

重心插值配点法求解 Black-Scholes 方程

赖舒琴 华之维 翁智峰

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要 基于重心插值配点法求解 Black-Scholes 方程. 首先,利用指数变换消去方程中的空间一阶导数;然后,对方程中的时间和空间方向均采用重心插值配点法进行离散,构造出 Black-Scholes 方程的重心插值配点法计算格式;最后,通过数值算例验证此计算格式具有高精度和有效性.

关键词 Black-Scholes 方程;指数变换;热传导方程;重心插值配点法

中图分类号 O241;O242

文献标识码 A

0 引言

1973年,Black和Scholes^[1]提出一种模型,称为Black-Scholes(B-S)模型,用于描述基础资产在期权定价中的近似行为.它已被期权交易员广泛使用,并因其在预测期权价格方面的有效性和准确性而导致期权交易的显著增长.直至今日,Black-Scholes方程仍是金融数学中期权定价理论的重要模型,研究其解有重要的现实意义.

目前,关于Black-Scholes方程的数值解法取得了许多进展.譬如,文献[2]给出Black-Scholes期权定价模型的二叉树方法、隐式差分方法和Crank-Nicolson差分方法等数值解法;文献[3]讨论了许多期权定价的数值计算问题及其现有数值方法的不足;文献[4]讨论了期权定价问题的鞅方法;文献[5]提出Black-Scholes方程的一种 θ 加权差分格式;文献[6]分析了美式期权定价的有限元方法;文献[7]利用代数变换消去方程中对空间的一阶导数项,导出四阶紧致差分格式;文献[8]用有限差分法研究一类带有参数 α 的广义Black-Scholes模型的数值解;文献[9]利用Laplace变换和有限差分方法来求解美式期权定价问题;文献[10]对支付红利下Black-Scholes方程构造了一种具有并行本性的交替分段Crank-Nicolson格式;文献[11]对欧式看跌期权定价问题构造一个四阶紧致有限差分格式.

最近,文献[12]利用重心插值配点法求解微分方程初边值问题,很多学者将该方法推广到求解各类微分方程,比如平面弹性问题^[13]、分数阶Fredholm积分方程^[14]和一维Allen-Cahn方程^[15]等.重心插值配点法包括重心Lagrange插值和重心有理插值.对于给定插值节点,当选取Lagrange插值公式来构造近似函数时,由著名的Runge现象可以说明,当节点数量增大时,Lagrange插值公式构造的近似函数值容易出现Runge现象,具有极大的数值不稳定性.为了避免这一现象的出现,Berrut等^[16]将Lagrange插值公式改进为重心型的Lagrange插值公式.由文献[17]可知,重心型的Lagrange插值公式克服了Lagrange插值的缺点,解决了震荡现象,具有了非常好的数值稳定性.此外,Berrut等^[18]提出了一种简单的重心有理插值权,这之后Floater等^[19]提出重心有理插值,其具有很好的节点适应性,有较高的精度,被称为一种理想的数值计算方法.重心插值配点法作为一种新型的无网格计算方法,其有效地避免了差分格式带来的累积误差,使用

收稿日期:2020-04-23

基金项目:国家自然科学基金项目(11701197);中央高校基本科研业务费专项资金(ZQN-702)资助

通信作者:翁智峰,男,汉族,博士,副教授,研究方向:偏微分方程数值计算,E-mail:zfwmath@163.com.

Chebyshev 节点有效克服了 Runge 现象,且其具备计算格式简单、精度高、程序实施方便、节点适应性好等特点.如今,重心插值配点法广泛地被应用于弹性力学、微波技术及流体力学等多个方面^[20,21].本文将该方法推广到求解 Black-Scholes 方程,时间和空间方向均采用重心插值 Chebyshev 配点法离散,以得到较高的数值精度,与前人工作比较,我们的算法在时间和空间方向上都具有高精度.

1 Black-Scholes 方程的重心插值配点法

1.1 Black-Scholes 方程的指数变换

考虑单个 Black-Scholes 方程的初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0, 0 < S < \infty, 0 \leq \tau < T, \\ u(S, T) = \max(K - S, 0), 0 \leq S < \infty, \\ u(0, \tau) = K, u(S_\infty, \tau) = 0, S_\infty \rightarrow \infty, 0 \leq \tau \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

式中 u 为欧式看跌期权价格, $u > 0$; S 为股票价格, $S > 0$; τ 为时间; r 为无风险利率, $r > 0$; σ 为股票价格 S 的波动率, $\sigma > 0$; K 为执行价格, $K > 0$; T 为到期日, $T > 0$.

