

# 双模压缩 Fock 态在量子相位估计中的应用

侯丽丽 王 帅

(江苏理工学院 数理学院, 江苏 常州 213001)

**摘 要** 量子精密测量主要是利用量子态的非经典效应来提高待测参数估计的精度. 本文研究了双模压缩 Fock 态作为马赫-曾德尔干涉仪的探测态时, 增加双模 Fock 态的粒子数, 可以有效改善基于量子 Fisher 信息的量子 Cramér-Rao 界限, 这一相位测量精度的最终极限. 对于对称的双模压缩 Fock 态, 宇称测量所得到的相位测量精度可以达到量子 Cramér-Rao 界限. 而对于非对称的双模压缩 Fock 态, 宇称测量却不能. 因此, 宇称测量并不总是一种最优测量方案.

**关键词** 量子精密测量; 马赫-曾德尔干涉仪; 宇称测量; 双模压缩 Fock 态

**中图分类号** O413.1

**文献标识码** A

马赫-曾德尔干涉仪(Mach-Zehnder interferometer, 简称 MZI)是测量微小相位的一个重要线性干涉仪. 利用非经典光场作为 MZI 干涉仪的探测态(即输入态), 相位测量精度不但能超越标准量子极限  $1/\sqrt{n}$  ( $n$  为探测态所含有的平均光子数), 甚至可以接近海森堡极限<sup>[1,2]</sup>, 即  $1/n$ . 自从 1981 年, Caves 发现了单模压缩真空态和相干态作为 MZI 干涉仪的探测态能够提高待测相位的测量精度以来<sup>[3]</sup>, 许多作者研究了各种非经典量子态, 特别是诸如 N00N 态<sup>[4]</sup>、Fock 态<sup>[5-9]</sup>、光子扣除或增加压缩态<sup>[10-16]</sup>等这些非高斯型量子态在量子精密测量中的潜在应用.

在量子光学中, 双模压缩 Fock 态(TMSFS)是一类较为普遍且具有一定意义的非高斯型量子态. 理论上, TMSFS 态可以由一个双模压缩算符作用于双模 Fock 态上而获得, 即

$$| \text{TMSFS} \rangle = S_2(r) | m, n \rangle, \quad (1)$$

式中  $S_2(r) = \exp[r(a^\dagger b^\dagger - ab)]$  是双模压缩算符,  $r$  为压缩参数. 由式(1)结合双模压缩算符的 Bogolyubov 变换, 容易得到 TMSFS 态的平均光子数为

$$\bar{N} = (m+n)\cosh 2r + 2\sinh^2 r, \quad (2)$$

根据式(2), TMSFS 态的平均光子数在给定初始压缩参数  $r$  的情况下, 随着双模 Fock 态  $| m, n \rangle$  的粒子数  $m$  和  $n$  增加而增大. TMSFS 态最早由 Chizhow 等人<sup>[17]</sup>提出, 该非高斯型量子态的光子数分布性质、纠缠性质等非经典性质已经得到了较详细地研究<sup>[18,19]</sup>. 2018 年, 向少华等人<sup>[20]</sup>还研究了 TMSFS 态的非高斯动力学演化的特征. 最近, 我们详细研究了对称的 TMSFS 态(即  $m = n$ )在 MZI 干涉仪的相位测量精度中的性能表现<sup>[21]</sup>. 研究发现, 基于量子 Fisher 信息理论, 在给定初始压缩参数的情况下, 增加双模 Fock 态的粒子数, 对称的 TMSFS 态可以提高量子 Cramér-Rao(QCRB)界限, 这一相位测量精度的最终极限. 另一方面, 基于宇称测量所得到的相位测量精度在待测相位很小时可以达到 QCRB 界限. 所以, 对于对称的 TMSFS 态, 宇称测量是一种最优测量方案.

与文献[21]不同, 本文将考虑一般的 TMSFS 态(包括非对称的情况, 即  $m \neq n$ )在量子相位估计中的性能表现. 与双模压缩真空态相比, 研究非对称的 TMSFS 态是否也能提高量子 Fisher 信息, 进而改善 QCRB 界限. 与此同时, 分析宇称测量方案所得到的相位测量精度能否达到 QCRB 界限, 即对于非对称的 TMSFS

收稿日期: 2020-04-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11404040); 江苏省自然科学基金项目(BK20140253)资助

通讯作者: 王帅, 男, 汉族, 博士, 副教授, 研究方向: 量子光学, E-mail: wshslxy@jsut.edu.cn.

