第 34 卷　第 2 期
2021 年 04 月

聊城大学学报(自然科学版)
Journal of Liaocheng University(Nat.Sci.)

Vol.34 No.2
Apr.2021

**文章编号**　1672-6634(2021)02-0001-07　　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2021.02.001

# 一类特殊延迟微分方程的数值振动性

银鹤凡,王　琦

(广东工业大学 应用数学学院,广东 广州 510006)

**摘　要**　针对一类特殊的延迟微分方程-超前型分段连续微分方程,讨论了数值解的振动性。用 $\theta$-方法对方程进行离散,获得了数值方法保持方程解析解振动性的条件。同时,分别针对解析解和数值解,深入讨论了动力学行为的四种不同状态。一些数值例子进一步验证了相应的结论。

**关键词**　$\theta$-方法;数值解;振动性;非振动性

**中图分类号**　O241

**文献标识码**　A

**开放科学(资源服务)标识码(OSID)**

# Numerical Oscillation for a Special Kind of Delay Differential Equations

YIN Hefan,WANG Qi

(School of Applied Mathematics,Guangdong University of Technology,Guangzhou 510006,China)

**Abstract**　This paper is concerned with the oscillation of numerical solution of a special kind of delay differential equations: differential equations with piecewise continuous arguments of advanced type. The $\theta$-methods are extended to solve the mentioned equation, and the conditions for numerical methods inherit the oscillation of analytic solution are obtained. At the same time, four different states of dynamic behavior are discussed in detail for analytic solution and numerical solution, respectively. The presented numerical examples further testify the corresponding results.

**Key words**　$\theta$-methods; numerical solution; oscillation; non-oscillation

## 0　引言

近年来,针对延迟微分方程数值解性质的研究受到了越来越多的关注[1-4],特别是对于具有分段连续自变量的微分方程(differential equations with piecewise continuous arguments,简写为 EPCA)[5-8]。由于时间整数函数在本质上就是延迟项,所以 EPCA 可被看作是一种特殊的延迟微分方程。文献[9,10]和[11,12]分别讨论了 EPCA 数值解的稳定性和振动性。同时,由于 EPCA 在结构上分别具有微分方程和差分方程的特征,所以在现实生活中发挥了重要作用(见文献[13-16]),也使得对于 EPCA 的研究更加具有理论价值和实际意义。

**收稿日期**:2020-10-07

**基金项目**:国家自然科学基金项目(61803095);广东省自然科学基金项目(2017A030313031,18ZK0174)资助

**通讯作者**:王琦,男,汉族,博士,教授,硕士生导师,研究方向:微分方程数值计算,E-mail:bmwzwq@126.com。

本文主要研究超前型 EPCA 的数值振动性。运用微分方程与差分方程的振动性理论,获得了原方程的数值振动性条件,进一步探讨了振动性与稳定性的内在联系。

考虑方程

$$x'(t)=ax(t)+a_0x([t])+a_1x([t+1]),x(0)=c_0, \tag{1}$$

其中$[t]$表示取 $t$ 的整数部分。

记

$$b_0(t)=\mathrm{e}^{at}+a^{-1}a_0(\mathrm{e}^{at}-1),b_1(t)=a^{-1}a_1(\mathrm{e}^{at}-1),\lambda=b_0(1)/(1-b_1(1))。 \tag{2}$$

**定理 1**[17] 如果 $b_1(1)\neq 1$,则方程(1)在$[0,\infty)$上存在如下形式的唯一解

$$x(t)=(b_0(\{t\})+\lambda b_1(\{t\}))\lambda^{[t]}c_0, \tag{3}$$

其中$\{t\}=t-[t]$。

**定理 2**[17] 方程(1)的解在 $t\to\infty$时是稳定的(或渐近稳定的),当且仅当

$$(a+a_0+a_1)(a_1-a_0-\frac{a(\mathrm{e}^a+1)}{\mathrm{e}^a-1})\geqslant 0(或>0)。 \tag{4}$$

**定理 3**[17] 如果下列条件

$$(a_0+\frac{a\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a-1})(a_1-\frac{a}{\mathrm{e}^a-1})>0 \tag{5}$$