为便于用算例验证算法精度,令方程右端为 $f(x, t)$.此外,为消去(1)中偏导的变系数 S ,引入变换 $S = e^x$ ^[7],且作变换 $\tau = T - t$,将初始条件换为 $t = 0$ 时刻,则问题(1)化为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial u}{\partial x} + ru = f(x, t), a < x < b, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = \max(K - e^x, 0), a \leq x \leq b, \\ u(a, t) = K, u(b, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

式中 a, b 是所取常数.

为应用热传导方程的重心插值配点法,则引入文献[22]中的指数变换,去掉问题(2)第一个方程中对 x 的一阶导数项,即 $u(x, t) = e^{(\frac{1}{2}\alpha x)} v(x, t)$,则问题(2)第一个方程化为

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\frac{\sigma^2}{2} - r - \frac{\sigma^2}{2}\alpha) \frac{\partial v}{\partial x} + ((\frac{\sigma^2}{4} - \frac{r}{2})\alpha - \frac{\sigma^2}{8}\alpha^2 + r)v = f(x, t) \cdot e^{(-\frac{1}{2}\alpha x)}. \quad (3)$$

故令 $\alpha = 1 - \frac{2r}{\sigma^2}$ 去掉 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 项,式(3)转化为 $\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2} - r)^2 + r)v = f(x, t) \cdot e^{(-\frac{1}{2}\alpha x)}$.

为简化模型,令 $\lambda = \frac{\sigma^2}{2}, \beta = \frac{1}{2\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2}) + r, g(x, t) = f(x, t) \cdot \exp(-\frac{1}{2}\alpha x)$,则问题(2)化为

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = g(x, t), a < x < b, 0 < t \leq T, \\ v(x, 0) = \max((K - e^x) \cdot e^{(-\frac{1}{2}\alpha x)}, 0), a \leq x \leq b, \\ v(a, t) = K \cdot e^{(-\frac{1}{2}\alpha a)}, v(b, t) = 0, 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (4)$$

1.2 重心型插值

1.2.1 重心 Lagrange 插值. 设有 $n+1$ 个不同节点 $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 和对应一组值 y_i , $p(x)$ 为小于 n 次的多项式,满足 $p(x_i) = y_i (i = 0, 1, \dots, n)$,这样的 $p(x)$ 唯一存在,那么 $p(x)$ 可写成 Lagrange 插值公式,即

$$p(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x) y_j, L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}, j = 0, 1, \dots, n, \quad (5)$$

式中 $L_j(x)$ 为插值基函数,且满足 $\sum_{j=0}^n L_j(x) = 1, L_j(x_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, j = i, \\ 0, j \neq i, \end{cases} (i, j = 0, 1, \dots, n)$.

若令 $l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$,重心权 $\omega_j = \frac{1}{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)}$, $j = 0, 1, \dots, n$,则

$$L_j(x) = l(x) \frac{\omega_j}{x - x_j}, j = 0, 1, \dots, n, \text{ 可得 } p(x) = l(x) \sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j} y_j. \quad (6)$$

利用公式(6)插值常数 1,可得恒等式 $1 = l(x) \sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j}$,则得重心 Lagrange 插值公式

$$p(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j} y_j}{\sum_{k=0}^n \frac{\omega_k}{x - x_k}}. \quad (7)$$

本文用第二类 Chebyshev 节点 $x_i = \cos(\frac{i}{n}\pi)$, $i = 0, 1, \dots, n$, 使 Lagrange 插值数值稳定性较好.