态,宇称测量是否也是最优测量.另外在理论上,本文考虑的情况还包括两种重要特例:(1)当  $m = n = 0$  时,即双模压缩真空态,它作为 MZI 干涉仪的探测态,相位测量精度可以达到海森堡极限<sup>[22]</sup>; (2)当  $r = 0$  时,即一般的双模 Fock 态  $|m, n\rangle$ ,该量子态在量子精密测量中的应用也已经得到研究<sup>[8]</sup>.

## 1 马赫-曾德尔干涉仪中的量子 Fisher 信息

本文考虑平衡的 MZI 干涉仪.如图 1,它是一个四端口的光学器件,主要由两块分束器和两个相移器构成.两块分束器主要起着光束的合束和分束过程,而相移器是描述光束经过干涉仪的两条光路所产生的相位差  $\varphi$ .在真实的实验中,它可以用于模拟由于某些原因(如引力波或者存在某种介质)造成光程的改变所导致的相位差,这正是需要测量的待测相位.根据 Yurke 等人<sup>[23]</sup>的工作,通常分束器取为 50:50 的对称形式,其变换由么正算符  $\exp[\pm i\pi(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger)/4]$  来描述,而相移器由么正算符  $\exp[-i\varphi(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b})/2]$  描述.那么,当处于某种量子态的光场输入到 MZI 干涉仪后,干涉仪的输出量子态为<sup>[23]</sup>

$$|\text{out}\rangle_{\text{MZI}} = \exp[-i\varphi\hat{J}_2] |\text{in}\rangle, \quad (3)$$

式中  $\hat{J}_2 = (\hat{a}^\dagger\hat{b} - \hat{a}\hat{b}^\dagger)/(2i)$ .注意到以下量子变换

$$\begin{aligned} \exp[-i\varphi\hat{J}_2]\hat{a}^\dagger\exp[i\varphi\hat{J}_2] &= \hat{a}^\dagger\cos\frac{\varphi}{2} + \hat{b}^\dagger\sin\frac{\varphi}{2}, \\ \exp[-i\varphi\hat{J}_2]\hat{b}^\dagger\exp[i\varphi\hat{J}_2] &= \hat{b}^\dagger\cos\frac{\varphi}{2} - \hat{a}^\dagger\sin\frac{\varphi}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

以及关系  $\exp[-i\varphi\hat{J}_2] |0, 0\rangle = |0, 0\rangle$ ,原则上基于输入量子态和输出量子态的变换关系式(3),可以得到输出量子态的表达式.为了方便后文中的计算,并注意到 TMSFS 态还可以写成双变量厄密多项式算符激发双模压缩真空态的形式<sup>[24]</sup>

$$|\text{TMSFS}\rangle = \frac{(e^{-i\theta}\tanh r)^{(m+n)/2}}{\sqrt{m!n!}\cosh r} H_{m,n}\left(\frac{\hat{a}^\dagger\text{sechr}}{\sqrt{e^{-i\theta}\tanh r}}, \frac{\hat{b}^\dagger\text{sechr}}{\sqrt{e^{-i\theta}\tanh r}}\right) \exp[\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger e^{i\theta}\tanh r] |0, 0\rangle, \quad (5)$$

式中  $H_{m,n}(x, y)$  是双变量厄密多项式

$$H_{m,n}(x, y) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial \tau^n} \exp[-t\tau + tx + \tau y] \Big|_{t,\tau=0}, \quad (6)$$

这里把 TMSFS 态用相干态表象来表示,即

$$|\text{TMSFS}\rangle = \frac{\tanh^{(m+n)/2} r}{\cosh r \sqrt{m!n!}} \int \frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2} H_{m,n}\left(\frac{\alpha^*\text{sechr}}{\sqrt{\tanh r}}, \frac{\beta^*\text{sechr}}{\sqrt{\tanh r}}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha^*\beta^*\tanh r\right] |\alpha, \beta\rangle, \quad (7)$$

