

PDEs 对四种图像降噪降维方法的影响

王 振 雷田田 范丽亚 杨 静

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘 要 针对高维噪声图像(光暗、有遮挡)的分类问题,分类质量的好坏不仅依赖于图像降噪方法的选择,同时还依赖于图像降维方法的选择.目前,大部分的降噪方法不具备降维作用,同样地,大部分的降维方法也不具备降噪作用.为了在降噪降维的同时还能保持良好的分类精度,本文提出了基于偏微分方程组(PDEs)的主成分分析(PCA/PDEs)、基于 PDEs 的线性判别分析(LDA/PDEs)、基于 PDEs 的典型相关分析(CCA/PDEs)以及基于 PDEs 的监督典型相关分析(SCCA/PDEs)四种降噪降维算法,并研究了 PDEs 的进化对四种算法的影响.

关键词 偏微分方程组;主成分分析;线性判别分析;典型相关分析;监督典型相关分析

中图分类号 TP391

文献标识码 A

0 引言

噪声图像的特征提取是模式识别和机器学习的重要组成部分,也是模式识别领域的研究热点之一.特征提取的本质就是降维,主要目标是利用线性或非线性变换,在保持原始图像蕴含的有效信息下,将处于高维空间中的图像压缩到一个低维子空间中,进而对图像做进一步识别.主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)^[1]和线性判别分析(Linear Discriminant Analysis, LDA)^[2,3]是特征提取中两个最经典的方法. PCA 的基本思想是通过极大化数据方差来寻找一组最优的低维子空间的正交基向量. LDA 则是通过极大化 Fisher 准则来寻找降维变换阵,使得降维后的数据具有极大的类间散度和极小的类内散度,即降维后的同类数据尽可能靠近,不同类数据尽可能远离. PCA 和 LDA 主要是针对图像的一组特征进行降维处理的,并不适用于多特征图像的维数约减.为了处理多特征图像的维数约减问题, H. Hotelling^[4]于 1936 年提出了典型相关分析(Canonical Correlation Analysis, CCA).经典 CCA 主要是研究图像两组特征间的相关性,属无监督学习方法,为了引入监督信息,提高低维数据的鉴别能力, Sun 等人^[5]借助于类内信息提出了监督 CCA(Supervised CCA, SCCA).杨等人^[6]进一步提出了边界监督多重集典型相关分析.

不论是 LDA 还是 SCCA 都只是考虑了图像的判别信息,并没有考虑光照、遮挡、平移、旋转等对图像的影响,这限制了上述所提方法的推广能力.也有一些方法考虑了图像在平移、旋转和光照的影响,如 SIFT (Scale-Invariant Feature Transform)^[7]、HOG (Histogram of Oriented Gradient)^[8]、Invariant Scattering Convolution Network^[9]等,但没有考虑图像的判别信息.2013 年和 2015 年, Liu 等人分别提出了将 PDEs 应用于计算机视觉的方法^[10,11].2017 年, Fang 等人^[12]提出了一种基于 PDEs 的图像特征提取方法,所提方法既考虑了图像的判别信息,也考虑了图像在平移、旋转下的不变性以及光照的鲁棒性,但没有考虑图像维数约减问题.2018 年和 2019 年,江等人分别研究了 PDEs 的进化次数对图像特征质量的影响^[13]以及对正则化 SVM 模型参数的影响^[14].

本文借助于上述研究成果,着重考虑将 PDEs 融入到图像降维方法中,以期提高对高维噪声图像(光暗、有遮挡)的分类精度.为此,提出了基于 PDEs 的 PCA (PCA/PDEs)、基于 PDEs 的 LDA (LDA/PDEs)、基于 PDEs 的 CCA (CCA/PDEs)以及基于 PDEs 的 SCCA (SCCA/PDEs)四种图像降噪降维方法,并研究了

收稿日期:2019-07-08

基金项目:国家自然科学基金项目(11801248);山东省自然科学基金项目(ZR2016AM24, ZR2018BF010)资助

通讯作者:范丽亚,女,汉族,博士,教授,研究方向:机器学习理论与应用, E-mail: fanliya63@126.com.

PDEs的进化对四种所提算法的影响.为了验证所提算法的有效性和可竞争性,分别以支持向量机(Support Vector Machine, SVM,针对二分类问题)^[15,16]和一对一多类SVM(One-versus-One Multi-class SVM, OVO-MSVM,针对多分类问题)^[17,18]为分类器,在Extended Yale B数据集和Palm-print数据集上进行了大量的比较实验.

1 预备知识

本节简要回顾文中要用到的SVM和OVO-MSVM,以及一些基本概念.

1.1 二类支持向量机

给定二分类数据集 $\mathbf{T} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m \in \mathbf{R}^d \times \{\pm 1\}$, 其中 $y_i \in \{\pm 1\}$ 表示第 i 个样本 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^d$ 的类标签. 记 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m] \in \mathbf{R}^{d \times m}$ 和 $\mathbf{D} = \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 分别为样本矩阵和类标签矩阵, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^\top \in \mathbf{R}^m$ 为类标签向量. 用 $\mathbf{e}_m = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{I}_m \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 分别表示 m 维 1 向量和 $m \times m$ 阶单位矩阵.