1.2.2 重心有理插值. 设有 $n+1$ 个不同节点 $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 以及对应的一组函数值 y_i , 选择一整数 d 满足 $0 \leq d \leq n$, 对每个 $j = 0, 1, \dots, n-d$ 令 $p_j(x)$ 为 d 个点 $(x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1}), \dots, (x_{j+d}, y_{j+d})$ 的次数至多为 d 的插值多项式, 则令

$$r(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n-d} \lambda_j(x) p_j(x)}{\sum_{k=0}^{n-d} \lambda_k(x)}, \lambda_j(x) = \frac{(-1)^j}{(x - x_j) \cdots (x - x_{j+d})}. \quad (8)$$

容易证明式(8)的 $r(x)$ 插值给定插值点对 $\{(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n\}$. 于是, 对于不同 $d (0 \leq d \leq n)$ 可得到一族有理函数插值, 并且通过选择适当的参数 d , 可以提高插值精度.

此外, 式(8)可写成重心插值形式, 首先将 $p_j(x)$ 写成 Lagrange 插值形式, 变形得

$$\sum_{j=0}^{n-d} \lambda_j(x) p_j(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_k}{x - x_k} y_k, \quad (9)$$

其中集合 $J_k = \{j \in \{0, 1, \dots, n\} : k-d \leq j \leq k\}$, 定义重心权 $\omega_k = \sum_{j \in J_k} (-1)^j \prod_{i=j, i \neq k}^{j+d} \frac{1}{(x_k - x_i)}$.

对于式(8)的分母, 注意到常数 1 的 Lagrange 插值公式有恒等式 $1 = \sum_{k=j}^{j+d} \frac{\prod_{i=j, i \neq k}^{j+d} (x - x_i)}{\prod_{i=j, i \neq k}^{j+d} (x_k - x_i)}$, 由此可得

$$\sum_{j=0}^{n-d} \lambda_j(x) = \sum_{j=0}^{n-d} \lambda_j(x) \cdot 1 = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_k}{x - x_k}. \quad (10)$$

将式(9)和式(10)代入式(8), 得到高阶重心有理插值公式

$$r(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{\omega_j}{x - x_j} y_j}{\sum_{k=0}^n \frac{\omega_k}{x - x_k}} = \sum_{j=0}^n L_j(x) y_j. \quad (11)$$

1.3 重心插值配点法求解 Black-Scholes 方程

1.3.1 一维热传导方程的一般形式. 由于 Black-Scholes 方程经过指数变换转化为问题(4), 根据文献[23]的热传导方程, 可知问题(4)与热传导方程类型相同, 所以可考虑一维热传导方程的重心插值配点法.

以下为一般形式的一维热传导方程

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = k(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + g(x, t), a < x < b; t > 0. \quad (12)$$

边界条件为

$$v(a, t) = \varphi_1(t), v(b, t) = \varphi_2(t) \text{ 或 } v_x(a, t) = \varphi_1(t), v_x(b, t) = \varphi_2(t). \quad (13)$$

初始条件为

$$v(x, 0) = \psi(x). \quad (14)$$

1.3.2 一维热传导方程的离散. 设时间域为 $[0, T]$, 将空间域 $[a, b]$ 和 $[0, T]$ 分别离散为 m, n 个第二类 Chebyshev 节点: $a = x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ 和 $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. 区域 $\Omega = [a, b] \times [0, T]$ 上的 $m \times n$ 个计算节点为 $(x_i, t_j), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. 将 $v(x, t)$ 在点 x_1, x_2, \dots, x_m 的值 $v(x_i, t) = v_i(t)$, 则 $v(x, t)$ 在点 x_1, x_2, \dots, x_m 的重心插值函数为

$$v(x, t) = \sum_{l=1}^m L_l(x) v_l(t). \quad (15)$$

将式(15)代入方程(12),且让方程(12)在点 x_1, x_2, \dots, x_m 上成立,得常微分方程组,即

$$\sum_{l=1}^m L_l(x_i) \dot{v}_l(t) - k(x_i, t) \sum_{l=1}^m L_l''(x_i) v_l(t) = g(x_i, t), i = 1, 2, \dots, m. \quad (16)$$

式中 $\dot{v}_l(t) = \frac{\partial v_l(t)}{\partial t}$, $L_l''(x_i) = C_{il}^{(2)}$, 其中 $C_{il}^{(p)}$ 为节点 x_1, x_2, \dots, x_m 上重心插值 p 阶微分矩阵元素.