式中  $|\alpha, \beta\rangle = \exp[-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2 + \hat{a}^\dagger\alpha + \hat{b}^\dagger\beta] |0, 0\rangle$  表示双模相干态,它是湮灭算符  $\hat{a}$  和  $\hat{b}$  的本征态.那么当 TMSFS 态输入到 MZI 干涉仪时,即把式(7)带入到式(3),计算可得干涉仪的输出量子态变为

$$\begin{aligned} |\text{out}\rangle_{\text{MZI}} &= \frac{\text{sechr}}{\sqrt{m!n!}} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \int \frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2} \exp\left[-|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \alpha^*\beta^*\tanh r - xy\tanh r + \alpha^*x\text{sechr} \right. \\ &\quad \left. + \beta^*y\text{sechr}\right] \times \exp\left[\left(\alpha\cos\frac{\varphi}{2} - \beta\sin\frac{\varphi}{2}\right)\hat{a}^\dagger + \left(\alpha\sin\frac{\varphi}{2} - \beta\cos\frac{\varphi}{2}\right)\hat{b}^\dagger\right]_{x,y=0} |0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

尽管式(8)的形式比较复杂,但是它却能极大地简化后文中的计算.

下面,我们首先计算 TMSFS 态作为 MZI 干涉仪探测态时的量子 Fisher 信息.干涉仪的相位测量最终精度由基于量子 Fisher 信息的 QCRB 界限所确定<sup>[25]</sup>

$$\Delta\varphi_{\min} = \frac{1}{\sqrt{F_Q}}, \quad (9)$$

对于量子纯态作为 MZI 干涉仪的探测态,相应的量子 Fisher 信息可基于输入量子态计算给出<sup>[26]</sup>

$$F_Q = 4[\langle\text{in}|\hat{J}_2^2|\text{in}\rangle - |\langle\text{in}|\hat{J}_2|\text{in}\rangle|^2], \quad (10)$$

根据式(1),经繁琐计算可得

$$F_Q = 2nm\cosh^4 r + 2(m+1)(n+1)\sinh^4 r + \frac{1}{2}(m+n+1)^2\sinh^2 2r + (m+n)\cosh 2r + 2\sinh^2 r, \quad (11)$$

式(11)是本文的第一个主要结果.根据式(9)和(11)容易看出,在给定初始压缩参数  $r$  的情况下,增加双模

Fock 态的  $m$  和  $n$  的取值, QCRB 界限必然会得到提高. 这主要是由于在给定初始压缩参数的情况下, TMSFS 态所含有的平均光子数随着  $m$  和  $n$  的增加而增大, 正如式(2)所示. 因此, 在给定初始压缩参数的情况下, 与双模压缩真空态相比较, 一般的 TMSFS 态是可以有效提高相位测量的最终测量精度. 因此, 即使是在  $m \neq n$  情况下, TMSFS 态依然可以有效提高 QCRB 界限.

特别地, 在极端非对称情况下, 譬如取  $n = 0$  ( $m \neq 0$ ), 式(11)退化为下面的简单形式

$$F_Q = 2 \frac{(m+1)(m+2) \tanh^2 r}{(1 - \tanh^2 r)^2} + m, \quad (12)$$

显然, 给定初始压缩参数的情况下, 增加  $m$  的取值依然会有效提高 QCRB 界限. 另一方面, 若是根据探测态的总光子数, 式(12)又可改写成

$$F_Q = \frac{(\bar{N}^2 + 2\bar{N})(m+2) - m}{2m+2} - \frac{1}{2}(m^2 + m), \quad (13)$$

可见, 限定探测态都具有相同平均光子数的情况下, 增加  $m$  的取值反而会削弱 QCRB 界限. 正如文献[21]所指出的, 在限定探测态都具有相同平均光子数的情况下, 与 TMSFS 相比较, 双模压缩真空态在 MZI 干涉仪中的相位测量精度反而是最好的. 量子态所含有的平均光子数是量子精密测量中的一个重要参数. 由以上分析可见, TMSFS 态的优势在于给定初始压缩参数时, 它的平均光子数会随着  $m$  和  $n$  的增加而增大, 从而导致了其 Fisher 信息的增大.

