文章编号　1672-6634(2020)04-0008-06　　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2020.04.002

两类非线性方程(组)的对称约化和精确解

孙世飞　李雪霞　刘汉泽

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘　要　利用直接对称的方法研究了 Cubic-非线性 Schrödinger(CNS)方程和非线性 Schrödinger(NLS)方程两类非线性方程,得到了两类不同阶的 Schrödinger 方程的对称和约化方程,借助对称得到了包括行波解在内的多个精确解,并对两类方程的高阶约化方程进行分析讨论从而得到了幂级数形式的新精确解.

关键词　非线性偏微分方程组;李点对称;精确解

中图分类号　O175.2　　**文献标识码**　A

0　引言

随着非线性科学研究的不断发展,在数学物理领域中构造非线性方程组并得到其精确解已经成为了一项热门课题,包括非线性常微分方程(组)[1]、非线性偏微分方程(组)[2-4]和非线性差分方程(组)[5]如浅水波方程[6]、正则长波方程[7]、Drinfeld-Sokelov-wilson(DSW)[8,9]方程组等的研究都可以用来描述物理等其他领域的复杂现象,在诸多非线性方程和方程组的研究中,量子力学领域中重要的 Schrödinger 方程的多种精确解的研究也有着其重要的研究意义.

Schrödinger 方程是由奥地利物理学家 Schrödinger 提出的用来描述微观粒子运动的量子力学中的一个基本方程,通过对每个微观系统的 Schrödinger 方程进行研究可以得到波函数的具体形式以及对应的能量,进而了解微观系统的性质. 非线性 Schrödinger 方程在非线性光纤、非线性光器件、光子晶体等多种非线性介质中作为可以描述非线性波动传播动力学的基本模型被广泛关注和研究、针对引入随机变量的各种修正的 Schrödinger 方程,采用解析和数值方法研究其孤子解具有现实意义;通过解析和数值的研究光孤子脉冲的动力学特性,可以进一步的研究光孤子脉冲在全光技术中的物理机制;通过相空间分析 Schrödinger 方程还可以对混沌动力学进行研究,通过研究基于非线性光纤和光纤器件的混沌动力学,可以寻找混沌出现的条件,而这些条件也在全光通信中为混沌加密等方向的研究提供了潜在的重要作用.

研究了如下形式的二阶 CNS 方程和三阶 NLS 方程两类不同阶数的非线性偏微分 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t + \alpha u\,|\,u\,|^2 + u_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{i}u_t + u_{xxx} + 6\,|\,u\,|^2 u_x + 3u(|\,u\,|^2)_x = 0, \tag{2}$$

其中 α 是系数, u 是复函数振幅. Schrödinger 方程在数学物理领域中是一种经典并且重要的非线性方程,但是由于非线性方程的复杂性和特殊性,目前并没有统一的计算工具和方法,在过去的几十年中,出现了很多求解非线性方程的一般方法,例如 Hirota 双线性方法[10,11]、辅助函数法[12,13]、F-展开法[14,15]、Exp-函数法[16,17]和李对称法[18-20]等,其中孙艳波采用不同形式的 Hirota 双线性方法对方程进行求解. 通过位势变换引入新函数,将原方程转换成双线性导数方程进行求解[11];蔡国梁, 张风云等人用扩展的 F-展开法求耦合

收稿日期:2019-10-01

基金项目:国家自然科学基金项目(11171041)资助

通讯作者:刘汉泽,男,汉族,博士,教授,研究方向:微分方程理论与应用,E-mail:hnz_liu@aliyun.com.

Schrödinger-Boussinesq 方程组的精确解；阮航宇利用变量分离法研究了(2+1)维 NLS 方程的局部结构，得到了一系列包含环孤子，呼吸子和瞬子等的局域解[21]；李景美，张金良等人通过导出常系数柱(球)非线性 Schrödinger 方程与变系数非线性 Schrödinger 方程 (NLS) 的一个相似变换并通过 G'/G 展开法得到了变系数 NLS 方程的解[22]；高秀丽，额尔敦布和等人通过求变分问题的极值和试探函数法等多个方法的组合得到了 Cubic-非线性 Schrödinger(CNS)方程的精确解[20]. 这些方法在求解非线性偏微分方程的研究中都逐渐成熟，但是并没有研究此类方程的李对称及相应结构，而在众多方法中，李对称方法因为可以判定方程的行波行为和其广泛适用性得到了广泛关注，本文通过复包络变换和李对称方法讨论了 Schrödinger 方程的李点对称和约化方程，并通过幂级数方法得到了约化方程的一系列新解，从而对于今后研究此类 Schrödinger 方程提供了更多的方向.