线性 SVM 是通过构建下面的二次规划模型

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}, b, \xi} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \text{s. t.} \quad & y_i (\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b) \geq 1 - \xi_i, \xi_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (1)$$

来寻找分类决策函数 $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b$, 其中 $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^d$ 和 $b \in \mathbf{R}$ 分别是决策函数的法向量和阈值, $C > 0$ 是模型参数, $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ 是松弛变量, $\|\cdot\|$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 分别表示向量的欧氏范数和内积. 通过求解模型(1)的 Wolfe 对偶模型

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \quad & \frac{1}{2} \alpha^\top \mathbf{G} \alpha - \mathbf{e}_m^\top \alpha \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{y}^\top \alpha = 0, 0 \leq \alpha \leq C \mathbf{e}_m, \end{aligned} \quad (2)$$

可得最优决策函数, 其中 $\alpha \in \mathbf{R}_+^m$ 是 Lagrange 乘子向量, $\mathbf{G} = \mathbf{D} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \mathbf{D}$ 是对称非负定阵. 具体算法如下

算法 1 (SVM)

步 1 给定数据集 $\mathbf{T} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m \in \mathbf{R}^d \times \{\pm 1\}$, 选择适当的模型参数 $C > 0$.

步 2 求解模型(2), 得最优解 $\alpha^* \in \mathbf{R}_+^m$.

步 3 计算 $\mathbf{w}^* = \mathbf{X} \mathbf{D} \alpha^* = \sum_{i=1}^m \alpha_i^* y_i \mathbf{x}_i$.

步 4 找 α^* 的一个正分量 $0 < \alpha_j^* < C$, 计算 $b^* = y_j - \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{x}_j \rangle = y_j - \sum_{i=1}^m \alpha_i^* y_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$.

步 5 构造分类决策函数 $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{x} \rangle + b^*$.

步 6 对任一输入数据 $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^d$, 其类标签为 $y_{\tilde{\mathbf{x}}} = \text{sign}(f(\tilde{\mathbf{x}}))$.

1.2 多类支持向量机

给定 $K (K \geq 3)$ 类数据集 $\mathbf{T} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m \in \mathbf{R}^d \times \{1, \dots, K\}$, 其中第 i 类有 m_i 个样本且 $m_1 + \dots + m_K = m$. 用 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m] \in \mathbf{R}^{d \times m}$ 表示整体样本矩阵, 用 $\mathbf{X}_i = [\mathbf{x}_2^{(i)}, \mathbf{x}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_{m_i}^{(i)}] \in \mathbf{R}^{d \times m_i}$ 表示第 i 类样本矩阵, 则 \mathbf{X} 可表示为 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K]$.

线性 OVO-MSVM 的基本思想是对任意两类样本 \mathbf{X}_i 和 $\mathbf{X}_j (i \neq j)$, 一个视为正类, 一个视为负类(不妨视 \mathbf{X}_i 为正类, \mathbf{X}_j 为负类, 即 $y_k^{ij} = 1, \mathbf{x}_k^{ij} \in \mathbf{X}_i; y_k^{ij} = -1, \mathbf{x}_k^{ij} \in \mathbf{X}_j$), 利用线性 SVM 思想, 构建如下二次规划模型

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}_{ij}, b_{ij}, \xi_k^{ij}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{w}_{ij}\|^2 + C_{ij} \sum_{k=1}^{m_i+m_j} \xi_k^{ij} \\ \text{s. t.} \quad & y_k^{ij} (\mathbf{w}_{ij}^\top \mathbf{x}_k^{ij} + b_{ij}) \geq 1 - \xi_k^{ij}, \xi_k^{ij} \geq 0, k = 1, 2, \dots, m_i + m_j, \end{aligned} \quad (3)$$

来寻找分类决策函数 $f_{ij}(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}_{ij}^*)^\top \mathbf{x} + b_{ij}^*$, 然后通过投票法确定样本的类标签, 即样本归属得票最多的一类. OVO-MSVM 需要寻找 $K(K-1)/2$ 个决策函数. 通过求解模型(3)的 Wolfe 对偶形式

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_{ij}} \quad & \frac{1}{2} \alpha_{ij}^\top \mathbf{G} \alpha_{ij} - \mathbf{e}_{m_i+m_j}^\top \alpha_{ij} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{y}_{ij}^\top \alpha_{ij} = 0, 0 \leq \alpha_{ij} \leq C_{ij} \mathbf{e}_{m_i+m_j}, \end{aligned} \quad (4)$$

可得决策函数 $f_{ij}(\mathbf{x})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_{ij} \in \mathbf{R}_+^{m_i+m_j}$ 是 Lagrange 乘子向量且

$$\mathbf{G} = \mathbf{D}_{ij} \mathbf{X}_{ij}^T \mathbf{X}_{ij} \mathbf{D}_{ij}, \mathbf{X}_{ij} = \mathbf{X}_i \cup \mathbf{X}_j, \mathbf{D}_{ij} = \text{diag}(y_{i1}^j, \dots, y_{m_i+m_j}^j), \mathbf{y}_{ij} = (y_{i1}^j, \dots, y_{m_i+m_j}^j)^T.$$

下面给出具体算法.

