf{X}) - v_r^R(\mathbf{B})\| = \|\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger v_r^R(\mathbf{B}) - v_r^R(\mathbf{B})\| \\ &= \|(\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger - \mathbf{I}_{2mn})v_r^R(\mathbf{B})\|. \end{aligned}$$

从而 $\|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\| = 0 \Leftrightarrow \|(\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger - \mathbf{I}_{2mn})v_r^R(\mathbf{B})\| = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger - \mathbf{I}_{2mn})v_r^R(\mathbf{B}) = 0$ 。

由 $v_r^R(\mathbf{A}\mathbf{X}) = v_r^R(\mathbf{B})$ 得 $\mathbf{M}v_s^R(\mathbf{X}) = v_r^R(\mathbf{B})$, 利用实矩阵方程的经典结论即得下三角 Toeplitz 解的所有独立元素的实排列所满足的表达式及极小范数下三角 Toeplitz 解的元素的实排列。

类似的可以得到问题 2 的解, 证明过程省略。

定理 9 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ 有上三角 Toeplitz 解当且仅当

$$(\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{M}}^\dagger - \mathbf{I}_{2mn})v_r^R(\mathbf{B}) = 0, \quad (3)$$

其中 $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{G}_1 \times v_r^R(\mathbf{A}) \times \mathbf{L}$, \mathbf{G}_1 与定理 6 中的 \mathbf{G} (除维数外) 具有相同的结构, 如果 (3) 成立, 则所有上三角 Toeplitz 解的集合为

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{X} \in \mathbf{U}\mathbf{T}^{m \times n} \mid v_s^R(\mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{M}}^\dagger v_r^R(\mathbf{B}) + (\mathbf{I}_{2n} - \tilde{\mathbf{M}}^\dagger \tilde{\mathbf{M}})\mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{2n}\}.$$

极小范数上三角 Toeplitz 解 \mathbf{X}_U 满足

$$v_s^R(\mathbf{X}_U) = \tilde{\mathbf{M}}^\dagger v_r^R(\mathbf{B}), \quad (4)$$

$$\text{其中 } \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_m \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{pmatrix}, \mathbf{L}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{1m} \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{rm} \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{nm} \end{pmatrix}, \mathbf{L}_{rm} = (\boldsymbol{\delta}_n^{m-r+1})^T \otimes \mathbf{I}_2, r \leq m, \mathbf{L}_{rm} = 0_{2 \times 2n}, r > m.$$

4 算法及数值例子

算法 1 (问题 1) 设 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ 满足具有下三角 Toeplitz 解的条件, 本算法用于计算极小范数下三角 Toeplitz 解。

(1) 输入 $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$, ($i = 1, 2$), 输出 $v_r^R(\mathbf{A}), v_r^R(\mathbf{B})$;

(2) 输入 \mathbf{G}, \mathbf{T} , 输出矩阵 \mathbf{M} ;

(3) 根据 (2), 输出问题 1 的极小范数下三角 Toeplitz 解 \mathbf{X}_L 的有效元素实排列结果, 可进一步得到 \mathbf{X}_L 。

算法 2 (问题 2) 设 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ 满足具有上三角 Toeplitz 解的条件, 本算法用于计算极小范数上三角 Toeplitz 解。

(1) 输入 $A_i, B_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$, ($i=1,2$), 输出 $v_r^R(A), v_r^R(B)$;

(2) 输入 G, L , 输出矩阵 \tilde{M} ;

(3) 根据(4), 输出问题 2 的极小范数上三角 Toeplitz 解 X_U 的有效元素实排列结果, 可进一步得到 X_U 。

算例 1 考虑复矩阵方程 $AX=B$ 的下、上三角形 Toeplitz 解, 不妨令 $m=n$ 。A 在 Matlab 中利用 ‘rand’ 随机生成: $A=\text{rand}(n)+\text{rand}(n)i$ 。随机生成两个向量, 利用 ‘Toeplitz’ 及 Tril(Triu) 生成下上三角形 Toeplitz 矩阵 $X_L(X_U)$ 。计算 $B=AX$, $n=5k(k=1:8)$ 。

利用算法 1 计算 $AX=B$ 的极小范数下三角 Toeplitz 解 \tilde{X}_L , 并与真实解 X_L 比较, 令 $\epsilon_1=\log_{10}(\|X_L-\tilde{X}_L\|)$, 得到不同规模的该方程的误差, 如图一所示。

利用算法 2 计算 $AX=B$ 的极小范数上三角 Toeplitz 解 \tilde{X}_U , 并与真实解 X_U 比较, 令 $\epsilon_2=\log_{10}(\|X_U-\tilde{X}_U\|)$, 得到不同规模的该方程的误差, 如图二所示。

