文章编号 1672-6634(2020)06-0027-06 **DOI** 10.19728/j.issn1672-6634.2020.06.003

广义强色散 DGH 方程的不变子空间和精确解

李雪霞 刘汉泽 常丽娜

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘 要 利用不变子空间法得到了广义强色散 DGH 方程中非线性微分算子所允许的不变子空间.然后,通过子空间的基函数构造求出了多项式函数、指数函数和三角函数形式的精确解,并给出了方程精确解的图像.

关键词 广义强色散 DGH 方程;精确解;不变子空间

中图分类号 O175.2 **文献标识码** A

0 引言

非线性偏微分方程在物理、化学、生物等领域的模型研究方面,起着至关重要的作用,寻找非线性微分方程精确解也是数学研究的热点之一,目前构建非线性偏微分方程精确解的方法主要包括:李对称法、首次积分法、指数函数展开法和(G/G)-展开法、不变子空间法等.不变子空间方法起源于李群分析,其实质是通过构造非线性偏微分方程(PDE)的不变子空间,将非线性 PDE 转化为常微分方程(ODE)组,通过求解 ODE 组的解得到原非线性 PDE 的解.其最初是由 Galaktionov 等提出,后来经过多位学者扩展并得到了广泛应用,例如,得到了 Hunter-Saxton 方程、可压缩欧拉方程等的精确解[1].

不变子空间方法的突出特点是适用范围广,它是一种与对称群相关的方法,通过这种方法,非线性演化方程可以被约化为有限维动力系统;同时它也是一个算法,可以为非线性偏微分方程构造更多的孤子解和相似解.但是不变子空间方法还有许多问题需要继续研究,例如如何根据不同的非线性方程,构造出更多的精确解;再者,如何提高求解常微分方程组的效率,比如借助 Maple 程序,等等,都需要进一步研究.

1993 年,Camassa 和 Holm 得到了一类完全可积的非线性的新型浅水波方程 Camassa-Holm 方程[2]

$$u_t + 2au_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_xu_{xxx} + uu_{xxx} . \tag{1}$$

方程(1)具有双 Hamilton 结构,并完全可积. $a \neq 0$ 时,具有光滑孤立波解; $a = 0$ 时,方程(1)具有形如 $u = ce^{-|x-a|}$ (c 为速度)的尖峰孤立波解(peakon).

Dullin,Gottwald 和 Holm 利用一类浅水波方程非局部渐近形式推导出 DGH 方程

$$u_t + 2au_x - u_{xxt} + 3uu_x + \gamma u_{xxx} = 2u_xu_{xx} + uu_{xxx} , \tag{2}$$

其中 u_{xx} 是线性色散项,当 $\gamma = 0$ 时即为 Camassa-Holm 方程,当色散项为 $(u - u_{xx})_{xxx}$ 时,则方程即为广义强色散 DGH 方程,它描述了浅水流中曲面波的单向传播

$$u_t + 2c_1u_x - u_{xxt} + c_2uu_x + \gamma(u - u_{xx})_{xxx} = 2u_xu_{xx} + uu_{xxx}, \tag{3}$$

其中 $u = u(x,t)$ 为未知函数, c_1, c_2, γ 为任意常数.

近年来,许多学者对 DGH 方程也做了许多研究,2007 年,田立新对 DGH 方程的哈密尔顿结构和解的整体存在性及 Blow-up 现象进行了研究.郭柏林和刘正荣通过使用平面的自治系统的定性分析研究方法,

收稿日期:2020-05-06

基金项目:国家自然科学基金项目(11171041)资助

通讯作者:刘汉泽,男,汉族,博士,教授,研究方向:微分方程理论与应用,E-mail:hnz_liu@aliyun.com.

研究了 DGH 方程的尖峰孤立波解.与其它方法相比,不变子空间方法可以得到 DGH 方程的许多新形式的精确解,包括有理函数解,这些解不同于对称约化解,也不同于孤立子解[3,4].

本文首先介绍不变子空间的方法原理,其次求出广义强色散 DGH 方程在 n 维微分算子下的所有允许的不变子空间.最后,我们通过常微分方程解的子空间作为基函数构造偏微分方程多项式函数,基函数构造偏微分方程多项式函数,指数函数和三角函数形式的精确解,并且在运用不变子空间方法的基础上,将方程的部分精确解以图像的形式表达出来,使 DGH 方程的解更加形象.