在本文中，第 1 部分引进复包络变换，将包含复值函数的 Schrödinger 方程转化为了实函数方程组，并借助 Lie 对称方法得到了对应实函数方程组的点对称；第 2 部分，根据第一部分得到的对称对实函数方程组进行对称约化，得到了部分精确解；第 3 部分，运用幂级数方法对两类方程的高阶约化方程进行研究，得到了新的精确解.

1　两类 Schrödinger 方程的复包络变换和李点对称

在包含复函数的非线性偏微分方程的研究中，为了检测方程有没有行波行为，常用的方法就是引入变换将复函数方程转化为实函数方程组，本文中引入复包络变换

$$u(x,t)=p(x,t)+\mathrm{i}q(x,t)\ , \tag{3}$$

其中 i 为虚数单位，将 (3) 代入方程 (1) 得到如下方程组

$$p_t+\alpha p^2q+\alpha q^3+q_{xx}=0,\ q_t-\alpha q^2p-\alpha p^3-p_{xx}=0. \tag{4}$$

同样将 (3) 式代入方程 (2) 得到对应的实函数方程组

$$p_t+p_{xxx}+12p^2p_x-12q^2p_x-24pqq_x=0,\ q_t+q_{xxx}+12p^2q_x-12q^2q_x+24pqp_x=0. \tag{5}$$

设方程组 (4)(5) 的单参数向量场为

$$V=\xi(x,t,p,q)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,p,q)\frac{\partial}{\partial t}+\varphi(x,t,p,q)\frac{\partial}{\partial p}+\psi(x,t,p,q)\frac{\partial}{\partial q}, \tag{6}$$

其中 $\xi(x,t,p,q)$ ，$\tau(x,t,p,q)$ ，$\varphi(x,t,p,q)$ 和 $\psi(x,t,p,q)$ 为向量场中的待定系数函数，如果向量场 (6) 存在方程组 (4)(5) 的对称，向量场需要满足以下条件

$$pr^{(i)}V(\Delta_1)\,|_{\Delta_1=0}=0,\qquad pr^{(j)}V(\Delta_2)\,|_{\Delta_2=0}=0. \tag{7}$$

$pr^{(i)}V$ 表示向量场的 i 阶延拓，在方程组 (4) 中 $\Delta_1=p_t+\alpha p^2q+\alpha q^3+q_{xx}$ ，$\Delta_2=q_t-\alpha q^2p-\alpha p^3-p_{xx}$ ，方程组 (5) 中 $\Delta_1=p_t+p_{xxx}+12p^2p_x-12q^2p_x-24pqq_x$ ，$\Delta_2=q_t+q_{xxx}+12p^2q_x-12q^2q_x+24pqp_x$.

接下来用标准对称分析方法研究两类方程组的向量场.

(I)　方程组 (4)通过无穷小生成元可以得到无穷多个点对称，得到的李点对称为

$$\begin{aligned}V=&\left(\frac{1}{2}C_5x+2C_4t+C_2\right)\frac{\partial}{\partial x}+(C_5t+C_1)\frac{\partial}{\partial t}-\left(\frac{1}{2}C_5p+C_4xq+C_3q\right)\frac{\partial}{\partial p}\\&+\left(-\frac{1}{2}C_5q+C_4xp+C_3p\right)\frac{\partial}{\partial q},\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\xi=\frac{1}{2}C_5x+2C_4t+C_2$, $\tau=C_5t+C_1$, $\varphi=-\left(\frac{1}{2}C_5p+C_4xq+C_3q\right)$, $\psi=-\frac{1}{2}C_5q+C_4xp+C_3p$.