算法 2 (OVO-MSVM)

步 1 给定 K 类数据集 $\mathbf{T} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m \in \mathbf{R}^d \times \{1, 2, \dots, K\}$, 选择适当的模型参数 $C_{ij} > 0$.

步 2 求解模型(4), 得最优解 $\boldsymbol{\alpha}_{ij}^* \in \mathbf{R}_+^{m_i+m_j}$.

步 3 计算 $\mathbf{w}_{ij}^* = \mathbf{X}_{ij} \mathbf{D}_{ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij}^*$.

步 4 找 $\boldsymbol{\alpha}_{ij}^*$ 的一个正分量 $0 < \alpha_{ijq}^* < C_{ij}$, 计算 $b_{ij}^* = y_{ijq} - \langle \mathbf{w}_{ij}^*, \mathbf{x}_{ijq} \rangle$.

步 5 构造分类决策函数 $f_{ij}(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}_{ij}^*)^T \mathbf{x} + b_{ij}^*$.

步 6 对任一输入样本 $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^d$, 若 $f_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}) \geq 0$, 则给第 i 类投一票; 否则, 给第 j 类投一票. 根据各类累计得票的多少来确定 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的类标识, 即 $\tilde{\mathbf{x}}$ 属于累计得票最多的一类.

1.3 类间、类内及总体散阵

对 $K(K \geq 2)$ 类数据集 $\mathbf{T} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m \in \mathbf{R}^d \times \{1, \dots, K\}$ (第 K 类的样本个数为 m_K 且 $m_1 + \dots + m_K = m$), 记 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m] \in \mathbf{R}^{d \times m}$, $\mathbf{X}_K = [\mathbf{x}_1^{(K)}, \dots, \mathbf{x}_{m_K}^{(K)}] \in \mathbf{R}^{d \times m_K}$, $\mathbf{c} = m^{-1} \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^d$,

$$\mathbf{c}_i = m_i^{-1} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d, \mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^m, \mathbf{e}_i = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^{m_i}, i = 1, 2, \dots, K,$$

并称 \mathbf{c} 和 \mathbf{c}_i 分别为总体均值和类均值. 令

$$\mathbf{S}_b = \sum_{i=1}^K m_i (\mathbf{c}_i - \mathbf{c})(\mathbf{c}_i - \mathbf{c})^T, \mathbf{S}_w = \sum_{i=1}^K \sum_{\mathbf{x} \in X_i} (\mathbf{x} - \mathbf{c}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i)^T, \mathbf{S}_t = \sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_i - \mathbf{c})(\mathbf{x}_i - \mathbf{c})^T,$$

显然 $\mathbf{S}_b, \mathbf{S}_w, \mathbf{S}_t$ 均为对称非负定阵. 称 $\mathbf{S}_b, \mathbf{S}_w, \mathbf{S}_t$ 分别为类间散阵 (between-class scatter matrix)、类内散阵 (within-class scatter matrix) 和总体散阵 (total scatter matrix).

2 基于 PDEs 的图像降噪方法

本节简要回顾基于 PDEs 的图像降噪方法, 详细推导见文献[11,12]. 考虑 K 类噪声(光暗、有遮挡)图像集 $\{(\mathbf{I}_m, \mathbf{h}_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2} \times \mathbf{R}^K$, 其中 \mathbf{I}_m 是原始输入图像, \mathbf{h}_m 是 \mathbf{I}_m 对应的标签向量. 若 \mathbf{I}_m 属第 i 类, 则第 i 个分量 $h_{mi} = 1$; 否则 $h_{mi} = 0$. 记 $\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_M] \in \mathbf{R}^{K \times M}$, 则基于 PDEs 的图像降噪模型为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{W}, \{a_i(t)\}} M^{-1} \|\mathbf{H} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{U}\|_{t=T}^2 + \lambda \|\mathbf{W}\|_{\mathbb{F}}^2 \\ & \text{s. t. } \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} = \sum_{i=0}^5 a_i(t) g(\text{inv}_i(\mathbf{u}_m(t))), (x, y, t) \in \mathcal{Q} \\ & \mathbf{u}_m(x, y, t) = 0, (x, y, t) \in \mathbf{I}, \\ & \mathbf{u}_m|_{t=0}(x, y, t) = \mathbf{I}_m, (x, y) \in \mathbf{\Omega}, m = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $t \in [0, T]$ 表示时间变量, $\mathbf{\Omega}$ 是 \mathbf{R}^2 上的一个开区间, $\partial \mathbf{\Omega}$ 是 $\mathbf{\Omega}$ 的边界, $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{K \times d_1 \times d_2}$ 表示权矩阵, $\mathcal{Q} = \mathbf{\Omega} \times [0, T]$, $\mathbf{I} = \partial \mathbf{\Omega} \times [0, T]$, $\mathbf{U}|_{t=T} = [\text{vec}(\mathbf{u}_1|_{t=T}), \dots, \text{vec}(\mathbf{u}_M|_{t=T})] \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2 \times M}$, $\mathbf{u}|_{t=T}$ 表示 $t = T$ 时的特征矩阵, $\text{vec}(\mathbf{u})$ 表示矩阵 \mathbf{u} 的向量化, $\lambda > 0$ 是调节参数, $g(x)$ 为非线性压缩映射, $(x, y) \in \mathbf{\Omega}$ 为空间变量, $\text{inv}(\mathbf{u})$ 表示基本微分不变量且 $\{\text{inv}_i(\mathbf{u}_m(x, y, t))\}_{i=0}^5$