成立,那么方程(1)的解在区间$(n,n+1)$内有零点

$$t_n=n+\frac{1}{a}\ln\frac{a_0+a_1\mathrm{e}^a}{a+a_0+a_1},$$

如果式(5)不成立,并且 $a_0\neq -a\mathrm{e}^a/(\mathrm{e}^a-1)$,$c_0\neq 0$,那么式(3)在$[0,\infty)$上没有零点。

微分方程和差分方程的振动性概念如下。

如果存在序列$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$,使得当 $k\to\infty$时有 $t_k\to\infty$且 $x(t_k)x(t_{k-1})\leqslant 0$,则称方程(1)的非零解是振动的,否则称为非振动;如果方程(1)的所有非零解都是(非)振动的,那么就称方程(1)是(非)振动的。

如果存在序列$\{n_k\}$,使得当 $k\to\infty$时有 $n_k\to\infty$且 $x(n_k)x(n_{k-1})\leqslant 0$,则称方程(1)的非零数值解是振动的,否则称为非振动;如果方程(1)的所有非零数值解都是(非)振动的,那么就称方程(1)的差分方程(或差分格式)是(非)振动的。

## 1 数值解的振动性

### 1.1 差分格式

令步长 $h=1/m$,将 $\theta$-方法(具体形式参见文献[18])用于求解方程(1),得到如下递推关系式

$$x_{km+l+1}=R(z)x_{km+l}+\frac{a_0}{a}(R(z)-1)x_{km}+\frac{a_1}{a}(R(z)-1)x_{(k+1)m}, \tag{6}$$

其中 $z=ha$,$l=0,1,\cdots,m-1$,$R(z)=1+z/(1-\theta z)$。

式(6)经迭代,分别可得方程(1)在整数与非整数节点的递推格式

$$x_{(k+1)}=\frac{R(z)^m+\frac{a_0}{a}(R(z)^m-1)}{1-\frac{a_1}{a}(R(z)^m-1)}x_{km}, \tag{7}$$

$$x_{(k+1)m}=(R(z)^l+\frac{a_0}{a}(R(z)^l-1))x_{km}+\frac{a_1}{a}(R(z)^l-1)x_{(k+1)m},0\leqslant l\leqslant m-1。 \tag{8}$$

### 1.2 解析解和数值解的振动与非振动性

下面的定理给出了非振动性在整数节点和任意节点之间的关系。

**定理 4** $\{x_n\}$非振动当且仅当$\{x_{km}\}$非振动,其中$\{x_n\}$和$\{x_{km}\}$分别由式(8)和式(7)给出。

**证明**　必要性显然。下面证明充分性。如果$\{x_{km}\}$非振动，不妨假设$\{x_{km}\}$是式(7)的一个最终为负的解，即存在一个$k_0\in N$，使得$k>k_0$时，有$x_{km}<0$。为了证明$x_{km+l}<0(k>k_0+1)$，不妨设$a_0<0$且$a_1<0$。如果$a>0$，则$R(z)^{-m}\leqslant R(z)^{-l}$，因此，由式(8)可得

$$R(z)^{-l}x_{km+l}=(1+\frac{a_0}{a}(1-R(z)^{-l}))x_{km}+\frac{a_1}{a}(1-R(z)^{-l})x_{(k+1)m}$$

$$\leqslant(1+\frac{a_0}{a}(1-R(z)^{-m}))x_{km}+\frac{a_1}{a}(1-R(z)^{-m})x_{(k+1)m}=R(z)^{-m}x_{(k+1)m}<0,$$

即有$x_{km+l}<0$。$a<0$的情形类似可证。

**定理 5**　$\{x_n\}$振动当且仅当$\{x_{km}\}$振动，其中$\{x_n\}$和$\{x_{km}\}$分别由式(8)和式(7)给出。

**定理 6**　如果下列两组条件之一成立

$$a_0<-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}\text{和 }a_1<\frac{a}{R(z)^m-1},a_0>-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}\text{和 }a_1>\frac{a}{R(z)^m-1},$$

那么式(7)是振动的。

**证明**　式(7)是振动的当且仅当相应的特征方程没有正根，即

$$\frac{R(z)^m+\frac{a_0}{a}(R(z)^m-1)}{1-\frac{a_1}{a}(R(z)^m-1)}<0,$$

化简得$R(z)^m+\frac{a_0}{a}(R(z)^m-1)<0$和$1-\frac{a_1}{a}(R(z)^m-1)>0$或$R(z)^m+\frac{a_0}{a}(R(z)^m-1)>0$和$1-\frac{a_1}{a}(R(z)^m-1)<0$，即$a_0<-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}$和$a_1<\frac{a}{R(z)^m-1}$或$a_0>-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}$和$a_1>\frac{a}{R(z)^m-1}$。