不变群的全体生成元 V 构成了一个五维李代数，并有以下一组基

$$\begin{aligned}&V_1=\frac{\partial}{\partial t},V_2=\frac{\partial}{\partial x},V_3=p\frac{\partial}{\partial q}-q\frac{\partial}{\partial p},V_4=xp\frac{\partial}{\partial q}-xq\frac{\partial}{\partial p}+2t\frac{\partial}{\partial x},\\&V_5=p\frac{\partial}{\partial p}+q\frac{\partial}{\partial q}-2t\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}.\end{aligned} \tag{9}$$

(II)　方程组(5)得到的李点对称为

$$V=(\frac{C_1}{3}x+C_3)\frac{\partial}{\partial x}+(C_1t+C_2)\frac{\partial}{\partial t}-\frac{C_1}{3}p\frac{\partial}{\partial p}-\frac{C_1}{3}q\frac{\partial}{\partial q}, \tag{10}$$

其中 $\xi=\frac{C_1}{3}x+C_3$, $\tau=C_1t+C_2$, $\varphi=-\frac{C_1}{3}p$, $\psi=-\frac{C_1}{3}q$. 不变群的全体生成元 V 构成了一个三维李代数,有如下一组基

$$V_1=\frac{\partial}{\partial t},V_2=\frac{\partial}{\partial x},V_3=\frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{3}p\frac{\partial}{\partial p}-\frac{1}{3}q\frac{\partial}{\partial q}. \tag{11}$$

通过求得的方程的向量场,可以对非线性方程进行对称约化,从而使偏微分方程转化为常微分方程进行求解,通过向量场也可以对方程的守恒律进行研究.

2 两类非线性方程(组)的约化和精确解

在上一部分我们已经得到了方程(4)和方程(5)两类非线性方程组的向量场,在这一部分,将对两类方程组的对称约化及精确解进行研究.

首先考虑方程组(4)的特殊向量场、约化方程和精确解

(a) 对于向量场 $V_2=\frac{\partial}{\partial x}$,可以得到相似变量 $\xi_1=t$, $\omega=p$, $v=q$. 对应的群不变解为 $\omega=f(\xi_1)$, $v=g(\xi_1)$,可得

$$p=f(t),q=g(t). \tag{12}$$

将不变量(12)代入方程(4),得到约化方程

$$f'+\alpha f^2g+\alpha g^3=0,g'-\alpha g^2f-\alpha f^3=0, \tag{13}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$, $g'=\mathrm{d}g/\mathrm{d}\xi$.

(b) 对于向量场 $V_1+cV_2=\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}$,不变量为 $\xi_2=x-ct$, $\omega=p$, $v=q$. 对应的群不变解为 $\omega=f(\xi_2)$, $v=g(\xi_2)$,可得

$$p=f(x-ct),q=g(x-ct). \tag{14}$$

将不变量(14)代入方程(4),得到约化方程

$$cf'+\alpha f^2g+\alpha g^3+g''=0,g'-\alpha g^2f-\alpha f^3-f''=0, \tag{15}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$, $g'=\mathrm{d}g/\mathrm{d}\xi$.

(c) 对于向量场 $V_5=p\frac{\partial}{\partial p}+q\frac{\partial}{\partial q}-2t\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}$,不变量为 $\xi_3=xt^{-\frac{1}{2}}$, $\omega=qt^{\frac{1}{2}}$, $v=pt^{\frac{1}{2}}$. 对应的群不变解为 $\omega=f(\xi_3)$, $v=g(\xi_3)$,将不变量代入原方程组得约化方程

$$-f'\xi-f+2\alpha gf^2+2\alpha g^3+2g''=0,\ g'\xi+g+2\alpha g^2f+2\alpha f^3+2f''=0, \tag{16}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$, $g'=\mathrm{d}g/\mathrm{d}\xi$.

接下来根据方程(5)的特殊向量场研究非线性方程组(5)的约化方程和精确解.