引进记号 $k(x_i, t) = k_i(t)$, $g(x_i, t) = g_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, 于是方程组(16)记为矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{v}_m(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & k_m(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & \cdots & C_{1m}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1}^{(2)} & \cdots & C_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

将 $v_i(t)$ 在点 t_1, t_2, \dots, t_n 的值 $v_i(t_j) = v(x_i, t_j) = v_{ij}$, 则 $v_i(t)$ 在 t_1, t_2, \dots, t_n 上的重心插值函数为

$$v_i(t) = \sum_{q=1}^n L_q(t) v_{iq}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (18)$$

将式(18)代入方程(17),且让方程(17)在点 t_1, t_2, \dots, t_n 上成立,得常微分方程组,即

$$\begin{bmatrix} \sum_{q=1}^n \dot{L}_q(t_j) v_{1q} \\ \vdots \\ \sum_{q=1}^n \dot{L}_q(t_j) v_{mq} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1(t_j) & & \\ & \ddots & \\ & & k_m(t_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & \cdots & C_{1m}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1}^{(2)} & \cdots & C_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{q=1}^n L_q(t_j) v_{1q} \\ \vdots \\ \sum_{q=1}^n L_q(t_j) v_{mq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(t_j) \\ \vdots \\ g_m(t_j) \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

式中 $\dot{L}_q(t_j) = \frac{\partial L_q(t_j)}{\partial t}$; 令 $\begin{cases} v_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}]^T, \\ g_i = [g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}]^T = [g_i(t_1), g_i(t_2), \dots, g_i(t_n)]^T, \\ k_i = \text{diag}(k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{in}) = \text{diag}(k_i(t_1), k_i(t_2), \dots, k_i(t_n)), i = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$

且注意到 $L_k(t_j) = \delta_{kj}$, $\dot{L}_k(t_j) = D_{jk}^{(1)}$, 其中 $D_{jk}^{(p)}$, $p = 1, 2, \dots$ 为节点 t_1, t_2, \dots, t_n 上重心型插值 p 阶微分矩阵的元素. 于是, 方程组(19)可以记作下面的矩阵形式,即

$$(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}^{(1)}) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_m \end{bmatrix} (\mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{I}_n) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}, \quad (20)$$

式中符号 \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积; $\mathbf{C}^{(p)}$, $\mathbf{D}^{(p)}$ ($p = 1, 2, \dots$) 分别为关于节点 x_1, x_2, \dots, x_m 和节点 t_1, t_2, \dots, t_n 的重心型插值 p 阶微分矩阵; \mathbf{I}_m 、 \mathbf{I}_n 分别为 m 、 n 阶单位矩阵.

若令 $k = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_m \end{bmatrix}$, $\mathbf{V} = [v_1^T, v_2^T, \dots, v_m^T]$, $\mathbf{G} = [g_1^T, g_2^T, \dots, g_m^T]$, 则方程(20)可以换为

$$[(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}^{(1)}) - k(\mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{I}_n)] \mathbf{V} = \mathbf{G}. \quad (21)$$

1.3.3 边界条件和初始条件的离散. 由于变换后问题(4)边界属于方程(13)前者这种形式,所以本文只作此边界的离散.

边界条件(13)的离散: $v(a, t_j) = v_{1j} = \varphi_1(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, 记作矩阵形式,即 $v(b, t_j) = v_{mj} = \varphi_2(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{bmatrix} v(a, t_1) \\ v(a, t_2) \\ \vdots \\ v(a, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{bmatrix} = v_1 = (e_m^1 \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{V} = \varphi_1 = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) \\ \varphi_1(t_2) \\ \vdots \\ \varphi_1(t_n) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} v(b, t_1) \\ v(b, t_2) \\ \vdots \\ v(b, t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{m1} \\ v_{m2} \\ \vdots \\ v_{mm} \end{bmatrix} = v_m = (e_m^m \otimes I_n) V = \varphi_2 = \begin{bmatrix} \varphi_2(t_1) \\ \varphi_2(t_2) \\ \vdots \\ \varphi_2(t_n) \end{bmatrix},$$

式中 e_m^1 、 e_m^m 分别表示 m 阶单位矩阵第 1 行和第 m 行.