## 2 宇称测量方案与相位的测量精度

宇称测量方案是测量微小待测相位常用的一种测量方法. 已经证明对于许多非经典态作为 MZI 干涉仪的探测态<sup>[4-6, 8-11, 13-15]</sup>, 它是一种最优测量方案. 特别地, 对于一类路径对称的量子态, 理论上已经证明了在某些特殊相位点, 宇称测量方案能够达到 QCRB 界限, 是最优测量<sup>[27]</sup>. 对于一般的 TMSFS 态, 本文主要研究宇称测量方案所给出的相位测量精度是否能够达到 QCRB 界限, 即宇称测量方案是否是最优测量方案.

与量子精密测量的其它测量方案相比, 宇称测量只需要探测其中一个输出端口的光子数是奇数还是偶数就可以了, 测量方法较为简单<sup>[28]</sup>. 在量子力学中, 宇称算符  $(-1)^{\hat{b}^\dagger \hat{b}}$  在相干态表象中可表示为<sup>[29]</sup>

$$\Pi_b = \int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle \langle -z|, \quad (14)$$

式中  $|z\rangle = \exp[-|z|^2/2 + \hat{b}^\dagger z] |0\rangle$  是相干态. 如图 1 所示, 在干涉仪输出端 b 处进行宇称测量, 也就是求解宇称算符在输出量子态中的期望值

$$\langle \Pi_b(\varphi) \rangle_{m,n} = \langle \text{out} | \int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle \langle -z| | \text{out} \rangle_{\text{MZI}}. \quad (15)$$

注意到以下积分公式<sup>[30]</sup>

$$\int \frac{d^2 \beta}{\pi} \exp[\zeta |\beta|^2 + \xi \beta + \eta \beta^* + f \beta^2 + g \beta^2] = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left[\frac{-\zeta \xi \eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fg}\right], \quad (16)$$

该积分公式的收敛条件为  $\text{Re}(\xi \pm f \pm g) < 0$  和  $\text{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\xi \pm f \pm g}\right) < 0$ . 把式(8)代入式(15), 并利用公式(16)

进行积分后, 最终可以得到宇称测量信号的解析解, 即

$$\langle \Pi_b(\varphi) \rangle = \frac{\langle \Pi_b(\varphi) \rangle_0}{m!n!} \frac{\partial^{2m+2n}}{\partial x^m \partial y^n \partial t^m \partial \tau^n} \exp\left[\frac{(x^2 + t^2 - y^2 - \tau^2) \tanh r \sin 2\varphi}{2 \cosh^2 r (1 - 2 \tanh^2 r \cos 2\varphi + \tanh^4 r)} - \frac{(xy + t\tau)(1 - \cos 2\varphi)(\tanh r + \tanh^3 r) - (x\tau + yt) \cos \varphi \text{sech}^4 r + (y\tau - xt) \sin \varphi \cosh 2r \text{sech}^4 r}{1 - 2 \tanh^2 r \cos 2\varphi + \tanh^4 r}\right]_{x,y,t,\tau=0}, \quad (17)$$

式中  $\langle \Pi_b(\varphi) \rangle_0$  是当双模压缩真空态作为 MZI 干涉仪的探测态时, 相应的宇称测量信号

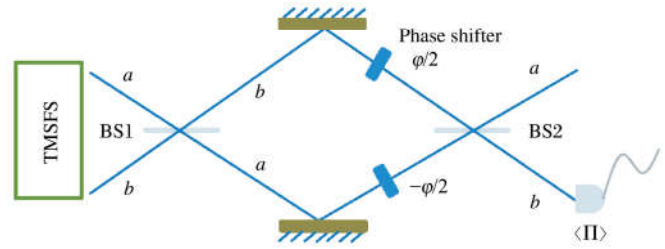


图 1 马赫-曾德尔干涉仪结构示意图

$$\langle \Pi_b(\varphi) \rangle_0 = \frac{\operatorname{sech}^2 r}{\sqrt{1 - 2 \tanh^2 r \cos 2\varphi + \tanh^4 r}} \quad (18)$$