(a) 对于向量场 $V_2=\frac{\partial}{\partial x}$,可以得到不变量 $\xi_1=t$, $\omega=p$, $v=q$. 对应的群不变解为 $\omega=f(\xi_1)$, $v=g(\xi_1)$,可得

$$p=f(t),q=g(t). \tag{17}$$

将不变量(17)代入方程(5),得到约化方程

$$f'=0,g'=0, \tag{18}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$, $g'=\mathrm{d}g/\mathrm{d}\xi$. 因此方程组(5)有解 $p=c_1$, $q=c_2$,其中 c_1,c_2 为任意常数,很明显解是无意义的.

(b) 对于向量场 $V_1+cV_2=\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}$,不变量为 $\xi_2=x-ct$, $\omega=p$, $v=q$. 对应的群不变解为 $\omega=f(\xi_2)$, $v=g(\xi_2)$,可得

$$p=f(x-ct),q=g(x-ct). \tag{19}$$

将不变量 (19) 代入方程组 (5)，得到约化方程

$$-cf'+f'''+12f^2f'-12g^2f'-24fgg'=0,-cg'+g'''+12f^2g'-12g^2g'+24ff'g=0, \tag{20}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi, g'=\mathrm{d}g/\mathrm{d}\xi$.

(c) 对于向量场 $V_3=\frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{3}p\frac{\partial}{\partial p}-\frac{1}{3}q\frac{\partial}{\partial q}$，不变量为 $\xi_3=xt^{-\frac{1}{3}},\omega=pt^{\frac{1}{3}},v=qt^{\frac{1}{3}}$. 对应的群不变解为 $\omega=f(\xi_3),v=g(\xi_3)$，将不变量代入原方程组得约化方程

$$f'\xi+f-3f'''-36f^2f'+36g^2f'+72fgg'=0, g'\xi+g-3g'''-36f^2g'+36g^2g'-72ff'g=0, \tag{21}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$, $g'=\mathrm{d}g/\mathrm{d}\xi$.

值得注意的是，约化方程 (16) 和 (21) 都是高阶的非线性微分方程，我们将在下一节对这两个方程进行讨论和研究.

3　两类非线性方程组的幂级数解

在第二部分，通过 Lie 对称分析已经得到了方程(4)和方程(5)两类非线性方程组的对称及约化方程，在本节将对高阶约化方程(16)和(21)进行研究，通过幂级数解得到了含有非恒量系数的幂级数形式解.

设方程组有下列形式的幂级数解

$$f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^n, \qquad g(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\xi^n. \tag{22}$$

将式 (22) 代入方程 (16) 得

$$-\sum_{n=0}^{\infty}na_n\xi^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^n+2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}a_{n-j}a_{j-k}b_k\xi^n+2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}b_{n-j}b_{j-k}b_k\xi^n$$
$$+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)b_{n+2}\xi^n=0, \tag{23a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}nb_n\xi^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\xi^n+2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}b_{n-j}b_{j-k}a_k\xi^n+2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}a_{n-j}a_{j-k}a_k\xi^n$$
$$+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}\xi^n=0. \tag{23b}$$

比较相同系数项，可得

$$a_{n+2}=-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}[(n+1)b_n+2\alpha b_nb_0a_0+2\alpha a_na_0^2+2\alpha\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{j}(b_{n-j}b_{j-k}a_k+a_{n-j}a_{j-k}a_k)],$$

$$b_{n+2}=-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}[-(n+1)a_n+2\alpha a_na_0b_0+2\alpha b_nb_0^2+2\alpha\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{j}(a_{n-j}a_{j-k}b_k+b_{n-j}b_{j-k}b_k)]. \tag{24}$$

其中 $n=0,1,2,$. 对于任意选取的常数 a_0，a_1，b_0 和 b_1 都可以得到

$$a_2=\frac{1}{4}(b_0+2\alpha a_0b_0^2+2\alpha a_0^3), b_2=\frac{1}{4}(a_0+2\alpha b_0a_0^2+2\alpha b_0^3). \tag{25}$$

根据递推公式，a_n 和 b_n 的其余各项都可以通过式(24)得出，这表明方程(16)存在系数为式(24)的幂级数解. 则方程(24)有如下形式的幂级数解

$$f(\xi)=a_0+a_1\xi+\sum_{n=2}^{\infty}na_n\xi^n, g(\xi)=b_0+b_1\xi+\sum_{n=2}^{\infty}nb_n\xi^n, \tag{26}$$