初始条件(14)的离散: $v(x_i, 0) = v_{i1} = \psi(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, 记作矩阵形式, 即

$$\begin{bmatrix} v(x_1, 0) \\ v(x_2, 0) \\ \vdots \\ v(x_m, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{bmatrix} = (I_m \otimes e_n^1) V = \psi = \begin{bmatrix} \psi(x_1) \\ \psi(x_2) \\ \vdots \\ \psi(x_m) \end{bmatrix}.$$

1.3.4 Black-Scholes 方程的重心插值配点格式. 依照一般形式一维热传导方程的重心插值配点法, 可以推导出 Black-Scholes 方程变换后的问题(4)的重心插值配点法计算格式, 即

$$[(I_m \otimes D^{(1)}) - \lambda I_{mm} (C^{(2)} \otimes I_n) + \beta I_{mm}] V = G. \quad (22)$$

2 数值算例

2.1 算例 1

考察如下微分方程初值问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial u}{\partial x} + ru &= f(x, t), 0 < x < 1, 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) &= x^4 + x^2 + 1, 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= (t+1)^2, u(1, t) = 3(t+1)^2, 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $r = 0.5, \sigma = \sqrt{2}$, 精确解 $u(x, t) = (t+1)^2(x^4 + x^2 + 1)$.

右端项

$$f(x, t) = 2(t+1)(x^4 + x^2 + 1) - (t+1)^2 \left[\frac{\sigma^2}{2} (12x^2 + 2) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(4x^3 + 2x) - r(x^4 + x^2 + 1) \right].$$

下面分别利用重心 Lagrange 插值配点及重心有理插值配点进行计算, 将两者进行比较. 其中, 空间方向采用 Chebyshev 节点数为 $m+1$, 时间方向采用 Chebyshev 节点数为 $n+1$.

数值计算结果如表 1 所示, 表中 $E_\infty = \|u_c - u_e\|_\infty$ 表示误差的无穷范数, 记作绝对误差, 注: $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$; $Er_\infty = \|(u_c - u_e) / u_e\|_\infty$ 表示相对误差的无穷范数, 记作相对误差.

由表 1 知, 在求解问题(23)时, 随着节点数量增加, 重心 Lagrange 插值配点法和重心有理插值配点法求解时的绝对误差 E_∞ 和相对误差 Er_∞ 均逐渐下降. 此外, 在节点数量相同时, 利用重心 Lagrange 插值配点法求解方程时的 E_∞ 和 Er_∞ 均小于重心有理插值配点法的.

表 1 不同插值配点法的计算结果

M	N	重心 Lagrange 插值配点法		重心有理插值配点法	
		E_∞	Er_∞	E_∞	Er_∞
6	6	8.2983×10^{-7}	1.7913×10^{-7}	9.8219×10^{-5}	1.8427×10^{-5}
7	7	1.2211×10^{-8}	2.5652×10^{-9}	3.0391×10^{-6}	5.3953×10^{-7}
8	7	1.3167×10^{-10}	2.7404×10^{-11}	4.7960×10^{-8}	9.6042×10^{-9}
9	7	1.6689×10^{-12}	1.2123×10^{-12}	7.7010×10^{-10}	1.5728×10^{-10}
10	7	7.7227×10^{-13}	5.8840×10^{-13}	7.3719×10^{-12}	1.6289×10^{-12}

综上, 重心 Lagrange 插值配点法和重心有理插值配点法对求解问题(23)都有较高精度. 在节点数一样时, 重心 Lagrange 插值配点法精度略高于重心有理插值配点法. 由于重心有理插值中参数 d 使其精度具有不确定性, 则重心 Lagrange 插值配点法的稳定性较高.

两种重心插值配点格式在区域 $x \in [0, 1], t \in [0, 1]$ 的数值解及误差分布图, 图 1 是数值解图, 图 2 是误差分布图, 其中符号 x, t 指问题(23)中变量, 设数值解 uc , 误差 $error$.

由图 1 中可知, 重心 Lagrange 插值配点法和重心有理插值配点法求出的方程数值解图像均逼近于真实解, 具有较高的精度. 由图 2 可知, 采用重心 Lagrange 插值配点法较重心有理插值配点法, 有更高的精度.

