第 33 卷　第 4 期
2020 年 08 月
聊城大学学报(自然科学版)
Journal of Liaocheng University(Nat. Sci.)
Vol. 33 No. 4
Aug. 2020

文章编号　1672-6634(2020)04-0001-07　　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2020.04.001

四种半张量积及其代数关系

冯俊娥[1]　李怡靓[1]　赵建立[2]

(1.山东大学 数学学院,山东 济南 250100;2.聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘　要　研究了四种矩阵半张量积的代数关系.首先介绍了四种矩阵半张量积的定义,包括 1-型矩阵半张量积,2-型矩阵半张量积,1-型 MV 半张量积以及 2-型 MV 半张量积,其中 1-型 MV 半张量积与 2-型 MV 半张量积只适用于矩阵与列向量相乘的情形.本文将矩阵与向量的矩阵半张量积推广到矩阵与矩阵的乘积情形,同时分三种情形讨论了几种矩阵半张量积之间的代数关系

关键词　矩阵半张量积;MV 半张量积;矩阵乘子;广义矩阵半张量积

中图分类号　O231　　**文献标识码**　A

0　引言

矩阵半张量积最早是由程代展研究员提出的一种新的矩阵乘积[1],我们称之为 1-型矩阵半张量积.1-型矩阵半张量积克服了传统矩阵乘积对维数的限制,因此,1-型矩阵半张量积在许多领域都有着重要的应用,例如:逻辑网络[2-4],博弈论[5-7],模糊系统[8-10]等,并且矩阵半张量积在工程中亦有重要的应用[11].

最近,程代展研究员引入了几种矩阵乘子,将 1-型矩阵半张量积推广到更为广义的情形[12],特别地,矩阵乘子为 $\boldsymbol{J}_n=\frac{1}{n}1_{n\times n}$ 的矩阵乘积称为 2-型矩阵半张量积,这里的 $1_{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 维的各元素全为 1 的方阵.无论是 1-型矩阵半张量积还是 2-型矩阵半张量积,当作用于矩阵与列向量的乘积时,通常情况下所得结果不是一个列向量,而是一个矩阵.为了使矩阵与列向量的乘积仍是列向量,程代展研究员在文献[12]中还引入了 1-型矩阵与向量的半张量积(1-型 MV 半张量积)与 2-型矩阵与向量的半张量积(2-型 MV 半张量积),程氏投影[13]即是在 1-型 MV 半张量积基础上提出的.文献[14]与[15]引入了另外两种形式的半张量积,即拟半张量积与范张量积,并研究了它们代数性质.

本文我们将给出这四种矩阵乘积的定义,研究这四种矩阵乘积之间的代数关系,并将两种矩阵与向量的半张量积形式上推广到矩阵与矩阵的半张量积,这里我们称之为 3-型矩阵半张量积与 4-型矩阵半张量积.容易验证 3-型矩阵半张量积与 4-型矩阵半张量积不满足矩阵乘法的结合律,但可以把它们看做是矩阵与一些列向量集合的乘积,并且 3-型矩阵半张量积以及 4-型矩阵半张量积与 1-型矩阵半张量积和 2-型矩阵半张量积也有一定代数关系,因此通过研究它们之间的关系,可以更深入地掌握几种矩阵半张量积的代数性质.

本文将用到的一些记号:

(1) $\boldsymbol{I}_n$:n 维单位矩阵;

(2) $1_{m\times n}$:元素全为 1 的 $m\times n$ 维列矩阵;

(3) 1_n :元素全为 1 的 n 维列向量;

(4) $Row_i(\boldsymbol{A})(Col_i(\boldsymbol{A}))$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行(列);

收稿日期:2019-12-12

基金项目:国家自然科学基金项目(61773371,61877036);山东省自然科学基金项目(ZR2019MF002)资助

通讯作者:冯俊娥,女,汉族,博士,教授,研究方向:逻辑系统、鲁棒控制,E-mail:fengjune@sdu.edu.cn.

(5) 矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{p\times q}$ 的 Kronecker 积定义为

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

1 矩阵半张量积及其推广

首先引入 1-型矩阵半张量积与 2-型矩阵半张量积[12].