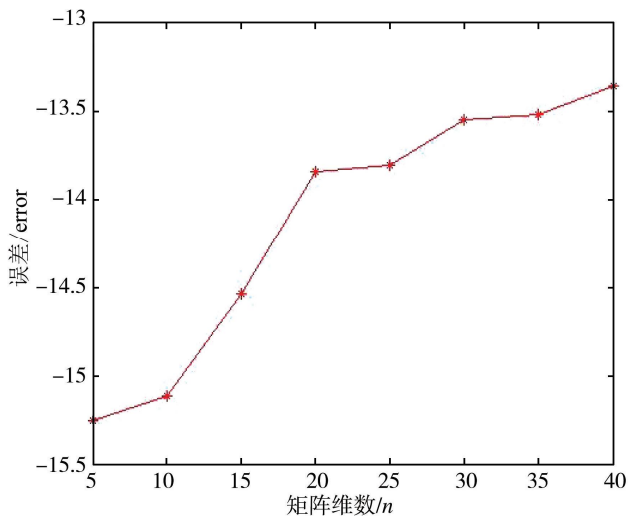


图 1 下三角形 Toeplitz 解的误差

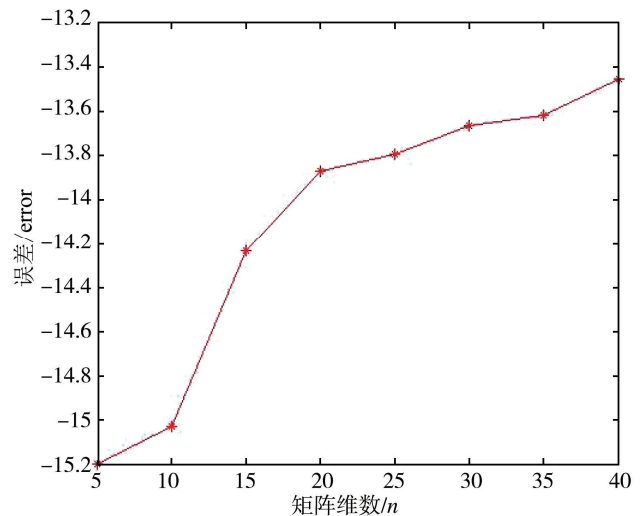


图 2 上三角形 Toeplitz 解的误差

由图中数据可以看出, 利用算法 1 和 2 所得的不同规模的矩阵方程的解的误差的数量级均小于 -13 , 充分说明了该算法的有效性。

5 结论

本文介绍了基于矩阵半张量积求解复线性系统 $AX=B$ 的三角形 Toeplitz 解的新方法。利用复矩阵的实向量表示, 将复矩阵方程转化为实矩阵方程, 进而给出 $AX=B$ 的上、下三角形 Toeplitz 通解的表达式。利用数值例子验证了这种方法的有效性。该方法还可以应用于其他多种代数结构上线性系统的特解的计算, 为矩阵半张量积在数值分析领域寻找到了新的应用价值。

参 考 文 献

- [1] 程代展, 赵寅. 矩阵半张量积: 一个便捷的新工具[J]. 科学通报, 2011, 56(32): 2664-2674.
- [2] Cheng D Z, Yang G, Xi Z. Nonlinear systems possessing linear symmetry[J]. International Journal Robust Nonlinear Control, 2007, 17(1): 51-81.
- [3] 杨同增, 程代展. 具有旋转对称的 m 阶非线性系统的结构[J]. 系统科学与数学, 2004, 24(1): 138-144.
- [4] Cheng D Z, Hu X, Wang Y. Non-regular feedback linearization of nonlinear systems via a normal form algorithm[J]. Automatica, 2004, 40(3): 439-447.
- [5] Fornasini E, Valcher M E. On the periodic trajectories of Boolean control networks[J]. Automatic, 2013, 49(1): 1506-1509.
- [6] Cheng D Z, Qi H S. Controllability and observability of Boolean control networks[J]. Automatic, 2009, 45(7): 1659-1665.
- [7] Cheng D Z, Li Z Q, Qi H S. Realization of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions Neural Networks, 2010, 46(1): 62-69.