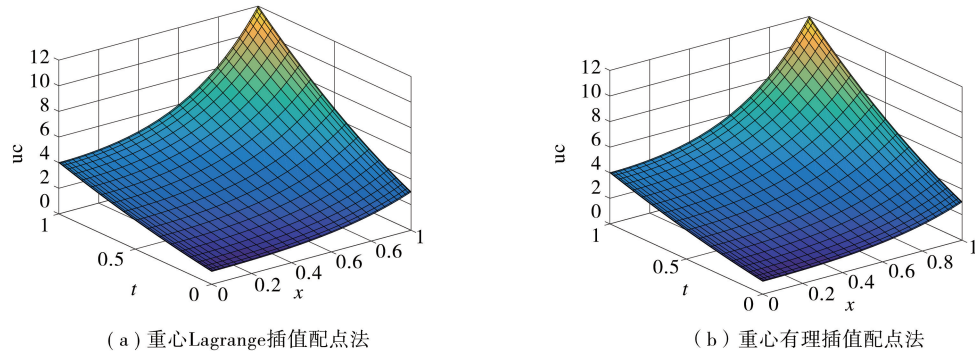


图 1 不同插值配点法在区间 $x \in [0, 1], t \in [0, 1]$ 的数值解

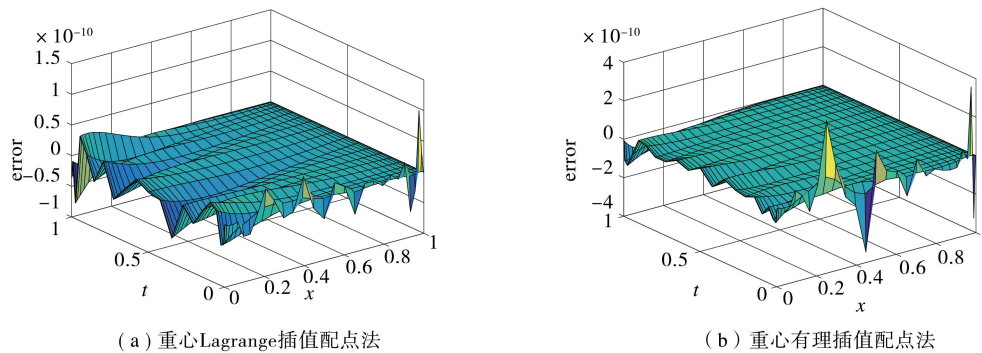


图 2 不同插值配点法在区间 $x \in [0, 1], t \in [0, 1]$ 的数值解与精确解误差分布图

2.2 算例 2

考察问题

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0, S_a < S < S_b, 0 < \tau \leq T, \quad (24)$$

$$u(S, T) = \max(K - S, 0), u(S_a, \tau) = K, u(S_b, \tau) = 0,$$

式中 u 为看跌期权价格; S 为股票价格; τ 为时间; r 为无风险利率; σ 为股票价格的波动率; K 为执行价格; T 为到期日. 这里取 S 区间为 $[e^{-26}, e^4]$ (对应的 $a = -26, b = 4$), 对空间、时间域各取 81 和 41 个计算节点, 取 $r = 0.005, \sigma = 0.2, T = 1, K = 20$. 如图 3 所示, 是方程(24)在重心 Lagrange 插值配点法下的数值解曲面. 由图可知, 用当前的计算格式可以得到光滑且稳定的数值解.

下面考察提出的计算格式(22)的运用有效性, 采取以下方法, 分别对问题(24)的参数 σ, r, K, T 取不同值, 比较它们对欧式看跌期权的价格 u 造成的影响是否与实际情形一致.

结果如图 4 所示, 由图 4(a)可知, 当取 $r = 0.005, T = 1, K = 20$, 而 σ 在 0.1、0.2、0.3、0.4 中变化时, 在股票价格 S 为执行价格 20 附近, 股票价格的波动率 σ 升高会造成欧式看跌期权价格 u 的升高, 这与金融界高风险、高回报的观点相符合. 由图 4(b)可知, 当取 $\sigma = 0.2, T = 1, K = 20$, 而 r 在 0.005、0.05、0.1、0.15 中变化时, 发现当无风险利率 r 越高, 欧式看跌期权价格 u 会下跌. 由图 4(c)可知, 当取 $r = 0.005, \sigma = 0.2, T = 1$, 而 K 在 15、20、30、40 中变化时, 发现执行价格 K 的提高会引起欧式看跌期权价格 u 的提高. 由图 4(d)可知, 当取 $r = 0.005, \sigma = 0.2, K = 20$, 而 T 在 0.5、1、1.5、2 中变化时, 发现欧式看跌期权价格变化不大. 综上, 以上结果均与实际情形一致, 可证实计算格式(22)具备实用有效性.