定义 1 给定矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{p\times q}$,定义两个矩阵的 1-型矩阵半张量积与 2-型矩阵半张量积分别为

$$\boldsymbol{A}\times_1\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\otimes I_{\frac{l}{n}})(\boldsymbol{B}\otimes I_{\frac{l}{p}}),$$

$$\boldsymbol{A}\times_2\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\otimes J_{\frac{l}{n}})(\boldsymbol{B}\otimes J_{\frac{l}{p}}),$$

其中 $\boldsymbol{l}=[n,\ p]$ 表示两个正整数 n 与 p 的最小公倍数,而 $\otimes$ 表示两个矩阵的张量积(也称 Kronecker 积),$\boldsymbol{I}_w$ 表示 w 维单位矩阵.

当两个矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{p\times q}$ 的维数相容时,即 $n=p$ 时,1-型矩阵半张量积与 2-型矩阵半张量积皆为传统的矩阵乘积,并且它们都满足矩阵的结合律等性质,具体可以参见文献[12].

下面我们给出 1-型 MV 半张量积与 2-型 MV 半张量积[12].

定义 2 给定矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 与向量 x_p ,定义 1-型 MV 半张量积与 2-型 MV 半张量积分别为

$$\boldsymbol{A}\vec{\times}_1 x=(\boldsymbol{A}\otimes I_{\frac{l}{n}})(x\otimes 1_{\frac{l}{p}}),$$

$$\boldsymbol{A}\vec{\times}_2 x=(\boldsymbol{A}\otimes J_{\frac{l}{n}})(x\otimes 1_{\frac{l}{p}}),$$

其中 1_w 表示 w 维各元素全为 1 的列向量. 显然,当 $n=p$ 时,1-型 MV 半张量积与 2-型 MV 半张量积皆为传统的矩阵与向量的乘积.

受定义 2 启发,我们将 1-型 MV 半张量积与 2-型 MV 半张量积推广到矩阵与矩阵相乘的情形,我们称之为 3-型矩阵半张量积与 4-型矩阵半张量积.

定义 3 给定矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{p\times q}$,定义两个矩阵的 3-型矩阵半张量积与 4-型矩阵半张量积分别为

$$\boldsymbol{A}\times_3\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\otimes I_{\frac{l}{n}})(\boldsymbol{B}\otimes 1_{\frac{l}{p}}),$$

$$\boldsymbol{A}\times_4\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\otimes J_{\frac{l}{n}})(\boldsymbol{B}\otimes 1_{\frac{l}{p}}).$$

显然当矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为列向量时,3-型矩阵半张量积与 4-型矩阵半张量积即为 1-型 MV 半张量积与 2-型 MV 半张量积. 上面的 3-型矩阵半张量积与 4-型矩阵半张量积是良定的,但它们并不满足矩阵的结合律等性质. 我们可以把 3-型矩阵半张量积与 4-型矩阵半张量积定义中的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 看成是一些列向量的集合,此时定义 3 自然是定义 2 的一个推广. 不仅如此,定义 3 与定义 1 也有一定的代数关系,因此它的定义也有助于我们进一步地研究 1-型矩阵半张量积与 2-型矩阵半张量积的代数性质.

2 几种矩阵半张量积的代数性质

本节讨论几种矩阵半张量积的代数性质,这里本文主要考虑三种情形:(1) 矩阵与向量的半张量积;(2) 矩阵与矩阵的半张量积;(3) 向量与向量的半张量积.

2.1 矩阵与向量的半张量积

首先讨论矩阵与列向量的 1-型 MV 半张量积与 2-型 MV 半张量积和 1-型矩阵半张量积之间的关系,我们有下面的定理.