表 1 直至 2 阶的基本微分不变量

阶数 i	基本微分不变量 $\text{inv}_i(\mathbf{u})$
0, 1, 2	$1, \mathbf{u}, \ \nabla \mathbf{u}\ ^2 = \mathbf{u}_x^2 + \mathbf{u}_y^2$
3	$\text{tr}(\mathbf{H}_u) = \mathbf{u}_{xx} + \mathbf{u}_{yy}$
4	$(\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{H}_u \nabla \mathbf{u} = \mathbf{u}_{xx}^2 + 2\mathbf{u}_x \mathbf{u}_y \mathbf{u}_{xy} + \mathbf{u}_{yy}^2$
5	$\text{tr}(\mathbf{H}_u^2) = \mathbf{u}_{xx}^2 + 2\mathbf{u}_{xy}^2 + \mathbf{u}_{yy}^2$

是直到二阶的基本微分不变量(见表 1, 其中 \mathbf{u} 表示进化后的特征矩阵, $\nabla \mathbf{u}$ 表示矩阵 \mathbf{u} 的梯度, \mathbf{H}_u 表示 \mathbf{u} 的 Hessian 阵, $\text{tr}(\mathbf{H}_u)$ 表示矩阵 \mathbf{H}_u 的迹, \mathbf{u}_x 表示 \mathbf{u} 对矩阵 \mathbf{x} 求偏导), 控制系数 $a_i(t)$ 与空间变量无关, 其保证了图像的平移和旋转不变性.

为了求解模型(5), 需先求解约束中的 PDEs, 为此离散化时间变量 $t_i = i \cdot \Delta t, i = 0, 1, \dots, N$, 并用前向差分离散时间偏导数, 用中心差分离散空间偏导数, 将 PDEs 转化为下面的迭代公式(具体推导见文献[11])

$$\mathbf{u}_m^0 = \mathbf{I}_m, \mathbf{u}_m^{n+1} = \mathbf{u}_m^n + \Delta t \sum_{i=0}^5 a_i^n g(\text{inv}_i(\mathbf{u}_m^n)) \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2}, n = 0, 1, \dots, N-1, m = 1, 2, \dots, M, \quad (6)$$

其中 $\mathbf{u}_m^n = \mathbf{u}(x, y, t_n)$, $a_i^n = a_i(t_n)$. 将(6)式带入模型(5)中可得如下图像降噪模型

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}, \{a_i^n(t)\}} \mathbf{E}(\mathbf{W}, \mathbf{A}) &= M^{-1} \|\mathbf{H} - \mathbf{W}\mathbf{u}^N\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{W}\|_F^2 \\ \text{s. t. } \mathbf{u}_m^0 &= \mathbf{I}_m, \mathbf{u}_m^{n+1} = \mathbf{u}_m^n + \Delta t \sum_{i=0}^5 a_i^n g(\text{inv}_i(\mathbf{u}_m^n)) \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2}, \\ n &= 0, 1, \dots, N-1, m = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{A} = [a_i^n]_{N \times 6}$, $\mathbf{U}^N = [\text{vec}(\mathbf{u}_1^N), \dots, \text{vec}(\mathbf{u}_M^N)] \in \mathbf{R}^{d_1 d_2 \times M}$. 从公式(6)和模型(7)中可以看出, 图像分类的准确性严重依赖于 N 次进化后的图像特征矩阵 $\mathbf{u}_1^N, \dots, \mathbf{u}_M^N$, 而这些特征矩阵又依赖于参数矩阵 \mathbf{A} . 利用梯度下降法, 可得参数矩阵 \mathbf{A} 的进化迭代公式

$$(a_i^{n+1})^{k+1} = (a_i^n)^k - \eta (\partial E / \partial a_i^n)^k, i = 0, 1, \dots, 5, n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (8)$$

其中 $\eta > 0$ 是搜索步长.

3 基于 PDEs 的四种降噪降维方法

对高维图像来说, 如果不降维, 可能会导致分类器学习时间过长甚至失效; 如果维度降得过低, 往往会导致分类精度的损失. 为了在降噪降维的同时还能保持良好的分类精度, 本节提出了基于 PDEs 的 PCA (PCA \ PDEs)、基于 PDEs 的 LDA (LDA \ PDEs)、基于 PDEs 的 CCA (CCA \ PDEs) 以及基于 PDEs 的 SCCA (SCCA \ PDEs) 四种图像降噪降维方法.

本节考虑 $K (K \geq 2)$ 类高维噪声(光暗、有遮挡)图像集 $\{(\mathbf{I}_m, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2} \times \{1, 2, \dots, K\}$, 并设 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_l \in \mathbf{R}^{d_1 d_2}$ 是降维子空间 \mathbf{R}^l 的一组基. 记 $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_l] \in \mathbf{R}^{d_1 d_2 \times l}$, 并称为降维变换阵.

3.1 PCA \ PDEs

PCA/PDEs 的基本思想是

首先, 利用 PDEs 的进化对原始图像 $\mathbf{I}_m \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2}$ 进行降噪处理, 得到特征矩阵 $\mathbf{u}_m \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2}$.