从而命题得证。

由定理 3 不难得到解析解振动性的结果。

**推论 1**　如果下列任一条件成立(i) $a_0<-\frac{a\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a-1}$和$a_1<\frac{a}{\mathrm{e}^a-1}$，(ii) $a_0>-\frac{a\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a-1}$和$a_1>\frac{a}{\mathrm{e}^a-1}$，那么方程(1)的每一个解都是振动的。令

$$D_1=-\frac{a\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a-1},D_1(m)=-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1},D_2=\frac{a}{\mathrm{e}^a-1},D_2(m)=\frac{a}{R(z)^m-1}。$$

**引理 1**　$D_1(m)$，$D_2(m)$，$D_1$和$D_2$具有如下关系：(i) 当$h\to0$时，有$D_1(m)\to D_1$，$D_2(m)\to D_2$；(ii) 如果对于$a>0$，有$\mathrm{e}^z\leqslant R(z)$成立，或者对于$a<0$，有$\mathrm{e}^z\geqslant R(z)$成立，则有$D_1\leqslant D_1(m)$，$D_2\geqslant D_2(m)$；(iii) 如果对于$a>0$，有$\mathrm{e}^z>R(z)$成立，或者对于$a<0$，有$\mathrm{e}^z<R(z)$成立，则有$D_1>D_1(m)$，$D_2<D_2(m)$。

**证明**　(i) 显然成立，接下来考虑(ii)。如果$a>0$并且$\mathrm{e}^z\leqslant R(z)$，则$\mathrm{e}^a\leqslant R(z)^m$，即

$$\frac{1}{\mathrm{e}^a-1}\geqslant\frac{1}{R(z)^m-1},$$

进而有

$$-\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a-1}\leqslant-\frac{R(z)^m}{R(z)^m-1},$$

所以有$D_1\leqslant D_1(m)$，$D_2\geqslant D_2(m)$。其他情形同理可证。

由定理 4，5，6 和推论 7 得如下定理。

**定理 7**　(i) 如果$D_1<D_1(m)$和$D_2>D_2(m)$成立，那么$\theta$-方法保持方程(1)的振动性；(ii) 如果$D_1\geqslant D_1(m)$和$D_2\leqslant D_2(m)$成立，那么$\theta$-方法保持方程(1)的非振动性。

**引理 2**[18]　对于所有的$m>|a|$，如下四种情形成立：(i) 对于$a>0$，$R(z)^m\geqslant\mathrm{e}^a$当且仅当$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant1$，

(ii) 对于 $a>0$,$R(z)^m\leqslant e^a$ 当且仅当 $0\leqslant\theta\leqslant f(1)$,(iii) 对于 $a<0$,$R(z)^m\geqslant e^a$ 当且仅当 $f(-1)\leqslant\theta\leqslant 1$,(iv) 对于 $a<0$,$R(z)^m\leqslant e^a$ 当且仅当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}$,其中

$$R(z)=1+\frac{z}{1-\theta z},f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}。\tag{9}$$

由定理7,引理1和引理2可得如下结论。

**定理8** $\theta$-方法保持方程(1)的振动性当且仅当(i) $a>0$ 且 $\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$;(ii) $a<0$ 且 $a\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}$。

**定理9** $\theta$-方法保持方程(1)的非振动性当且仅当(i) $a>0$ 且 $0\leqslant\theta\leqslant f(1)$;(ii) $a<0$ 且 $f(-1)\leqslant\theta\leqslant 1$,其中 $f(x)$ 的表达式见式(9)。

## 2 稳定性与振动性的进一步探讨

根据定理2,如下推论显然成立。

**推论2** 方程(1)的解析解渐近稳定(当 $t\to\infty$ 时,$x(t)\to 0$)的充分必要条件是

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(e^a+1)}{e^a-1}\right)>0。\tag{10}$$

**定理10** 方程(1)的数值解渐近稳定(当 $n\to\infty$ 时,$x_n\to 0$)的充分必要条件是

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(R(z)^m+1)}{R(z)^m-1}\right)>0。$$