定理 1 给定矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 与列向量 x_p ,且 $\boldsymbol{l}=[n,\ p]$,则有下面的结论成立

$$\boldsymbol{A}\vec{\times}_1 x=\sum_{i=1}^{\frac{l}{p}} Col_i(\boldsymbol{A}\times_1 x);\tag{1}$$

$$\boldsymbol{A} \vec{\times}_2 x = \frac{n}{l}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\frac{l}{n}} \sum_{j=1}^{\frac{l}{p}} Row_i(Col_j(\boldsymbol{A} \times_1 x)) \\ \vdots \\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}} \sum_{j=1}^{\frac{l}{p}} Row_i(Col_j(\boldsymbol{A} \times_1 x)) \end{bmatrix} \otimes 1_{\frac{l}{n}}. \tag{2}$$

证明　首先证明结论(1),利用 1-型 MV 矩阵半张量积的定义,直接计算可得

$$\boldsymbol{A} \vec{\times}_1 x = (\boldsymbol{A} \otimes I_{\frac{l}{n}})(x \otimes 1_{\frac{l}{p}}) = (\boldsymbol{A} \otimes I_{\frac{l}{n}})(\sum_{i=1}^{\frac{l}{p}} Col_i(x \otimes I_{\frac{l}{p}})).$$

经过简单计算可得

$$\sum_{i=1}^{\frac{l}{p}}((\boldsymbol{A} \otimes I_{\frac{l}{n}})Col_i(x \otimes I_{\frac{l}{p}})) = \sum_{i=1}^{\frac{l}{p}} Col_i((\boldsymbol{A} \otimes I_{\frac{l}{n}})(x \otimes I_{\frac{l}{p}})),$$

由 1-型矩阵半张量积的定义即得(1)式右边.

下面证明结论(2),利用 2-型 MV 矩阵半张量积的定义得

$$\boldsymbol{A} \vec{\times}_2 x = (\boldsymbol{A} \otimes J_{\frac{l}{n}})(x \otimes 1_{\frac{l}{p}}) = \frac{n}{l}(\boldsymbol{A} \otimes 1_{\frac{l}{n}\times\frac{l}{n}})(x \otimes 1_{\frac{l}{p}})$$

$$= \frac{n}{l}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\frac{l}{n}} Row_i(\boldsymbol{A} \otimes I_{\frac{l}{n}}) \otimes 1_{\frac{l}{n}} \\ \vdots \\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}} Row_i(\boldsymbol{A} \otimes I_{\frac{l}{n}}) \otimes 1_{\frac{l}{n}} \end{bmatrix} \sum_{j=1}^{\frac{l}{p}} Col_j(x \otimes I_{\frac{l}{p}}).$$

上式经过简单计算可得

$$\frac{n}{l}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\frac{l}{n}} \sum_{j=1}^{\frac{l}{p}} Row_i(A \otimes I_{\frac{l}{n}})Col_j(x \otimes I_{\frac{l}{p}}) \\ \vdots \\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}} \sum_{j=1}^{\frac{l}{p}} Row_i(A \otimes I_{\frac{l}{n}})Col_j(x \otimes I_{\frac{l}{p}}) \end{bmatrix} \otimes 1_{\frac{l}{n}}$$

$$= \frac{n}{l}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\frac{l}{n}} \sum_{j=1}^{\frac{l}{p}} Row_i(Col_j((A \otimes I_{\frac{l}{n}})(x \otimes I_{\frac{l}{p}}))) \\ \vdots \\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}} \sum_{j=1}^{\frac{l}{p}} Row_i(Col_j((A \otimes I_{\frac{l}{n}})(x \otimes I_{\frac{l}{p}}))) \end{bmatrix} \otimes 1_{\frac{l}{n}}.$$

由 1-型矩阵半张量积的定义即得(2)式的右边. 定理得证.

由定理 1 的结论直接可得 1-型 MV 半张量积与 2-型 MV 半张量积之间的代数关系.

推论 1　给定矩阵 $A_{m\times n}$ 与向量 x_p,且 $l = [n,\ p]$,则有

$$\boldsymbol{A} \overrightarrow{\times}_2 x = \frac{n}{l}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\frac{l}{n}} Row_i(A \overrightarrow{\times}_1 x) \\ \vdots \\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}} Row_i(\boldsymbol{A} \overrightarrow{\times}_1 x) \end{bmatrix} \otimes 1_{\frac{l}{n}}.$$

下面讨论 1-型矩阵半张量积与 2-型矩阵半张量积作用于矩阵与列向量时的代数关系.