- [8] 张继龙,赵志全,乔燕,等.酯交换制油酸甲酯的基团贡献法热力学分析[J].化工学报,2012,63(6):1684-1690.
- [9] 王琳琳,陈建云,梁杰珍,等.枞酸与甲醇酯化反应的基团贡献法热力学分析[J].化工学报,2013,64(6):1900-1902+1905-1906.
- [10] 付丽丽,周彩荣,李文俐,等.油酸甲酯合成反应的热力学性质分析[J].化学工程,2016,44(2):35-40.
- [11] 杨浩,王建红,乔聪震.柠檬酸与正丁醇合成柠檬酸三丁酯的热力学分析[J].石油化工,2011,40(2):171-174.
- [12] 林金清,陈风芳.柠檬酸三丁酯合成的热力学分析[J].华侨大学学报(自然科学版),2016,37(2):218-223.
- [13] 肖赛君,何俊楠,孔辉,等.基于吉布斯自由能定义的范德霍夫等压方程推导[J].乐山师范学院学报,2018,33(8):19-22.
- [14] 邓旭忠,周家华,张焜,等.无毒增塑剂乙酰柠檬酸三丁酯的合成[J].精细化工,2001(2):83-85.
- [15] 周喜,李泽贤,张超.磷钨酸铵铝复合盐催化合成柠檬酸三丁酯[J].精细化工,2019,36(5):919-923+934.
- [16] 夏军.乙酰柠檬酸三丁酯生产工艺研究及中试设计[D].兰州:兰州理工大学,2008.
- [17] 丁斌,韩运华,宋培文.柠檬酸三丁酯、乙酰柠檬酸三丁酯合成工艺的研究[J].塑料工业,2003(7):4-6+42.
- [18] POLING B E, PRAUSNITZ J M, O'CONNELL J P. The Properties of Gases and Liquids[M]. 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2000.
- [19] LIDE D R. CRC Handbook of Chemistry and Physics[M]. 90th ed. CRC Press, 2010.
- [20] DOMALSKI E S, HEARING E D. Estimation of the thermodynamic properties of C-H-N-O-S-halogen compounds at 298.15 K[J]. J Phys Chem Ref Data, 1993, 4(22): 805-1159.
- [21] YUDKIN B, KADYSHEVA V, CHERKANOVA I. Esters of citric acid as plasticizers for PVC[J]. Plasticheskie Massy, 1969, (5): 31-32.
- [22] CAMPBELL N R, TAYLOR E P. The preparation of esters[J]. J Pharm Pharmacol, 1950, 2(1): 229-230.
- [23] SHI Y, LIANG X. Robust acidic pseudo-ionic liquid catalyst with self-separation ability for esterification and acetalization[J]. Chemical Papers, 2019, 73(6): 1413-1421.
- [24] 马沛生. 有机化合物实验物性数据手册: 含碳、氢、氧、卤部分[M]. 北京: 化学工业出版社, 2006.
- [25] 马沛生. 化工数据[M]. 北京: 中国石化出版社, 2003.

(上接第 6 页)

- [8] Cheng D Z, Qi H S, Li Z. Model construction of Boolean network via observed data[J]. IEEE Transactions Neural Networks, 2010, 22(4): 525-536.
- [9] Xu M R, Wang Y Z. Conflict-free coloring problem with application to frequency assignment[J]. Journal of Shan Dong University, 2015, 45(1): 64-69.
- [10] Cheng D Z, Liu Z Q. Application of semi-tensor product of matrices to finite games[J]. Control Theory Applications, 2019, 36(11): 1812-1819.
- [11] 伍逸枫, 丛玉良, 何斌. 基于 Toeplitz 矩阵重构的相干信源波达方向估计研究[J]. 电光与控制, 2010, 17(3): 60-63.
- [12] 张远芳, 李会勇, 谢菊兰. 电磁矢量阵列的四元数 Toeplitz 矩阵重构算法[J]. 现代雷达, 2016, 38(4): 42-45.
- [13] Bunch J. Stability of methods for solving Toeplitz systems of equations[J]. SIAM Journal Scientific and Statistical Computing, 1985, 6(2): 349-364.
- [14] Deng Y B, Hu X Y, Zhang L. Least squares solutions of $\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{A}^T = \mathbf{T}$ over symmetric, skew-symmetric, and positive semidefinite \mathbf{X}^* [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis Applications, 2003, 25(2): 486-494.
- [15] F Trench W. Hermitian, Hermitian R-symmetric, and Hermitian R-skew symmetric procrustes problems[J]. Linear Algebra and its Applications, 2004, 387(1): 83-98.
- [16] Hou J J, Peng Z Y, Zhang X L. An iterative method for the least squares symmetric solution of linear matrix equation $\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{C}$ [J]. Numerical Algorithms, 2006, 42(2): 181-192.
- [17] 陈伟钟. Toeplitz 矩阵方程的格点法递推解[J]. 华东石油学院学报, 1986, 10(3): 19-27.
- [18] 孙庆娟, 郭文斌, 王柄中. 矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{Y}\mathbf{D} = \mathbf{E}$ 的 Toeplitz 矩阵解[J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2012, 33(3): 93-98.
- [19] Cheng D Z, Qi H S, Liu Z Q. From STP to game based control[J]. Science China Information Science, 2018, 61(1): 1-19.
- [20] Lu J Q, Li H T, L Y et al. Survey on semi-tensor product method with its applications in logical networks and other finite-valued systems [J]. IET Control Theory and Applications, 2017, 11(13): 2040-2047.
- [21] 程代展, 夏元清, 马宏斌, 等. 矩阵代数控制与博弈[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2017.
- [22] 程代展, 刘挺, 王元华. 博弈论中的矩阵方法[J]. 系统科学与数学, 2014, 34(11): 1291-1305.
- [23] 程代展, 齐洪胜, 贺风华. 有限集上的映射与动态过程—矩阵半张量积方法[M]. 北京: 科学出版社, 2016.