其次, 对特征向量集 $\{\text{vec}(\mathbf{u}_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 d_2}$, 利用 PCA 进行降维处理, 得 $\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^l$; 其中 $l < d_1 d_2$.

再次, 选择分类器对向量集 $\{(\mathbf{x}_m, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^l \times \{1, 2, \dots, K\}$ 进行分类.

最后, 调整 PDEs 的进化次数, 得最佳分类精度.

PCA \ PDEs 的基本思想可直观地表述为

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{I}_m & \xrightarrow{\text{PDEs 降噪}} & \mathbf{u}_m & \rightarrow & \text{vec}(\mathbf{u}_m) & \xrightarrow{\text{PCA 降维}} & \mathbf{x}_m \xrightarrow{\text{分类器}} \text{分类} \\ \uparrow & & & & \text{调整进化次数} & & \downarrow \end{array}$$

PCA 的基本思想是在 \mathbf{R}^l 中寻找一组标准正交基, 使得降维后数据间的方差越大越好, 即满足如下准则

$$\max_{\mathbf{G}: \mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{I}_l} \sum_{m=1}^M \|\mathbf{G}^T \mathbf{x}_m - \mathbf{G}^T \mathbf{c}\|^2, \quad (9)$$

其中 \mathbf{c} 为样本均值. 由于

$$\sum_{m=1}^M \|\mathbf{G}^T \mathbf{x}_m - \mathbf{G}^T \mathbf{c}\|^2 = \sum_{m=1}^M \text{Tr}[(\mathbf{G}^T \mathbf{x}_m - \mathbf{G}^T \mathbf{c})(\mathbf{G}^T \mathbf{x}_m - \mathbf{G}^T \mathbf{c})^T] = \text{Tr}(\mathbf{G}^T \mathbf{S}_l \mathbf{G}),$$

所以模型(9)可等价地表示为

$$\max_{\mathbf{G}: \mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{I}_l} \text{Tr}(\mathbf{G}^T \mathbf{S}_l \mathbf{G}). \quad (10)$$

又因为对称非负定阵 $\mathbf{G}^T \mathbf{S}_l \mathbf{G}$ 的迹等于其全部特征值之和, 故可用矩阵的特征值分解求解模型(10), 具体算法如下

算法 3 (PCA \ PDEs)

步 1 对图像集 $\{(\mathbf{I}_m, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2} \times \{1, \dots, K\}$, 利用公式(6)和公式(8)以及文献[12]中的算法 1, 得到特征矩阵集 $\{(\mathbf{u}_m, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2} \times \{1, \dots, K\}$.

步 2 计算特征向量集 $\{(\text{vec}(\mathbf{u}_m), h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 d_2} \times \{1, \dots, K\}$ 的总体散阵 $\mathbf{S}_l \in \mathbf{R}^{d_1 d_2 \times d_1 d_2}$.

步 3 设 $\text{rank}(\mathbf{S}_l) = t \leq d_1 d_2$, 对 \mathbf{S}_l 做 EVD: $\mathbf{S}_l = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \sum_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}^T$, 其中 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_t > 0$ 是 \mathbf{S}_l 的全部非零特征值且 $\sum_t = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_t)$.

步 4 令 $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2]$, 其中 $\mathbf{U}_1 \in \mathbf{R}^{d_1 d_2 \times t}$, $\mathbf{U}_2 \in \mathbf{R}^{d_1 d_2 \times (d_1 d_2 - t)}$, 且 $\mathbf{U}_1^T \mathbf{S}_l \mathbf{U}_1 = \sum_t$.

- 步 5 若累计贡献率满足 $(\lambda_1 + \dots + \lambda_l)/(\lambda_1 + \dots + \lambda_t) \geq 85\%$ ($l \leq t$), 取降维变换阵 $\mathbf{G}^* = \mathbf{U}_1 \in \mathbf{R}^{d_1 d_2 \times l}$.
- 步 6 利用 \mathbf{G}^* , 得低维向量集 $\{(\mathbf{x}_m = (\mathbf{G}^*)^T \text{vec}(\mathbf{u}_m), h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^l \times \{1, 2, \dots, K\}$, 其中 $l < d_1 d_2$.
- 步 7 选择分类器对低维向量集进行分类.
- 步 8 调整 PDEs 的进化次数, 得最佳分类精度.

3.2 LDA\PDEs

LDA\PDEs 的基本思想类似于 PCA\PDEs 的基本思想, 只是在第 2 步中利用 LDA 进行降维处理.