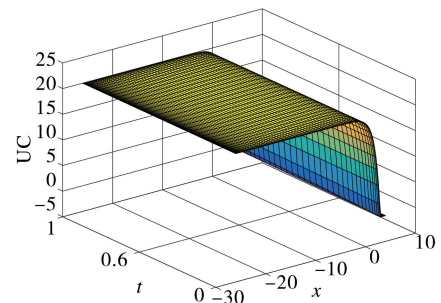


图 3 问题(24)的数值解

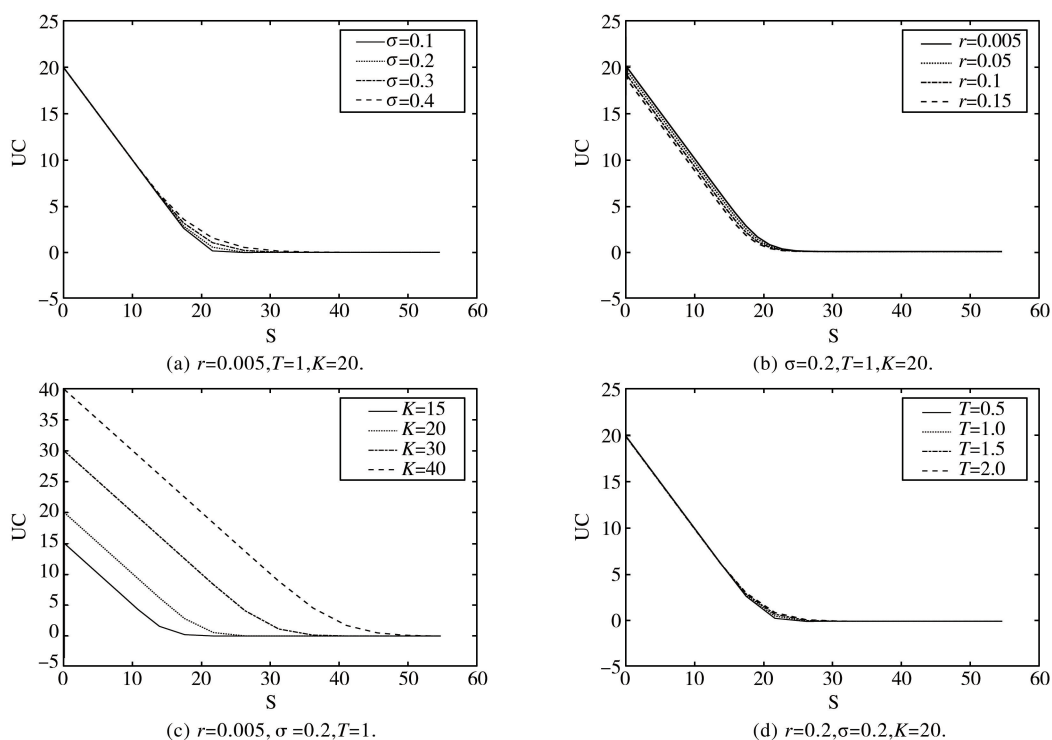


图4 问题(32)中参数 σ, r, K, T 的不同对欧式看跌期权价格的影响

3 结束语

本文针对单个的 Black-Scholes 方程,考察欧式看跌期权定价问题.首先利用指数变换消去 Black-Scholes 方程中的空间一阶导数,然后利用重心 Lagrange 插值配点法和重心有理插值配点法求 Black-Scholes 方程的数值解,并且通过数值算例—比较两种重心插值配点法的数值解精度.比较两种重心插值配点法,发现重心 Lagrange 插值配点法的精度略高于重心有理插值配点法.在第二个数值算例中,将重心 Lagrange 插值配点法运用到 Black-Scholes 方程的求解中,得知这种计算格式具备实用有效性.尤其与文献[11]的算法比较,我们的算法用很少的节点个数就使得时间和空间方向达到高精度.今后,可以将重心插值配点法推广到其他微分方程,也为今后解决同类问题提供一种很好的数值求解方案.