则非线性方程组 (4) 的精确解为

$$p(x,t)=a_0+a_1xt^{-\frac{1}{2}}+\sum_{n=2}^{\infty}na_nxt^{-\frac{n}{2}}, q(x,t)=b_0+b_1xt^{-\frac{1}{2}}+\sum_{n=2}^{\infty}nb_nxt^{-\frac{n}{2}}. \tag{27}$$

将 (22) 式代入方程(21) 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_n\xi^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^n-36\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(n-j+1)a_{n-j+1}a_{j-k}a_k\xi^n+36\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(n-j+1)a_{n-j+1}b_{j-k}b_k\xi^n$$

$$-3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}\xi^n+72\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(n-j+1)b_{n-j+1}b_{j-k}a_k\xi^n=0, \tag{28}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}nb_n\xi^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\xi^n-3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)b_{n+3}\xi^n+36\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(n-j+1)b_{n-j+1}b_{j-k}b_k\xi^n$$
$$-36\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(n-j+1)b_{n-j+1}a_{j-k}a_k\xi^n-72\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(n-j+1)a_{n-j+1}a_{j-k}b_k\xi^n=0. \tag{29}$$

比较同类项,同理可得 a_{n+3} 和 b_{n+3} 的表达式

$$\begin{aligned}a_{n+3}=&\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}[(n+1)(a_n-36a_{n+1}a_0^2+36a_{n+1}b_0^2+72b_{n+1}b_0a_0)]\\&+\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{j}36(n-j+1)(-a_{n-j+1}a_{j-k}a_k+a_{n-j+1}b_{j-k}b_k+2b_{n-j+1}b_{j-k}a_k),\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}b_{n+3}=&\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}[(n+1)(b_n-36b_{n+1}a_0^2+36b_{n+1}b_0^2-72a_{n+1}a_0b_0)]\\&+\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{j}36(n-j+1)(-b_{n-j+1}a_{j-k}a_k+b_{n-j+1}b_{j-k}b_k-2a_{n-j+1}a_{j-k}b_k),\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$ 对于任意选取的常数 a_0,a_1,b_0 和 b_1,方程(21)存在如下形式的解

$$f(\xi)=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\sum_{n=3}^{\infty}na_n\xi^n,g(\xi)=b_0+b_1\xi+b_2\xi^2+\sum_{n=3}^{\infty}nb_n\xi^n, \tag{32}$$

非线性方程(5)的解为

$$p(x,t)=a_0+a_1xt^{-\frac{1}{3}}+a_2xt^{-\frac{2}{3}}+\sum_{n=3}^{\infty}na_nxt^{-\frac{n}{3}}, \tag{33}$$

$$q(x,t)=b_0+b_1xt^{-\frac{1}{3}}+b_2xt^{-\frac{2}{3}}+\sum_{n=3}^{\infty}nb_nxt^{-\frac{n}{3}}. \tag{34}$$

本文中应用幂级数方法对方程(16)和(21)两类不同阶的 Schrödinger 方程复包络变换后的的方程组的精确解进行研究,得到了相应的幂级数解,这表示幂级数方法在求解不同阶的多种非线性方程和非线性方程组中都有其强大的适用性和重要性.在数学物理领域通过得到的幂级数解也可以得到所研究方程的精确解并解释一系列复杂的物理现象,因此该方法在理论和应用上都很方便.

4 结论

本文通过 Lie 对称分析和幂级数函数法对 CNS 和 NLS 两类 Schrödinger 方程进行研究,通过复包络变换和李对称得到了两类方程的李点对称和约化方程,进而通过约化方程得到了两类方程的高阶约化方程的幂级数解,这些解在数学物理方面有很重要的特征,也证明了李对称方法和幂级数函数方法是研究和求解非线性方程(组)的有效方法.