在推导式(17)的过程中,与文献[22]相同,方便起见,本文也做了一个相位变换  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi/2$ . 该式是本文的第二个主要结果. 特别的,在  $r = 0$  时, TMSFS 态退化为双模 Fock 态  $|m, n\rangle$ , 由式(17)可得当双模 Fock 态作为 MZI 干涉仪探测态时的宇称测量的信号为

$$\langle \Pi_b(\varphi) \rangle_{r=0} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{2m+2n}}{\partial x^m \partial y^n \partial t^m \partial \tau^n} \exp[(y\tau - xt)\sin\varphi - (x\tau + yt)\cos\varphi]_{x,y,t,\tau=0}, \quad (19)$$

这与文献[8]的结果相一致.

特别地,与式(12)相对应,当  $n = 0$  时宇称测量信号式(17)退化为

$$\langle \Pi_b(\varphi) \rangle_{|n=0} = \frac{\langle \Pi_b(\varphi) \rangle_0}{m!} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^m \partial t^m} \exp\left[\frac{(x^2 + t^2)\tanh r \sin 2\varphi \operatorname{sech}^2 r}{2(1 - 2 \tanh^2 r \cos 2\varphi + \tanh^4 r)} - \frac{xt \sin\varphi \cosh 2r \operatorname{sech}^4 r}{1 - 2 \tanh^2 r \cos 2\varphi + \tanh^4 r}\right]_{x,t=0}, \quad (20)$$

应用勒让德多项式的产生函数<sup>[31]</sup>

$$\frac{2^m m!}{(y^2 - 1)^{m/2}} P_m(y) = \frac{\partial^{2m}}{\partial x^m \partial t^m} \exp\left[-x^2 - t^2 + \frac{2xt}{\sqrt{y^2 - 1}}y\right]_{x,t=0}, \quad (21)$$

式(20)还可以写成如下简洁形式,即

$$\langle \Pi_b(\varphi) \rangle_{|n=0} = \langle \Pi_b(\varphi) \rangle_0^{m+1} \sin^m \varphi P_m\left(\frac{-(1 + \tanh^2 r)}{\sqrt{1 - 2 \tanh^2 r \cos 2\varphi + \tanh^4 r}}\right), \quad (22)$$

应用式(12)和(22)从数值上可方便的检验,对于这种非对称的 TMSFS 态,宇称测量是否是最优测量.

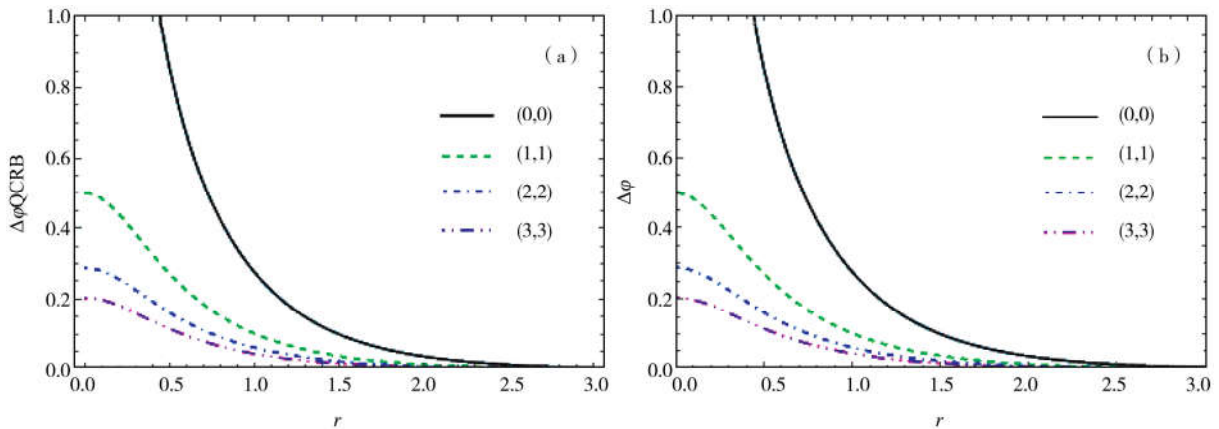


图 2 具有  $(m, n)$  不同取值的对称 TMSFS 态在  $\varphi = 10^{-3}$  时, 相位测量精度随初始压缩参数  $r$  的变化曲线  
(a) 基于量子 Fisher 信息所得到的最终测量界限 QCRB 界限; (b) 基于宇称测量所得到的相位测量精度