参 考 文 献

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654.
- [2] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [3] Ioannis Karatzas, Steven E Shreve. Methods of Mathematical Finance[M]. Springer, 2010.
- [4] Burrage K, Burrage P, Tian T. Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations; an overview[J]. Proceedings of The Royal Society of London Series A-mathematical Physical and Engineering Sciences, 2004, A(460): 373-402.
- [5] Yang Xiaozhong, Liu Yangguo, Wang Guanghui. A study on a new kind of universal difference schemes for solving Black-Scholes equation [J]. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2007, 3(2): 251-260.
- [6] 张铁. 美式期权定价问题的数值方法[J]. 应用数学学报, 2002, 25(1): 113-122.
- [7] Liao Wenyuan, Zhu Jianping. An accurate and efficient numerical method for solving Black-Scholes equation in option pricing[J]. International Journal of Mathematics in Operational Research, 2009, 1(1): 191-210.
- [8] 聂彩仁, 何树红. 一类广义的 Black-Scholes 模型的数值解[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2002, 24(4): 241-244.
- [9] Zhou Zhiqiang, Gao Xuemei. Numerical method for pricing American options with time-fractional PDE models[J]. Mathematics Problems in Engineering, 2016(2): 1-8.
- [10] 吴立飞, 杨晓忠. 支付红利下 Black-Scholes 方程的交替分段 C-N 格式解法[J]. 应用数学进展, 2013, 2(4): 152-158.
- [11] 田朝薇, 李锦成, 翁智峰. 欧式看跌期权定价问题的紧致差分格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2019, 40(6): 830-836.
- [12] 李淑萍, 王兆清. 重心插值配点法求解初值问题[J]. 山东建筑大学学报, 2007, 22(6): 481-485.

- [13] 王兆清,徐子康. 基于平面问题的位移压力混合配点法[J]. 计算物理, 2018(1):77-86.
- [14] 虎晓燕,韩惠丽. 重心插值配点法求解分数阶 Fredholm 积分方程[J]. 郑州大学学报(理学版), 2017(1):17-23.
- [15] 翁智峰,姚泽丰,赖淑琴. 重心插值配点法求解 Allen-Cahn 方程[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2019, 40(1):133-140.
- [16] Berrut J P, Trefethen L N. Barycentric lagrange interpolation[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004, 46(3):501-517.
- [17] Higham N J. The numerical stability of barycentric lagrange interpolation[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2004, 24(4):547-556.
- [18] Berrut J P, Baltensperger R, Mittelmann H D. Recent developments in barycentric rational interpolation[M]. International Series of Numerical Mathematics, 2005.
- [19] Floater M S, Hormann K. Barycentric rational interpolation with no poles and high rates of approximation[J]. Numerische Mathematik, 2007, 107(2):315-331.
- [20] Berrut JP. Barycentric formulae for some optional rational approximants involving Blaschke products[J]. Computing, 1999, 44(1):69-75.
- [21] Abeer AA, Bernard B. Modified nodal cubic spline collocation for biharmonic equations[J]. Numerical Algorithms, 2006, 43(2):341-352.
- [22] Liao Wenyuan. A compact high-order finite difference method for unsteady convection-diffusion equation [J]. International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, 2012, 13(3):135-145.
- [23] 李树忱,王兆清. 高精度无网格重心插值配点法—算法、程序及工程应用[M]. 北京:科学出版社, 2012.

Barycentric Interpolation Collocation Method for Black-Scholes Equation

LAI Shu-qin HUA Zhi-wei WENG Zhi-feng

(School of Mathematics Science, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract In this paper, we propose the barycentric interpolation collocation method for the Black-Scholes equation. Firstly, the first-order spatial derivative in the equation is eliminated by exponential transformation, and then the time and space direction in the equation are discretized by the barycentric interpolation collocation method. Moreover, the barycentric interpolation collocation scheme of the Black-Scholes equation is obtained; Finally, Numerical examples show that high precision and validity of our scheme.

Key words Black-Scholes equation; exponential transformation; heat conduction equation; barycentric interpolation collocation method