定理 2 给定矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 与向量 x_p,且 $l=[n, p]$,则有

$$\boldsymbol{A} \times_2 x = \frac{np}{l^2}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\frac{l}{n}}\sum_{j=1}^{\frac{l}{p}} Row_i(Col_j(A \times_1 x)) \\ \vdots \\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}}\sum_{j=1}^{\frac{l}{p}} Row_i(Col_j(A \times_1 x)) \end{bmatrix} \otimes 1_{\frac{l}{n}\times\frac{l}{p}}.$$

证明 利用 2-型矩阵半张量积的定义,计算可得

$$\boldsymbol{A} \times_2 x = (A \otimes J_{\frac{l}{n}})(x \otimes J_{\frac{l}{p}}) = \frac{np}{l^2}(A \otimes 1_{\frac{l}{n}\times\frac{l}{n}})(x \otimes 1_{\frac{l}{p}\times\frac{l}{p}})$$

$$= \frac{np}{l^2}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\frac{l}{n}} Row_i(A \otimes I_{\frac{l}{n}}) \otimes 1_{\frac{l}{n}} \\ \vdots \\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}} Row_i(A \otimes I_{\frac{l}{n}}) \otimes 1_{\frac{l}{n}} \end{bmatrix} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\frac{l}{p}} Col_j(x \otimes I_{\frac{l}{p}}) \otimes 1_{\frac{l}{n}}^{\mathrm{T}}\right).$$

经过简单计算,可由上式得

$$\frac{np}{l^2}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\frac{l}{n}}\sum_{i=1}^{\frac{l}{p}} (Row_i(A \otimes I_{\frac{l}{n}})Col_j(x \otimes I_{\frac{l}{p}})) \\ \vdots \\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}}\sum_{i=1}^{\frac{l}{p}} (Row_i(A \otimes I_{\frac{l}{n}})Col_j(x \otimes I_{\frac{l}{p}})) \end{bmatrix} \otimes 1_{\frac{l}{n}\times\frac{l}{p}}.$$

进一步,上式可化简为

$$\frac{np}{l^2}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\frac{l}{n}}\sum_{i=1}^{\frac{l}{p}} Row_i(Col_j((A \otimes I_{\frac{l}{n}})(x \otimes I_{\frac{l}{p}}))) \\ \vdots \\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}}\sum_{i=1}^{\frac{l}{p}} Row_i(Col_j((A \otimes I_{\frac{l}{n}})(x \otimes I_{\frac{l}{p}}))) \end{bmatrix} \otimes 1_{\frac{l}{n}\times\frac{l}{p}}.$$

由 1-型矩阵半张量积的定义即得定理 2. 定理证毕.

2.2　矩阵与矩阵的半张量积

本小节讨论两个矩阵的 3-型矩阵半张量积与 4-型矩阵半张量积和 1-型矩阵半张量积与 2-型矩阵半张量积之间的关系.

由 3-型矩阵半张量积与 4-型矩阵半张量积的定义以及定理 1，直接有下面的结论.

定理 3　给定矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}_{p\times q}$，且 $l=[n,\ p]$，则有

$$\boldsymbol{A}\times_3\boldsymbol{B}=\left(\sum_{i=1}^{\frac{l}{p}}Col_i(\boldsymbol{A}\times_1\boldsymbol{B})\ \cdots\ \sum_{i=(q-1)\frac{l}{p}+1}^{\frac{ql}{p}}Col_i(A\times_1B)\right),\tag{3}$$

$$A\times_4B=\frac{n}{l}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{\frac{l}{n}}Row_i(A\vec{\times}_1B)\\ \vdots\\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}}Row_i(A\vec{\times}_1B)\end{bmatrix}\otimes 1_{\frac{l}{n}}$$

$$=\frac{n}{l}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{\frac{l}{n}}\sum_{j=1}^{\frac{l}{p}}Row_i(Col_j(A\times_1B)) & \cdots & \sum_{i=1}^{\frac{l}{n}}\sum_{j=(q-1)\frac{l}{p}+1}^{\frac{ql}{p}}Row_i(Col_j(A\times_1B))\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}}\sum_{j=1}^{\frac{l}{p}}Row_i(Col_j(A\times_1B)) & \cdots & \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}}\sum_{j=(q-1)\frac{l}{p}+1}^{\frac{ql}{p}}Row_i(Col_j(A\times_1B))\end{bmatrix}\otimes 1_{\frac{l}{n}}.\tag{4}$$