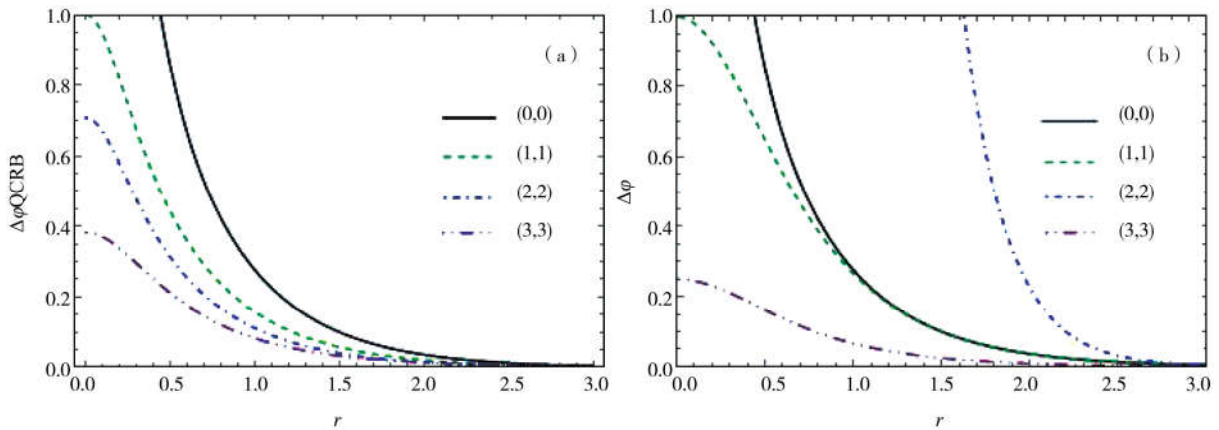


图 3 具有  $(m, n)$  不同取值的非对称 TMSFS 态在  $\varphi = 10^{-3}$  时, 相位测量精度随初始压缩参数  $r$  的变化曲线  
(a) 基于量子 Fisher 信息所得到的最终测量界限 QCRB 界限; (b) 基于宇称测量所得到的相位测量精度

利用误差传播理论,干涉仪的相位测量精度为<sup>[28]</sup>

$$\Delta\varphi = \frac{\sqrt{1 - \langle \Pi(\varphi) \rangle^2}}{|\partial \langle \Pi(\varphi) \rangle / \partial \varphi|}, \quad (23)$$

式中已经利用了  $\langle \Pi^2(\varphi) \rangle = 1$  这一事实. 当  $m = n = 0$  时, 把式(18)代入式(23), 就得到了双模压缩真空态作为 MZI 干涉仪的探测态时, 相位的测量精度为<sup>[22]</sup>

$$\Delta\varphi |_{m=n=0} = \frac{1 + \sinh^2 2r \cos 2\varphi}{\sinh 2r |\cos \varphi|}. \quad (24)$$

文献[21]已经指出, 在限定探测态具有相同的平均光子数时, 与双模压缩真空态相比, 对称的 TMSFS 态并不能改善 QCRB 界限. 从数值上可以证明对于非对称的 TMSFS 态的情况也是如此. 因此, 本文主要考虑在给定压缩参数的情况下, 一般的 TMSFS 态是否可以改善 QCRB 界限, 宇称测量所得到的相位测量精度是否能够达到 QCRB 界限.