**证明** 由式(7)可知,当 $n\to\infty$ 时,当 $x_n\to 0$ 且仅当$|\hat{\lambda}|<0$,其中

$$\hat{\lambda}=\frac{R(z)^m+\frac{a_0}{a}(R(z)^m-1)}{1-\frac{a_1}{a}(R(z)^m-1)},$$

通过简单推导有

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(R(z)^m+1)}{R(z)^m-1}\right)>0,$$

故命题得证。

**定理11** 方程(1)的解析解具有下列四种情形。

(A1) 如果下列两组条件之一成立

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(e^a+1)}{e^a-1}\right)>0,a_0<\frac{ae^a}{e^a-1}\text{和 }a_1\geqslant\frac{a}{e^a-1},$$

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(e^a+1)}{e^a-1}\right)>0,a_0>\frac{ae^a}{e^a-1}\text{和 }a_1\leqslant\frac{a}{e^a-1},$$

那么方程(1)的解析解非振动且渐近稳定。

(A2) 如果下列两组条件之一成立

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(e^a+1)}{e^a-1}\right)\leqslant 0,a_0<\frac{ae^a}{e^a-1}\text{和 }a_1\geqslant\frac{a}{e^a-1},$$

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(e^a+1)}{e^a-1}\right)\leqslant 0,a_0>\frac{ae^a}{e^a-1}\text{和 }a_1\leqslant\frac{a}{e^a-1},$$

那么方程(1)的解析解非振动且不稳定。

(A3) 如果下列两组条件之一成立

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(e^a+1)}{e^a-1}\right)\leqslant 0,a_0<\frac{ae^a}{e^a-1}\text{和 }a_1<\frac{a}{e^a-1},$$

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(\mathrm{e}^a+1)}{\mathrm{e}^a-1}\right)\leqslant 0,a_0>\frac{a\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a-1}\text{和 }a_1>\frac{a}{\mathrm{e}^a-1},$$

那么方程(1)的解析解振动且不稳定。

(A4) 如果下列两组条件之一成立

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(\mathrm{e}^a+1)}{\mathrm{e}^a-1}\right)>0,a_0<\frac{a\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a-1}\text{和 }a_1<\frac{a}{\mathrm{e}^a-1},$$

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(\mathrm{e}^a+1)}{\mathrm{e}^a-1}\right)>0,a_0>\frac{a\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a-1}\text{和 }a_1>\frac{a}{\mathrm{e}^a-1},$$

那么方程(1)的解析解振动且渐近稳定。

**证明**　由推论 1 和推论 2 可得。

对于数值解情形,类似有如下结论。

**定理 12**　方程(1)的数值解具有下列四种情形。

(B1) 如果下列两组条件之一成立

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(R(z)^m+1)}{R(z)^m-1}\right)>0,a_0<-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}\text{和 }a_1\geqslant\frac{a}{R(z)^m-1},$$

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(R(z)^m+1)}{R(z)^m-1}\right)>0,a_0>-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}\text{和 }a_1\leqslant\frac{a}{R(z)^m-1},$$

那么方程(1)的数值解非振动且渐近稳定。

(B2) 如果下列两组条件之一成立

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(R(z)^m+1)}{R(z)^m-1}\right)\leqslant 0,a_0<-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}\text{和 }a_1\geqslant\frac{a}{R(z)^m-1},$$

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(R(z)^m+1)}{R(z)^m-1}\right)\leqslant 0,a_0>-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}\text{和 }a_1\leqslant\frac{a}{R(z)^m-1},$$

那么方程(1)的数值解非振动且不稳定。

(B3) 如果下列两组条件之一成立

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(R(z)^m+1)}{R(z)^m-1}\right)\leqslant 0,a_0<-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}\text{和 }a_1<\frac{a}{R(z)^m-1},$$

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(R(z)^m+1)}{R(z)^m-1}\right)\leqslant 0,a_0>-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}\text{和 }a_1>\frac{a}{R(z)^m-1},$$

那么方程(1)的数值解振动且不稳定。

(B4) 如果下列两组条件之一成立

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(R(z)^m+1)}{R(z)^m-1}\right)>0,a_0<-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}\text{和 }a_1<\frac{a}{R(z)^m-1},$$

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(R(z)^m+1)}{R(z)^m-1}\right)>0,a_0>-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}\text{和 }a_1>\frac{a}{R(z)^m-1},$$