其次, 对特征向量集 $\{\text{vec}(\mathbf{u}_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 d_2}$, 利用 LDA 进行降维处理, 得向量集

$$\{(\mathbf{x}_m, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{K-1} \times \{1, 2, \dots, K\}.$$

不同于 PCA 考虑的是降维后数据间的方差越大越好, LDA 考虑的是降维后的类内样本越凝聚越好, 类间样本越分离越好, 故满足下面的 Fisher 准则

$$\max_{\mathbf{G}} \frac{\text{Tr}(\bar{\mathbf{S}}_b)}{\text{Tr}(\bar{\mathbf{S}}_w)} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{G}^T \mathbf{S}_b \mathbf{G})}{\text{Tr}(\mathbf{G}^T \mathbf{S}_w \mathbf{G})}. \quad (11)$$

由于 $\mathbf{g}_m^T \mathbf{S}_b \mathbf{g}_m \geq 0$, $\mathbf{g}_m^T \mathbf{S}_w \mathbf{g}_m \geq 0$, $m = 1, 2, \dots, l$ 且

$$\text{Tr}(\mathbf{G}^T \mathbf{S}_b \mathbf{G}) = \sum_{m=1}^l \mathbf{g}_m^T \mathbf{S}_b \mathbf{g}_m, \text{Tr}(\mathbf{G}^T \mathbf{S}_w \mathbf{G}) = \sum_{m=1}^l \mathbf{g}_m^T \mathbf{S}_w \mathbf{g}_m,$$

所以准则(11)可表示为

$$\max_{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_l} \frac{\sum_{m=1}^l \mathbf{g}_m^T \mathbf{S}_b \mathbf{g}_m}{\sum_{m=1}^l \mathbf{g}_m^T \mathbf{S}_w \mathbf{g}_m}. \quad (12)$$

可以分两种情况求解准则(12), 一是 $\text{Tr}(\mathbf{G}^T \mathbf{S}_w \mathbf{G}) = 0$ 的情况, 另一是 $\text{Tr}(\mathbf{G}^T \mathbf{S}_w \mathbf{G}) \neq 0$ 的情况, 本文只考虑第一种情况. 下面给出具体算法.

算法 4 (LDA\PDEs)

- 步 1 对图像集 $\{(\mathbf{I}_m, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2} \times \{1, \dots, K\}$, 利用公式(6)和公式(8)以及文献[12]中的算法 1, 得特征矩阵集 $\{(\mathbf{u}_m, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2} \times \{1, \dots, K\}$.
- 步 2 计算特征向量集 $\{(\text{vec}(\mathbf{u}_m), h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 d_2} \times \{1, \dots, K\}$ 的类内散阵 \mathbf{S}_w 和类间散阵 \mathbf{S}_b .
- 步 3 令 $\text{rank}(\mathbf{S}_w) = t \leq \min\{d_1 d_2, K\}$. 对 \mathbf{S}_w 做 EVD: $\mathbf{S}_w = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T$. 其中 $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{d_1 d_2 \times d_1 d_2}$ 是正交矩阵, $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_t)$, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_t > 0$ 是 \mathbf{S}_w 的全部非零特征值.
- 步 4 令 $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2]$, 其中 $\mathbf{U}_1 \in \mathbf{R}^{d_1 d_2 \times t}$, $\mathbf{U}_2 \in \mathbf{R}^{d_1 d_2 \times (d_1 d_2 - t)}$, 则 $\mathbf{U}_1^T \mathbf{S}_w \mathbf{U}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_w$, $\mathbf{U}_2^T \mathbf{S}_w \mathbf{U}_2 = \mathbf{0}$.
- 步 5 令 $\bar{\mathbf{S}}_w = \mathbf{U}_2^T \mathbf{S}_w \mathbf{U}_2 = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{S}}_b = \mathbf{U}_2^T \mathbf{S}_b \mathbf{U}_2$ 且 $\text{rank}(\bar{\mathbf{S}}_b) = l \leq \min\{d_1 d_2 - t, K - 1\}$.
- 步 6 对 $\bar{\mathbf{S}}_b$ 做 EVD: $\bar{\mathbf{S}}_b = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T$, 其中 $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{(d_1 d_2 - t) \times (d_1 d_2 - t)}$ 是正交阵.
- 步 7 令 $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]$, 其中 $\mathbf{V}_1 \in \mathbf{R}^{(d_1 d_2 - t) \times l}$, 则 $\mathbf{V}_1^T \bar{\mathbf{S}}_b \mathbf{V}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_b$, $\mathbf{V}_2^T \bar{\mathbf{S}}_b \mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$.
- 步 8 取降维变换阵 $\mathbf{G}^* = \mathbf{U}_2 \mathbf{V}_1 \in \mathbf{R}^{d_1 d_2 \times l}$.
- 步 9 利用 \mathbf{G}^* , 得低维向量集 $\{(\mathbf{x}_m = (\mathbf{G}^*)^T \text{vec}(\mathbf{u}_m), h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^l \times \{1, 2, \dots, K\}$.
- 步 10 选择分类器对低维向量集进行分类.
- 步 11 调整 PDEs 的进化次数, 得最佳分类精度.

3.3 CCA\PDEs 和 SCCA\PDEs

CCA\PDEs 和 SCCA\PDEs 的基本思想是一样的, 只是在降维环节采取的方法不一致.

首先, 利用 PDEs 的进化对原始图像 $\mathbf{I}_m \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2}$ 进行降噪处理, 得特征矩阵 $\mathbf{u}_m \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2}$.

其次, 将特征矩阵分为左右两部分, 得矩阵集 $\{(\mathbf{u}_{xm}, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_3} \times \{1, 2, \dots, K\}$ 和 $\{(\mathbf{u}_{ym}, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times (d_2 - d_3)} \times \{1, 2, \dots, K\}$, 其中 $d_3 < d_2$.