图 2(a)表示在不同的  $(m, n)$  取值的情况下, 相位测量的最终理论极限 QCRB 界限随压缩参数的变化曲线. 显然, 在给定初始压缩参数的情况下, 增加  $(m, n)$  的取值, 是可以有效改善 QCRB 界限的. 这一结果与式(11)相符合. 图 2(b)则代表宇称测量在待测相位趋于零时(此处取  $\varphi = 0.001$ )所得到的相位测量精度随压缩参数的变化曲线. 图 2 表明, 在待测相位趋于零时, 宇称测量所得到的相位测量精度能够达到 QCRB 界限. 因此, 宇称测量对于  $m = n$  时的 TMSFS 态来说是最优测量方案. 但是, 当  $m \neq n$  时的非对称 TMSFS 态作为 MZI 干涉仪的探测态时, 由图 3(a)可见, 在给定初始压缩参数的情况下, 增加双模 Fock 态的粒子数  $m$  和  $n$  的取值虽然可以提高 QCRB 界限, 但宇称测量所得到的相位测量精度并不能达到 QCRB 界限. 而且, 非对称 TMSFS 态所提供的相位测量精度甚至比双模压缩真空态要差很多, 特别是在  $m > 1$  和  $n = 0$  的情况. 因此, 与双模压缩真空态相比, 在给定初始压缩参数的情况下, 虽然非对称的 TMSFS 能够有效改善 QCRB 界限, 但宇称测量并不是该量子态的最优测量方案.

### 3 结论

本文研究了 TMSFS 态作为 MZI 干涉仪的探测态, 它在相位测量精度中的性能表现, 给出了相应的量子 Fisher 信息和宇称测量结果的解析表达式. 研究表明, 一方面根据基于量子 Fisher 信息理论, 在给定初始压缩参数的情况下, TMSFS 态可以进一步值提高相位测量的最终界限, 即 QCRB 界限. 另一面基于宇称测量方案, 只有当  $m = n$  时的对称 TMSFS 态, 宇称测量在待测相位趋于零时才是最优方案. 而对于  $m \neq n$  的情况, 宇称测量所得到相位测量精度并不能达到 QCRB 界限. 因此, 本文研究结果也再次证明了, 对于某些非经典态, 宇称测量并不总是一种最优测量方案.

### 参 考 文 献

- [1] Ou Z Y. Complementarity and fundamental limit in precision phase measurement[J]. Phys Rev Lett, 1996, 77(12): 2352-2355.
- [2] Holland M J, Burnett K. Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit[J]. Phys Rev Lett, 1993, 71(9): 1355-1358.
- [3] Caves C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer [J]. Phys Rev D, 1981, 23(8): 1693-1708.
- [4] Dowling, J P. Quantum optical metrology the lowdown on high-N00N states[J]. Contemp Phys, 2008, 49(2): 125-143.
- [5] Campos R A, Gerry C C, Benmoussa A. Optical interferometry at the Heisenberg limit with twin Fock states and parity measurements[J]. Phys Rev A, 2003, 68(2): 023810.
- [6] Xu X X, Jia F, Hu L Y, et al. Quantum interference between an arbitrary-photon Fock state and a coherent state[J]. J Mod Opt, 2012, 59(18): 1624-1633.
- [7] Pezzé L, Smerzi A. Ultrasensitive Two-mode interferometry with single-mode number squeezing[J]. Phys Rev Lett, 2013, 110(16): 163604.
- [8] Wang S, Wang Y T, Zhai L J, et al. Two-mode quantum interferometry with a single-mode Fock state and parity detection[J]. J Opt Soc Am B, 2018, 35(5): 1046-1053.
- [9] 王帅, 吴世臣, 睦永兴. 基于宇称测量的热态和 Fock 态的相位估计方案[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2018, 31(4): 77-82+110.
- [10] Carranza R, Gerry C C. Photon-subtracted two-mode squeezed vacuum states and applications to quantum optical interferometry[J]. J Op Soc Am B, 2012, 29(9): 2581-2587.
- [11] Birrittella R, Gerry C C. Quantum optical interferometry via the mixing of coherent and photon-subtracted squeezed vacuum states of light [J]. J Opt Soc Am B, 2014, 31(3): 586-591.
- [12] Gong Q K, Hu X L, Li D, et al. Intramode-correlation-enhanced phase sensitivities in an SU(1, 1) interferometer[J]. Phys Rev A, 2017, 96



(3):033809.