参 考 文 献

[1] 徐家发,杨志林. n 阶非线性常微分方程组边值问题的正解[J]. 系统科学与数学, 2010,30(5):633-641.
[2] 张鸿庆,丁琦.一类非线性偏微分方程组的解析解[J]. 应用数学和力学, 2008, 29(11):1268-1278.
[3] 苏道毕力格,王晓民,鲍春玲.利用对称方法求解非线性偏微分方程组边值问题的数值解[J]. 应用数学, 2016, 27(4):708-713.
[4] 田红霞,高犇.二元 Camassa-Holm 方程的李对称分析和精确解[J]. 中国科学院大学学报, 2016, 33(4):454-461.
[5] 张千宏,徐昌进.一个非线性差分方程组解的表现[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2010, 35(4):55-58.
[6] 梅建琴,张鸿庆. 2+1 维广义浅水波方程的类孤子解与周期解[J]. 数学物理学报, 2005,25(6):784-788.
[7] 柏琰,张鲁明.对称正则长波方程的一个守恒差分格式[J]. 应用数学学报, 2007, 30(2):248-255.
[8] Zhao Z, Zhang Y, Han Z. Symmetry analysis and conservation laws of the Drinfeld-Sokolov-Wilson system[J]. The European Physical Journal Plus, 2014, 129(7):143.
[9] Tasbozan O, Şenol M, Kurt A, et al. New solutions of fractional Drinfeld-Sokolov-Wilson system in shallow water waves[J]. Ocean Engi-

neering，2018，161：62-68.
[10] 吴建平. Hirota 双线性方法在两个孤子方程中的应用[D]. 郑州：郑州大学，2007.
[11] 孙艳波. 应用 Hirota 双线性方法求解若干耦合方程的怪波解[D]. 杭州：浙江师范大学，2015.
[12] 徐翠霞. 非线性全局优化的辅助函数方法研究[D]. 洛阳：河南科技大学，2009.
[13] 唐美兰，刘心歌. 几种辅助函数方法及应用[J]. 数学理论与应用，2004(4)：78-80.
[14] 张金良，王明亮，王跃明. 推广的 F-展开法及变系数 KdV 和 mKdV 的精确解[J]. 数学物理学报，2006，26(3)：353-360.
[15] 蔡国梁，张风云，任磊. 用扩展的 F-展开法求耦合 Schrödinger-Boussinesq 方程组的精确解[J]. 应用数学，2008，21(1)：90-97.
[16] He J H，Wu X H. Exp-function method for nonlinear wave equations[J]. Chaos Solitons & Fractals，2006，30(3)：700-708.
[17] Ma W X，Huang T，Zhang Y. A multiple exp-function method for nonlinear differential equations and its application[J]. Physica Scripta，2010，82(6)：5468-5478.
[18] 李宁. 李对称方法在非线性发展方程(组)求解中的应用[D]. 聊城：聊城大学，2014.
[19] Belmonte-Beitia J，Pérez-García V M，Vekslerchik V，et al. Lie Symmetries and solitons in nonlinear systems with spatially inhomogeneous nonlinearities[J]. Physical Review Letters，2007，98(6)：064102.
[20] 高秀丽，额尔敦布和，白秀. 变分方法在求解非线性偏微分方程(组)中的应用[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版)，2017，36(3)：1-6.
[21] 阮航宇，陈一新. (2+1)维非线性薛定谔方程的环孤子，dromion，呼吸子和瞬子[J]. 物理学报，2001(4)：586-592.
[22] 李景美，张金良，王飞. 柱(球)非线性薛定谔方程的精确解[J]. 河南科技大学学报(自然科学版)，2018(2)：83-86.

Symmetry Reduction and Exact Solution of Two Kinds of Nonlinear Equation System

SUN Shi-fei　LI Xue-xia　LIU Han-ze

(School of Mathematical Sciences，Liaocheng University，Liaocheng 252059，China)

Abstract　In this paper，two kinds of Schrödinger equations of CNS and NLS are studied by direct symmetry method，the symmetric and reduced equations of the two kinds of equations are obtained，and many exact solutions including traveling wave solutions are obtained by the symmetries and reduced equations ，then the exact solutions of the power series form are obtained by analyzing the higher-order reduced equations of the two kinds of equations.

Key words　partial differential equation system；Lie symmetry analysis；exact solutions；reduction