再次, 对向量集 $\{(\text{vec}(\mathbf{u}_{xm}), h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 d_3} \times \{1, 2, \dots, K\}$ 和 $\{(\text{vec}(\mathbf{u}_{ym}), h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 (d_2 - d_3)} \times \{1, 2, \dots, K\}$, 利用 CCA 或 SCCA 进行降维处理, 得向量集 $\{(\mathbf{x}_m, h_m)\}_{m=1}^M, \{(\mathbf{y}_m, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^l \times \{1, 2, \dots, K\}$, 其

中 $l < \min\{d_1 d_3, d_1(d_2 - d_3)\}$.

第四,融合两个降维向量集,得数据集 $\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{y}_m \end{bmatrix}, h_m \right\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{2l} \times \{1, 2, \dots, K\}$, 选择分类器进行分类.

最后,调整 PDEs 的进化次数,得最佳分类精度.

不同于 PCA 考虑的是降维后数据间的方差越大越好,也不同于 LDA 考虑的是降维后的类内样本越凝聚越好,类间样本越分离越好,CCA 是寻找两个投影方向 $\mathbf{w}_x \in \mathbf{R}^{d_1 d_3}$ 和 $\mathbf{w}_y \in \mathbf{R}^{d_1(d_2 - d_3)}$,使得投影后的数据 $\mathbf{w}_x^T \text{vec}(\mathbf{u}_{xm})$ 和 $\mathbf{w}_y^T \text{vec}(\mathbf{u}_{ym})$ 间具有极大相关性 ρ ,即满足下面的准则

$$\max_{\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y} \rho = \frac{\text{cov}(\mathbf{w}_x^T \text{vec}(\mathbf{u}_{xm}), \mathbf{w}_y^T \text{vec}(\mathbf{u}_{ym}))}{\sqrt{\text{var}(\mathbf{w}_x^T \text{vec}(\mathbf{u}_{xm})) \text{var}(\mathbf{w}_y^T \text{vec}(\mathbf{u}_{ym}))}}, \quad (13)$$

其中 $(\text{vec}(\mathbf{u}_{xm}), \text{vec}(\mathbf{u}_{ym}))$ 表示任一对样本. 记 $\bar{x} \in \mathbf{R}^{d_1 d_3}$ 和 $\bar{y} \in \mathbf{R}^{d_1(d_2 - d_3)}$ 分别是数据集 $\{\text{vec}(\mathbf{u}_{xm})\}_{m=1}^M$ 和 $\{\text{vec}(\mathbf{u}_{ym})\}_{m=1}^M$ 的样本均值,则

$$\begin{cases} \text{cov}(\mathbf{w}_x^T \text{vec}(\mathbf{u}_{xm}), \mathbf{w}_y^T \text{vec}(\mathbf{u}_{ym})) = M^{-1} \mathbf{w}_x^T \left(\sum_{m=1}^M (\text{vec}(\mathbf{u}_{xm}) - \bar{x})(\text{vec}(\mathbf{u}_{ym}) - \bar{y})^T \right) \mathbf{w}_y \\ \quad = M^{-1} \mathbf{w}_x^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{w}_y, \\ \text{var}(\mathbf{w}_x^T \text{vec}(\mathbf{u}_{xm})) = M^{-1} \mathbf{w}_x^T \left(\sum_{m=1}^M (\text{vec}(\mathbf{u}_{xm}) - \bar{x})(\text{vec}(\mathbf{u}_{xm}) - \bar{x})^T \right) \mathbf{w}_x = M^{-1} \mathbf{w}_x^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{w}_x, \\ \text{var}(\mathbf{w}_y^T \text{vec}(\mathbf{u}_{ym})) = M^{-1} \mathbf{w}_y^T \left(\sum_{m=1}^M (\text{vec}(\mathbf{u}_{ym}) - \bar{y})(\text{vec}(\mathbf{u}_{ym}) - \bar{y})^T \right) \mathbf{w}_y = M^{-1} \mathbf{w}_y^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{w}_y. \end{cases}$$

于是,模型(13)可表示为

$$\max_{\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y} \frac{\mathbf{w}_x^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{w}_y}{\sqrt{\mathbf{w}_x^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{w}_x \times \mathbf{w}_y^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{w}_y}}, \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{xy} = \sum_{m=1}^M (\text{vec}(\mathbf{u}_{xm}) - \bar{x})(\text{vec}(\mathbf{u}_{ym}) - \bar{y})^T, \\ \mathbf{C}_{xx} = \sum_{m=1}^M (\text{vec}(\mathbf{u}_{xm}) - \bar{x})(\text{vec}(\mathbf{u}_{xm}) - \bar{x})^T, \\ \mathbf{C}_{yy} = \sum_{m=1}^M (\text{vec}(\mathbf{u}_{ym}) - \bar{y})(\text{vec}(\mathbf{u}_{ym}) - \bar{y})^T, \end{cases} \quad (15)$$

且 $\mathbf{C}_{xy}^T = \mathbf{C}_{yx}$. 由于模型(14)与投影向量 $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ 的范数 $\|\mathbf{w}_x\|, \|\mathbf{w}_y\|$ 无关,所以可等价地表示为

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y} \mathbf{w}_x^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{w}_y \\ \text{s. t. } \mathbf{w}_x^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{w}_x = 1, \mathbf{w}_y^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{w}_y = 1, \end{aligned} \quad (16)$$

考虑模型(16)的 Lagrange 函数并令其关于决策变量的偏导数为 0,可将模型(16)转化为广义特征方程

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_x \\ \mathbf{w}_y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_x \\ \mathbf{w}_y \end{bmatrix}.$$

下面给出求解算法.