那么方程(1)的数值解振动且渐近稳定。

## 3　数值例子

考虑下列 4 个方程

$$x'(t)=x(t)-3x([t])+3x([t+1]),x(0)=1, \tag{11}$$

$$x'(t)=-2x(t)-3x([t])-2x([t+1]),x(0)=1, \tag{12}$$

$$x'(t)=3x(t)+x([t])+3x([t+1]),x(0)=1, \tag{13}$$

$$x'(t)=-4x(t)+3x([t])+2x([t+1]),x(0)=1。 \tag{14}$$

从方程(11)可以看出 $a=0,a_0=-3,a_1=3$,故有

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(\mathrm{e}^a+1)}{\mathrm{e}^a-1}\right)\approx 3.8360>0, a_0<-\frac{a\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a-1}\approx -1.5820, a_1\geqslant\frac{a}{\mathrm{e}^a-1}\approx 0.5820,$$

也就是说,定理 11 的条件(A1)是成立的。

同时有

$$z=ha=\frac{a}{m}, m=50, \theta=0.5, R(z)=1+\frac{z}{1-\theta z}=1.0202,$$

进而可算得

$$(a+a_0+a_1)\left(a_1-a_0-\frac{a(R(z)^m+1)}{R(z)^m-1}\right)\approx 3.8361>0, a_0<-\frac{aR(z)^m}{R(z)^m-1}\approx -1.5819, a_1\geqslant\frac{a}{R(z)^m-1}\approx 0.5819,$$

因此,定理 12 的条件(B1)成立。

从图 1 我们可以看出方程(11)的解析解和数值解都是渐近稳定且非振动的,从而,图 1 中解的行为与定理 11 和定理 12 的理论结果相吻合。

其他情形可以用类似的方式进行验证(参见图 2-图 4)。

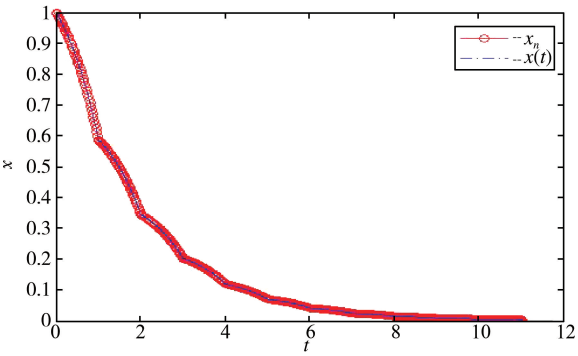


图 1　方程(11)的解析解(中心线)和数值解(外沿线)

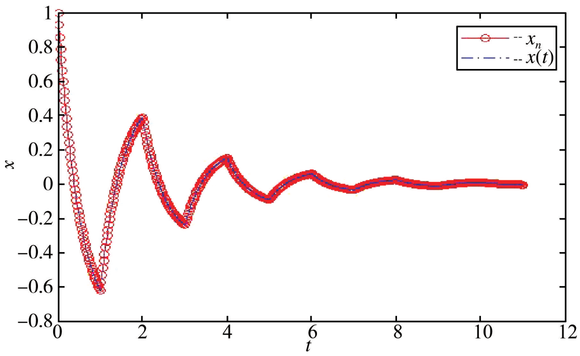


图 2　方程(12)的解析解(中心线)和数值解(外沿线)

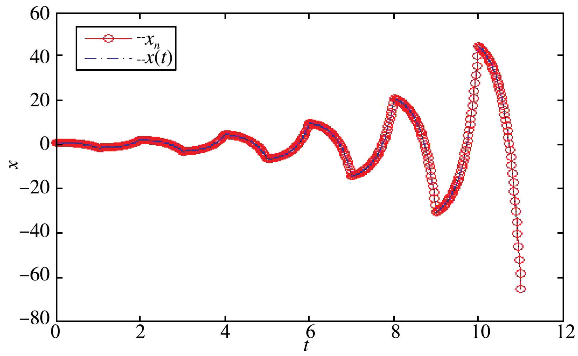


图 3　方程(13)的解析解(中心线)和数值解(外沿线)