1 不变子空间方法

考虑一般的演化方程[5,6]

$$u_t = F[u], \tag{4}$$

其中 $u=u(x,t)$, $F[u]$ 是一个 k- 阶微分算子,且 $F[u]\equiv F(x,u,u_x,u_{xx},\cdots)$.假设给定一个 n 维不相关的函数 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$,那么可以得到 n 维线性组合的子空间 $W_n=\Omega\{f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)\}$.对于给定的微分算子 F ,如果满足 $F[W_n]$ 包含于 W_n, 则称算子 F 允许线性子空间 W_n, 即线性子空间 W_n 在 F 算子下被认为是恒定的,即存在 n 个函数 $\varphi_i(c_1,c_2,\cdots,c_n)$,满足

$$F(\sum_{i=1}^{n}C_i f_i(x)) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(C_1,C_2,\cdots,C_n)f_i(x),\ C_i\in R, i=1,2,\cdots,q,$$

其中 $C_1,\cdots,C_n$ 为任意常数,那么方程(4)有形如

$$u=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)f_i(x) \tag{5}$$

的解,其中 c_i 满足 n 维动力系统

$$\varphi'(t)=\varphi_i(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

如果是由 n 阶线性常微分方程[7,8]

$$L[y]\equiv y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1y+a_0y=0 \tag{7}$$

的解空间来定义 k 阶微分算子 F 允许的子空间 W_n ,并在这些不变子空间中构造方程(3)的解,且(7)式中 a_i 均表示常数,那么 n 需要满足的条件为 $n\leqslant 2k+1$, 并且 W_n 在算子 F 的不变条件为

$$L[F[u]]\,|_{L[u]=0}\equiv 0, \tag{8}$$

在以上这些不变条件下,就可以得到方程(3)解的形式,并且可以求出精确解,下文中使用的符号

$$u_i=\frac{\partial^i u}{\partial x^i},\quad i\geqslant 0(u_0=u).$$

2 广义强色散 DGH 方程的不变子空间

2.1 二维不变子空间

首先将方程(3)写作一般演化方程(4)的形式

$$u_t-u_{xxt}+\gamma(u-u_{xx})_{xxx}=2u_xu_{xx}+uu_{xxx}-2c_1u_x-c_2uu_x\ , \tag{9}$$

方程右边的非线性算子 F 为

$$F[u]=2u_xu_{xx}+uu_{xxx}-2\mathrm{c}_1u_x-c_2uu_x, \tag{10}$$

式中最高次导数项 $k=3$, 则由维数定理可知,我们需要考虑 $n=2,3,\cdots,7$ 维常微分方程定义的不变子空间.在本小节,我们考虑方程(9)右边的微分算子 $F[u]$ 是由二阶常微分方程[9-12]

$$L_2[y]\equiv y''+a_1y'+a_0y=0 \tag{11}$$

定义的不变子空间.则 W_2 的不变条件为

$$L_2[F[u]]\,|_{L_2[u]=0}=D^2F+a_1DF+a_0F\,|_{L_2[u]=0}=0, \tag{12}$$

其中方程 $L_2[u]=0$ 表示反复将 u'' 用 $-a_1u'-a_0u$ 替代,经过计算 $F[u]$ 并进行同类项合并,可以得到关于 u_1,u_0 的多项式 $(-6a_1^3+10a_0a_1+2a_1c_1)u_1^2+(-11a_0a_1^2+9a_0^2+3a_0c_2)uu_1-5a_0^2a_1u^2=0$. 由此,我们得到关于求解 a_i,c_i 的超定方程组

$$\begin{cases}-6a_1^3+10a_0a_1+2a_1c_1=0,\\ -11a_0a_1^2+9a_0^2+3a_0c_2=0,\\ 5a_0^2a_1=0.\end{cases}$$

求解上述方程组，我们得到下列全部三组解

(i) $a_0=0, a_1=a_1, c_1=c_1, c_2=3a_1^2$；

(ii) $a_0=0, a_1=0, c_1=c_1, c_2=c_2$；

(iii) $a_0=a_0, a_1=0, c_1=c_1, c_2=-3a_0$.