由 2-型矩阵半张量积的定义与定理 3 的结果可得 1-型矩阵半张量积与 2-型矩阵半张量积之间的代数关系.

定理 4　给定矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{p\times q}$，且 $l=[n,\ p]$，则有

$$A\times_2B=\frac{np}{l^2}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{\frac{l}{n}}\sum_{j=1}^{\frac{l}{p}}Row_i(Col_j(A\times_1B)) & \cdots & \sum_{i=1}^{\frac{l}{n}}\sum_{j=(q-1)\frac{l}{p}+1}^{\frac{ql}{p}}Row_i(Col_j(A\times_1B))\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}}\sum_{j=1}^{\frac{l}{p}}Row_i(Col_j(A\times_1B)) & \cdots & \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}}\sum_{j=(q-1)\frac{l}{p}+1}^{\frac{ql}{p}}Row_i(Col_j(A\times_1B))\end{bmatrix}\otimes 1_{\frac{l}{n}\times\frac{l}{p}}.\tag{5}$$

证明　由 2-型矩阵半张量积的定义得

$$A\times_2B=\frac{p}{l}(A\times_4B)\otimes 1^{\mathrm{T}}_{\frac{l}{p}}=\frac{np}{l^2}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{\frac{l}{n}}Row_i(A\times_3B)\\ \vdots\\ \sum_{i=(m-1)\frac{l}{n}+1}^{\frac{lm}{n}}Row_i(A\times_3B)\end{bmatrix}\otimes 1_{\frac{l}{n}\times\frac{l}{p}}.$$

由定理 3 的(3)即得定理 4 结论. 定理证毕.

2.3 向量与向量的半张量积

本小节讨论两个向量的1-型MV矩阵半张量积与2-型MV矩阵半张量积和1-型矩阵半张量积与2-型矩阵半张量积之间的关系.

首先讨论两个列向量的几种矩阵半张量积之间的关系.

定理5 给定列向量 x_n 与 y_p,则有

$$x \vec{\times}_1 y = x \times_1 y = x \otimes y. \tag{6}$$

$$x \vec{\times}_2 y = x \times_2 y = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_i(x \otimes 1_p). \tag{7}$$

证明 (6)式由1-型MV矩阵半张量积,1-型矩阵半张量积以及张量积的定义直接可得.这里只证明(7)式,

$$x \times_2 y = (x \otimes J_p)y = \frac{1}{p}(x \otimes 1_{p\times p})y = \frac{1}{p}((x \otimes 1_p) \otimes 1_p^{\mathrm{T}})y = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_i(x \otimes 1_p).$$

定理证毕.

当两个向量为行向量时,我们有下面的结论.

定理6 给定行向量 x_n 与 y_p,则有

$$x \times_1 y = y \otimes x. \tag{8}$$

$$x \times_3 y = x \times_4 y = \sum_{i=1}^{n} x_i y. \tag{9}$$

$$x \times_2 y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(y \otimes 1_n^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{n}(x \times_4 y) \otimes 1_n^{\mathrm{T}} = \frac{1}{n}(x \times_3 y) \otimes 1_n^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

证明 (8)式由1-型矩阵半张量积以及张量积的定义直接可得.这里只给出(9)式(10)式的证明.

(9) $x \times_3 y = x(y \otimes 1_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y.$

(10) 由2-型矩阵半张量积定义,计算可得

$$\begin{aligned} x \times_2 y &= x(y \otimes J_n) = \frac{1}{n}x(y \otimes 1_{n\times n}) = \frac{1}{n}x((y \otimes 1_n) \otimes 1_n^{\mathrm{T}}) \\ &= \frac{1}{n}(x(y \otimes 1_n) \otimes 1_n^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{n}(x \times_3 y) \otimes 1_n^{\mathrm{T}} \\ &= \frac{1}{n}(x \times_4 y) \otimes 1_n^{\mathrm{T}} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i y) \otimes 1_n^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

定理证毕.