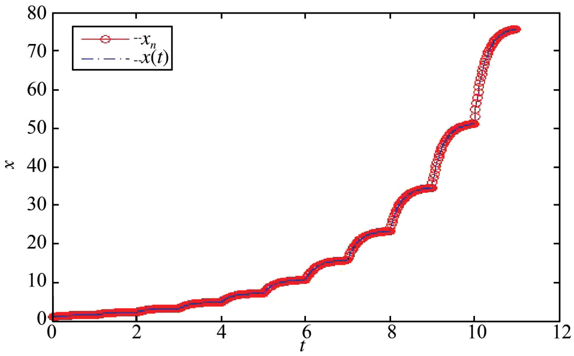


图 4　方程(14)的解析解(中心线)和数值解(外沿线)

## 4　结语

本文针对前向 EPCA,运用 $\theta$-方法进行离散,根据对差分格式的特征方程的分析,获得了数值解振动的充分条件。在此基础上,进一步讨论了数值方法对原方程振动行为的保持性质。所得结论是对历史文献的有益补充和扩展。

## 参 考 文 献

[1] ZHAO J J, YI Y L, XU Y. Strong convergence and stability of the split-step theta method for highly nonlinear netural stochastic delay integro differential equation[J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 157: 385-404.

[2] SINGH B K, AGRAWAL S. A new approximation of conformable time fractional partial differential equations with proportional delay[J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 157: 419-433.

[3] GAO J F, SONG F Y. Oscillation analysis of numerical solutions for nonlinear delay differential equations of hematopoiesis with unimodal

production rate[J].Applied Mathematics and Computation，2015，264(1)：72-84.

[4] YANG Q，WANG Q.Numerical oscillation analysis for Gompertz equation with one delay[J].Fundamental Journal of Mathematics and Applications，2020，3(1)：1-7.

[5] 王琦，温洁嫦.方程 $x(t)=ax(t)+bx([t])$ 数值解的振动性(英文)[J].黑龙江大学自然科学学报，2010，27(5)：625-629.

[6] 王琦，姚洁怡.一类泛函微分方程的数值稳定性和振动性(英文)[J].聊城大学学报(自然科学版)，2020，33(2)：18-27.

[7] GAO J F.Numerical oscillation and non-oscillation for differential equation with piecewise continuous arguments of mixed type[J].Applied Mathematics and Computation，2017，299：16-27.

[8] WANG Q，ZHU Q Y，LIU M Z.Stability and oscillation of numerical solutions for differential equations with piecewise constant arguments of alternately advanced and retarded type[J].Journal of Computational and Applied Mathematics，2011，235(5)：1542-1552.

[9] ZHANG C J，LI C，JIANG J Y.Extended block boundary value methods for neutral equations with piecewise constant argument[J].Applied Numerical Mathematics，2020，150：182-193.

[10] XIE Y，ZHANG C J.A class of stochastic one-parameter methods for nonlinear SFDEs with piecewise continuous arguments[J].Applied Numerical Mathematics，2019，135：1-14.

[11] 王琦，温洁嫦.向前型分段连续微分方程 $\theta$-方法的振动性(英文)[J].安徽大学学报(自然科学版)，2011，35(1)：15-20.

[12] GAO J F，LIU S M.Oscillation analysis of numerical solutions in the $\theta$-methods for differential equation of advanced type[J].Mathematical Methods in the Applied Sciences，2015，38(18)：5271-5278.

[13] ZTRK I，BOZKURT F，GURCAN F.Stability analysis of a mathematical model in a microcosm with piecewise constant arguments[J].Mathematical Biosciences，2012，240(2)：85-91.

[14] AKHMET M U，ARUGASLAN D，YILMAZ E.Stability in cellular neural networks with a piecewise constant argument[J].Journal of Computational and Applied Mathematics，2010，233(9)：2365-2373.

[15] BOZKURT F，ZTRK I.Stability analysis of a population model with piecewise constant arguments[J].Nonlinear Analysis：Real World Application，2011，12(3)：1532-1545.

[16] CHIU K S，LI T X.Oscillatory and periodic solutions of differential equations with piecewise constant generalized mixed arguments[J].Mathematische Nachrichten，2019，292：2153-2164.

[17] SHAH S M，WIENER J.Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations[J].International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences，1983，6(4)：671-703.

[18] SONG M H，YANG Z W，LIU M Z.Stability of $\theta$-methods for advanced differential equations with piecewise continuous arguments[J].Applied Mathematics and Computation，2005，49：1295-1301.