根据以上三组解，方程(9)微分算子 $F[u]$ 允许定义的二维不变子空间 W_2 为

$$F_{21}=\begin{cases}F_{[u]}=u_t-u_{xxt}+\gamma(u-u_{xx})_{xxx}=2u_xu_{xx}+uu_{xxx}-2c_1u_x-3a_1^2uu_x,\\ L_2[y]=y''+a_1y=0,\\ W_2=\Omega\{1,\exp(-a_1x)\}.\end{cases}$$

$$F_{22}=\begin{cases}F_{[u]}=u_t-u_{xxt}+\gamma(u-u_{xx})_{xxx}=2u_xu_{xx}+uu_{xxx}-2c_1u_x-c_2uu_x,\\ L_2[y]=y''=0,\\ W_2=\Omega\{1,x\}.\end{cases}$$

$$F_{23}=\begin{cases}F_{[u]}=u_t-u_{xxt}+\gamma(u-u_{xx})_{xxx}=2u_xu_{xx}+uu_{xxx}-2c_1u_x+3a_0uu_x,\\ L[y]=y''+a_0y=0,\\ W_{21}=\Omega\{\cos(\sqrt{a_0}x),\sin(\sqrt{a_0}x)\}(a_0>0),\\ W_{22}=\Omega\{\exp(-\sqrt{-a_0}x),\exp(\sqrt{-a_0}x)\}(a_0<0).\end{cases}$$

2.2　三维不变子空间

假设微分算子 $F[u]$ 是由三阶常系数线性方程 $L[y]\equiv y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$ 的解空间所定义的不变子空间，其不变条件为

$$L[F[u]]\,|_{[H]}=(D^3F+a_2D^2F+a_1DF+\mathrm{a}_0\,\mathrm{F})\,|_{[H]}=0, \tag{13}$$

其中 $L[u]=0$ 表示反复用 $-a_2u''-a_1u'-a_0u$ 替代 u'''，由(13)式计算，我们得到关于 $u^2, uu_x, u_x^2, uu_{xx}, u_xu_{xx}, u_{xx}^2$ 的方程组，取其系数为零，我们得到关于 a_i 和 c_i 的约束条件

$$\begin{cases}7a_0^2=0,\\ 18a_0a_2=0,\\ -a_0a_2^2+16a_0a_1+4a_0c_2=0,\\ -a_1a_2^2+a_0a_2+9a_1^2+3a_1c_2=0,\\ -a_2^3+21a_1a_2+a_2c_2-14a_0=0,\\ 11a_2^2-9a_1-3c_2=0.\end{cases}$$

求解上述方程组，我们得到了唯一的一组解 $\{a_0=0, a_1=a_1, a_2=0, c_1=c_1, c_2=-3a_1\}$，由此，我们得到 DGH 方程的三维不变子空间 W_3

$$F_3=\begin{cases}F[u]=u_t-u_{xxt}+\gamma(u-u_{xx})_{xxx}=2u_xu_{xx}+uu_{xxx}-2c_1u_x+3a_1uu_x,\\ L[y]=y'''+a_1y'=0,\\ W_{31}=\Omega\{1,\cos(\sqrt{a_1}x),\sin(\sqrt{a_1}x)\}(a_1>0),\\ W_{32}=\Omega\{1,\exp(-\sqrt{-a_1}x),\exp(\sqrt{-a_1}x)\}(a_1<0).\end{cases}$$

我们可以从求出的二维和三维子空间中看出不变子空间方法只与方程的非线性项有关. 根据上述类似的计算方式，我们可以推算出非线性算子(形如 $F[u]$)允许的由(7)式($n=4,5,6$)分别定义的四维，五维和六维不变子空间，其七维不变子空间不存在.