本文所讨论的几种矩阵半张量积都是左半张量积[1,12],相应地,我们也可以定义几种矩阵半张量积的右半张量积形式[12].对于矩阵的右半张量积也有类似的性质,这里不再赘述.

3 结束语

本文分矩阵与矩阵,矩阵与向量,向量与向量三种情形,研究了几种矩阵半张量积的代数关系.同时将1-型MV半张量积与2-型MV半张量积推广到矩阵与矩阵的乘积情形,即3-型矩阵半张量积与4-型矩阵半张量积,本文得到的所有结论都可以推广到矩阵的右半张量积的情形.

参 考 文 献

[1] 程代展,齐洪胜.矩阵的半张量积理论与应用[M].北京:科学出版社,2007.

[2] Li H T, Xie L H, Wang Y Z. Output regulation of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(6): 2993-2998.

[3] 冯俊娥,贾森.混合值逻辑网络的集合稳定[J].控制与决策,2019,34(2):269-273.

[4] 丁雪莹，李海涛. 概率级联布尔网络的集镇定及其应用[J]. 控制理论与应用，2019，36(2)：271-278.

[5] Cheng D Z. On finite potential games[J]. Automatica，2014，50(7)：1793-1801.

[6] 于永渊，冯俊娥，潘金凤. 有序势博弈及其在智能体无线网络中的应用[J]. 控制与决策，2017，32(3)：393-402.

[7] Cheng D Z，Wan X，Liu T. A survey on potential evolutionary game and its applications[J]. Journal of Control and Decision，2014，2(1)：26-45.

[8] 范洪彪，冯俊娥，孟敏. 模糊关系不等式 $A^\circ X^\circ B \leqslant C$ 的解[J]. 控制理论与应用，2016，33(5)：694-700.

[9] Cheng D Z，Feng J E，Lv H L. Solving fuzzy relational equations via Semi-tensor product[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2012，20(2)：390-396.

[10] 段培永，吕红丽，冯俊娥，等. 室内热舒适环境的模糊关系矩阵模型控制系统[J]. 控制理论与应用，2013，30(2)：215-221.

[11] Li H T，Zhao G D，Meng M，et al. A survey on applications of semi-tensor product method in engineering[J]. Science China Information Sciences，2018，61：1-17.

[12] 程代展. 矩阵半张量积讲义[M]. 北京：科学出版社，2020.

[13] 冯俊娥，张庆乐，赵建立. 程氏投影及其在模型降阶中的应用[J]. 聊城大学学报(自然科学版)，2019，32(2)：1-7.

[14] 李东方，薛超讯，赵建立. 矩阵的拟半张量积[J]. 聊城大学学报(自然科学版)，2008，21(2)：30-32.

[15] 郑义，赵建立，李允成. 矩阵左半张量积的推广--泛张量积及其性质[J]. 聊城大学学报(自然科学版)，2009，22(1)：1-3.

Four Kinds of Semi-Tensor Products and Their Relationships

FENG Jun-e[1]　LI Yi-liang[1]　ZHAO Jian-li[2]

(1. School of Mathematics，Shandong University，Jinan 250100，China；2. School of Mathematical Sciences，Liaocheng University，Liaocheng 252059，China)

Abstract　This paper investigates four kinds of semi-tensor products of matrices. This paper first introduces all concepts of four kinds of semi-tensor products of matrices，which includes 1-type semi-tensor product of matrices，2-type semi-tensor product of matrices，1-type MV semi-tensor product and 2-type MV semi-tensor product. The two latter concepts are only fit for the product of a matrix and a vector. This paper generalizes them to the cases of the product of matrices. Furthermore，the relationships among them are deeply discussed.

Key words　semi-tensor product；MV semi-tensor product；matrix multiplier；generalized semi-tensor product