- [13] Guo L L, Yu Y F, Zhang Z M. Improving the phase sensitivity of an SU(1,1) interferometer with photon-added squeezed vacuum light[J]. *Opt Express*, 2018, 26(22):29099-29109.
- [14] Ouyang Y, Wang S, Zhang L. Quantum optical interferometry via the photon-added two-mode squeezed vacuum states[J]. *J Opt Soc Am B*, 2016, 33(7):1373-1381.
- [15] Wang S, Xu X X, Xu Y J, et al. Quantum interferometry via a coherent state mixed with a photon-added squeezed vacuum state[J]. *Opt Communn*, 2019, 444:102-110.
- [16] 鹿博, 韩成银, 庄敏, 等. 超冷原子系综的非高斯纠缠态与精密测量[J]. *物理学报*, 2019, 68(4):040306.
- [17] Chizhov A V, Murzakhmetov B K. Photon statistics and phase properties of two-mode squeezed number states[J]. *Phys Lett A*, 1993, 176(1-2):33-40.
- [18] Dell'Anno F, De Siena S, Illuminati F. Multiphoton quantum optics and quantum state engineering[J]. *Phys Rep*, 2007, 428(2):153-168.
- [19] Namiki R. Non-Gaussian entangled states and entangled orthonormal basis[J]. *J Phys Soc Japan*, 2010, 79(1):013001.
- [20] Xiang S, Zhu X, Song K. Non-Gaussianity dynamics of two-mode squeezed number states subject to different types of noise based on cumulant theory[J]. *Chin Phys B*, 2018, 27(10):100305.
- [21] Hou L L, Wang S, Xu X F. Optical enhanced interferometry with two-mode squeezed twin-Fock states and parity detection[J]. *Chin Phys B*, 2020, 29(3):034203.
- [22] Anisimov P M, Raterman G M, Chiruvelli A, et al. Quantum Metrology with Two-Mode Squeezed Vacuum; Parity Detection Beats the Heisenberg Limit[J]. *Phys Rev Letts*, 2010, 104(10):103602.
- [23] Yurke B, McCall S L, Klauder J R. SU(2) and SU(1,1) interferometers[J]. *Phys Rev A*, 1986, 33(6):4033-4054.
- [24] Hu L Y, Fan H Y. Two-Variable hermite polynomial excitation of two-mode squeezed vacuum state as squeezed two-mode number state[J]. *Commun Theor Phys(Beijing, China)*, 2008, 50(4):965-975.
- [25] Helstrom C W. *Quantum Detection and Estimation Theory*[M]. New York: Academic Press, 1976.
- [26] Ben-Aryeh Y. Phase estimation by photon counting measurements in the output of a linear Mach-Zehnder interferometer[J]. *J Opt Soc Am B*, 2012, 29(10):2754-2764.
- [27] Seshadreesan K P, Kim S, Dowling J P, et al. Phase estimation at the quantum Cramér-Rao bound via parity detection[J]. *Phys Rev A*, 2013, 87(4):1-6.
- [28] Gerry C C, Mimihi J. The parity operator in quantum optical metrology[J]. *Contemp Phys*, 2010, 51(6):497-511.
- [29] Fan H Y, Ruan T N. Coherent state formulation of the weyl correspondence and the Wigner Function[J]. *Commun Theor Phys*, 1983, 2(6):1563-1574.
- [30] Puri R R. *Mathematical Methods of Quantum Optics*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- [31] Hu L Y, Fan H Y. Statistical properties of photon-subtracted squeezed vacuum in thermal environment[J]. *J Opt Soc Am B*, 2008, 25(12):1955.

# Applications of Two-Mode Squeezed Fock State in Quantum Phase Estimation

HOU Li-li    WANG Shuai

(School of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Technology, Changzhou 213001, China)

**Abstract** Quantum precision is mainly to estimate accurately the value of an unknown parameter with the help of the quantum effects. When the two-mode squeezed Fock state considered as an interferometer state of a Mach-Zehnder interferometer, compared with the two-mode squeezed vacuum state, two-mode squeezed Fock state can further improve the quantum Cramér-Rao bound via the quantum Fisher information. On the other hand, via the parity detection, our results show that, for the symmetric two-mode squeezed Fock state, the phase sensitivity obtained by the parity detection can reach the quantum Cramér-Rao bound. While for the asymmetric two-mode squeezed Fock state, it is not valid. Therefore, our results show again that the parity detection is not always the optimal detection for some nonclassical quantum states.

**Key words** quantum precision; Mach-Zehnder interferometer; parity detection; two-mode squeezed Fock state