2.3　四维不变子空间

$$F_4=\begin{cases}F[u]=u_t-u_{xxt}+\gamma(u-u_{xx})_{xxx}=2u_xu_{xx}+uu_{xxx}-2c_1u_x,\\ L[y]=y^4=0,\\ W_4=\{1,x,x^2,x^3\}.\end{cases}$$

2.4 五维不变子空间

$$F_5 = \begin{cases} F[u] = u_t - u_{xxt} + \gamma(u - u_{xx})_{xxx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - 2c_1 u_x, \\ L[y] = y^5 = 0, \\ W_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}. \end{cases}$$

2.5 六维不变子空间

$$F_6 = \begin{cases} F[u] = u_t - u_{xxt} + \gamma(u - u_{xx})_{xxx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - 2c_1 u_x + 3a_1 uu_x, \\ L[y] = y^6 = 0, \\ W_6 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}. \end{cases}$$

3 广义强色散 DGH 方程的精确解和图像

根据上文第二部分求得的不变子空间的基函数，我们可以把广义强色散 DGH 方程的解分成三类，并且对应方程的三种解：多项式函数解，指数函数解和三角函数解，然后利用 Maple 软件画出解的图像，使方程的解更加直观. 下面我们就具体以广义强色散 DGH 方程为例来求方程的精确解.

3.1 方程的多项式解[13-15]

由 2.1 中 F_{22} 知，广义强色散 DGH 方程

$$u_t - u_{xxt} + \gamma(u - u_{xx})_{xxx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - 2c_1 u_x - c_2 uu_x, \tag{14}$$

假设有多项式形式的解为

$$u_1 = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x, \tag{15}$$

将式(15)及其各阶导数代入到上述方程(14)中去，我们可以得到关于 x^n，$(n = 0, 1)$ 的方程，让它的系数分别等于零，即 $x: \varphi'_2(t) - \varphi_2^2(t)c_2 = 0$，

常数项

$$\varphi'_1(t) - \varphi_1(t)\varphi_2(t)c_2 - 2c_1\varphi_2(t). \tag{16}$$

求解(16)可得

$$\varphi_1(t) = \frac{2c_1 t \pm C_2}{-c_2 t \pm C_1}, \varphi_2(t) = \frac{1}{-c_2 t \pm C_1}, \tag{17}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 则可以得到方程(14)的解为

$$u_1 = \frac{2c_1 t \pm C_2}{-c_2 t \pm C_1} + \frac{1}{-c_2 t \pm C_1}x. \tag{18}$$

方程解的图像如

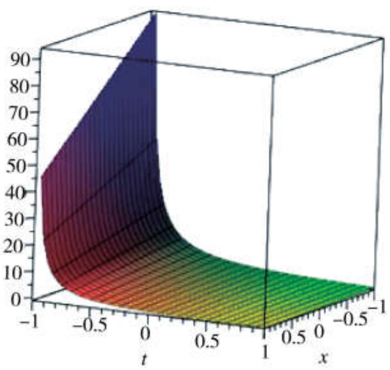

图 1 为当 $c_1 = -1, c_2 = C_1 = C_2 = 1, x = -1\text{-}1, t = -1\text{-}1$ 时，方程(14)的有理函数解 u_1

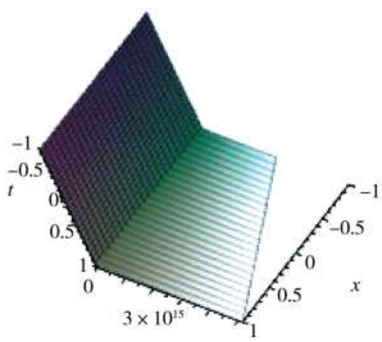

图 2 为当 $c_1 = c_2 = C_1 = C_2 = 1, x = -1\text{-}1, t = -1\text{-}1$ 时，方程(14)的有理函数解 u_1

3.2 方程的三角函数和指数函数解

由 2.2 中 F_3 知，方程可写为

$$u_t - u_{xxt} + \gamma(u - u_{xx})_{xxx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - 2c_1 u_x + 3a_1 uu_x, \tag{19}$$

假设有三角函数和指数函数形精确解

$$u_{2,1}=\varphi_0(t)+\varphi_1(t)\cos(\sqrt{a_1}x)+\varphi_2(t)\sin(\sqrt{a_1}x),a_1>0,\tag{20}$$

$$u_{2,2}=\varphi_0(t)+\varphi_1(t)\exp(\sqrt{-a_1}x)+\varphi_2(t)\exp(-\sqrt{-a_1}x),a_1<0.\tag{21}$$

把(20)及其各阶导数代入到(19)中，我们可以得到关于 $\cos(\sqrt{a_1}x)$，$\sin(\sqrt{a_1}x)$ 的方程式，令它们的系数分别等于零，即

$$\cos(\sqrt{a_1}x):(1+a_1)\varphi'_2(t)+\gamma a_1^{\frac{5}{2}}\varphi_1(t)-2a_1^{\frac{3}{2}}\varphi_0(t)\varphi_1(t)-\gamma a_1^{\frac{3}{2}}\varphi_1(t)-2\sqrt{a_1}c_1\varphi_1(t)=0\ ,$$

$$\sin(\sqrt{a_1}x):(1+a_1)\varphi'_1(t)-\gamma a_1^{\frac{5}{2}}\varphi_2(t)+2a_1^{\frac{3}{2}}\varphi_0(t)\varphi_2(t)-\gamma a_1^{\frac{3}{2}}\varphi_2(t)-2\sqrt{a_1}c_1\varphi_2(t)=0\ ,$$

常数项 $\varphi_0'(t)=0$．求解上述方程可知 $\varphi_0(t)=C_1$，$\varphi_1(t)=C_2\sin(At)+C_3\cos(At)$，$\varphi_2(t)=C_2\cos(At)-C_3\sin(At)$，由此，可以得到方程(19)的三角函数精确解为

$$u_{2,1}=C_1+[C_2\sin(At)+C_3\cos(At)]\cos(\sqrt{a_1}x)+[C_2\cos(At)-C_3\sin(At)]\sin(\sqrt{a_1}x),\tag{22}$$

其中 C_1，C_2，C_3 为任意常数，$A=\dfrac{(a_1^2\gamma-2C_1a_1+a_1\gamma+c_1)\sqrt{a_1}t}{a_1+1}$.

将(21)及其各阶导数代入到(19)中，我们可以得到关于 $\exp(\sqrt{-a_1}x)$，$\exp(-\sqrt{-a_1}x)$ 的方程式，令它们的系数分别为零，即

$$\exp(\sqrt{-a_1}x):\gamma\sqrt{-a_1}\varphi_1a_1^2-2\varphi_0\sqrt{-a_1}\varphi_1a_1+\gamma\sqrt{-a_1}\varphi_1a_1+2\sqrt{-a_1}c_1\varphi_1+(a_1+1)\varphi'_1=0\ ,$$

$$\exp(-\sqrt{-a_1}x):-\gamma\sqrt{-a_1}\varphi_2a_1^2+2\varphi_0\sqrt{-a_1}\varphi_1a_1-\gamma\sqrt{-a_1}\varphi_2a_1-2\sqrt{-a_1}c_1\varphi_2+(a_1+1)\varphi'_2=0\ ,$$

常数项 $\varphi'_0=0$，求解上述方程可得 $\varphi_0(t)=C_1$，$\varphi_1(t)=\dfrac{C_2\exp(Bt)}{\exp(Dt)}$，$\varphi_2(t)=\dfrac{C_3\exp(Dt)}{\exp(Bt)}$.

由此，可以得到方程(19)的指数函数精确解为

$$u_{2,2}=C_1+\frac{C_2\exp(Bt)}{\exp(Dt)}\exp(\sqrt{-a_1}x)+\frac{C_3\exp(Dt)}{\exp(Bt)}\exp(-\sqrt{-a_1}x),\tag{23}$$

其中 C_1，C_2，C_3 为任意常数，$B=\dfrac{2C_1a_1\sqrt{-a_1}}{a_1+1}$，$D=\dfrac{(a_1^2\gamma+a_1\gamma+2c_1)\sqrt{-a_1}}{a_1+1}$.

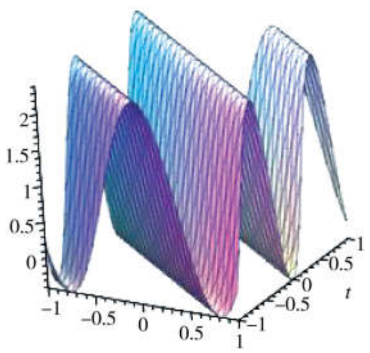

图 3　为当 $a_1=4$，$C_1=C_2=C_3=c_1=\gamma=1$，$x=-1\text{-}1$，$t=-1\text{-}1$ 时，方程(19)的三角函数解 $u_{2,1}$

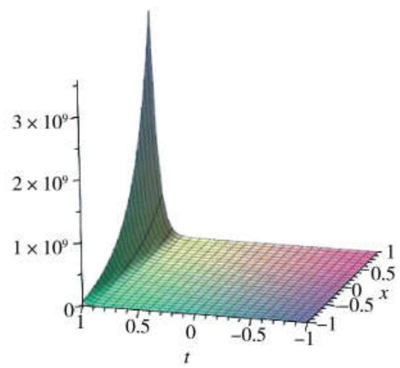

图 4　为当 $a_1=-4$，$C_1=C_2=C_3=c_1=\gamma=1$，$x=-1\text{-}1$，$t=-1\text{-}1$ 时，方程(19)的指数函数解 $u_{2,2}$

4　结语

我们只选取了部分不变子空间的基函数进行求解，得到了广义强色散 DGH 方程的多项式函数解，三角函数解和指数函数解．不同的基函数进行组合可以求出不同的精确解，这也使得不变子空间方法的应用更为广阔；同时，针对方程组也可以应用相同的方法进行求解，上述研究理论为以后的研究提供了方向，对于不变子空间方法还有很多理论值得我们去研究.

参　考　文　献

[1]　Camaasa R，Holm D. An integrable shallow equation with peaked so litons [J]. Phy Rev Lett，1993，13：166 l-1665.

[2]　Tilov S S. A method of finite-dimensional rings for solving nonlinear equations of mathematical physics [M]. Aerodyna-namics，Saratov U-

niversity,1988(2):104-109.

[3] Galaktionov V A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities [J]. Proc Roy Soc Endin Sect A,1995,125(2):225-246.

[4] Galaktionov A,Svirshchevskii S R. Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics [M]. London:Chapman and Hall,2007.

[5] QU C Z,ZHU C R. Classification of coupled systems with two-component nonlinear diffusion equations by the invariant subspace method [J]. J Phys A,2009,42(7):1-27.

[6] 姜丙利,柳银萍.不变子空间方法及一个非线性演化方程的精确解[J].浙江师范大学学报(自然科学版),2013,36(2):155-160.

[7] Shen S F,Qu C Z. Maximal dimension of invariant subspaces to systems of nonlinear evolution equations [J]. Chinese Ann Math B,2012,33(2):161-178.

[8] Ma W X,Liu Y P. Invariant subspaces and exact solutions of a class of dispersive evolution equations [J]. Commun Nonlinear Sci Number Simulat,2012,17:3795-3801.

[9] 朱春蓉,窦彩玲.一类三阶非线性色散方程的不变子空间和精确解[J].安徽师范大学学报,2014,37(1):20-25.

[10] 郝夏芝.非线性偏微分方程的不变子空间及其精确解 [D].西安:陕西师范大学,2014.

[11] Qu C Z,Zhu C R. Classification of coupled systems with two-component nonlinear diffusion equations by the invariant subspace method [J]. J Phys A Math Theor,2009,42:475201.

[12] Zhu C R,Qu C Z. Classification and reduction of generalized thin film equations [J]. Commun Theor Phys,2009,52:403-410.

[13] 常丽娜,刘汉泽.广义变系数 Kawachara 方程的等价变换、精确解和守恒律[J].聊城大学学报(自然科学版),2020,33(2):11-17.

[14] Zhu C R,Qu C Z. Maximal dimension of invariant subspace admitted by nonlinear vector differential operators [J]. J Math Phys,2011,52:043507.

[15] Liu H Z. Invariant subspace classification and exact solutions to the generalized nonlinear D-C equation [J]. Applied Mathematics Letters,2018(83):164-168.

Invariant Subspaces and Exact Solutions of the Generalized Strong Dispersion DGH Equation

LI Xue-xia LIU Han-ze CHANG Li-na

(School of Mathematical Sciences,Liaocheng University,Liaocheng 252059,China)

Abstract By using the invariant subspace method,the invariant subspaces allowed by the generalized strong dispersion DGH equation are obtained,and the exact solutions of the strong dispersion DGH equation are presented,which including the polynomial function,exponential function and trigonometry function types of solutions. Then the figures of the solutions are given.

Key words generalized strong dispersion DGH equation; exact solution; invariant subspace