算法 5 (CCA\PDEs)

步 1 给定高维噪声(光暗、有遮挡)图像集 $\{(\mathbf{I}_m, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2} \times \{1, 2, \dots, K\}$, 利用迭代公式(6)和(8)及文献[12]中的算法 1,得特征矩阵集 $\{(\mathbf{u}_m, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_2} \times \{1, 2, \dots, K\}$.

步 2 将每个特征矩阵分为左右两部分 $\mathbf{u}_m = [\mathbf{u}_{xm}, \mathbf{u}_{ym}]$,得向量集 $\{(\text{vec}(\mathbf{u}_{xm}), h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 d_3} \times \{1, 2, \dots, K\}$ 和 $\{(\text{vec}(\mathbf{u}_{ym}), h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1(d_2 - d_3)} \times \{1, 2, \dots, K\}$.

步 3 利用(15)式计算矩阵 $\mathbf{C}_{xx}, \mathbf{C}_{yy}, \mathbf{C}_{xy}$.

步 4 为了避免奇异性,置 $\mathbf{C}_{xx} \leftarrow \mathbf{C}_{xx} + t \mathbf{I}_{d_1 d_3}, \mathbf{C}_{yy} \leftarrow \mathbf{C}_{yy} + t \mathbf{I}_{d_1(d_2 - d_3)}$,其中 $t > 0$ 是正则化参数.

步 5 对 \mathbf{C}_{xx} 做特征值分解(EVD): $\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}_x \mathbf{U}^T$,其中 $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{d_1 d_3 \times d_1 d_3}$ 是正交矩阵, $\boldsymbol{\Sigma}_x = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{d_1 d_3})$, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{d_1 d_3} > 0$ 是 \mathbf{C}_{xx} 的全部非零特征值.

步 6 令 $\mathbf{B} = \boldsymbol{\Sigma}_x^{-1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{yy}^{-1/2} \in \mathbf{R}^{d_1 d_3 \times d_1(d_2 - d_3)}$ 且 $\text{rank}(\mathbf{B}) = r_B \leq \min\{d_1 d_3, d_1(d_2 - d_3)\}$.

步 7 对矩阵 \mathbf{B} 做奇异值分解(SVD): $\mathbf{B} = [\mathbf{P}_1 \boldsymbol{\Sigma}_B, 0] \mathbf{Q}^T$,其中 $\mathbf{P}_1 \in \mathbf{R}^{d_1 d_3 \times r_B}$ 是列正交阵, $\boldsymbol{\Sigma}_B =$

$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r_B}), \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{r_B} > 0$ 是 \mathbf{B} 的全部非零奇异值.

步 8 若累计贡献率 $(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_l^2) / (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_{r_B}^2) \geq 85\%$, 则 $l (l \leq r_B)$ 对典型方向 $\{(\mathbf{w}_{xm}, \mathbf{w}_{ym})\}_{m=1}^l$ 可分别取为

$$\mathbf{w}_{xm} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}_x^{-1/2} \mathbf{p}_m, \mathbf{w}_{ym} = \lambda_m^{-1} \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}_x^{-1/2} \mathbf{p}_m, m = 1, 2, \dots, l.$$

步 9 令 $\mathbf{W}_x = [\mathbf{w}_{x1}, \mathbf{w}_{x2}, \dots, \mathbf{w}_{xl}] \in \mathbf{R}^{d_1 d_3}, \mathbf{W}_y = [\mathbf{w}_{y1}, \mathbf{w}_{y2}, \dots, \mathbf{w}_{yl}] \in \mathbf{R}^{d_1(d_2-d_3)}$, 利用 $\mathbf{w}_{xm}, \mathbf{w}_{ym}$ 进行降维, 得低维特征向量集 $\left\{ \left[\begin{array}{c} \mathbf{w}_{xm}^T \text{vec}(\mathbf{u}_{xm}) \\ \mathbf{w}_{ym}^T \text{vec}(\mathbf{u}_{ym}) \end{array} \right], h_m \right\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{2l} \times \{1, 2, \dots, K\}$, 选择适当的分类器对其进行分类.

步 10 调整 PDEs 的进化次数, 得最佳分类精度.

为了得到更好的分类性能, SCCA \ PDEs 在模型(14)的基础上加入了监督信息. 用 $\mathbf{S}_w^x, \mathbf{S}_w^y$ 表示矩阵集 $\{(\mathbf{u}_{xm}, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times d_3} \times \{1, 2, \dots, K\}$ 和 $\{(\mathbf{u}_{ym}, h_m)\}_{m=1}^M \in \mathbf{R}^{d_1 \times (d_2-d_3)} \times \{1, 2, \dots, K\}$ 的类内散阵, 将模型(14)中的 \mathbf{C}_{xx} 和 \mathbf{C}_{yy} 分别用 \mathbf{S}_w^x 和 \mathbf{S}_w^y 替代, 得到下面的模型:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y} & \mathbf{w}_x^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{w}_y \\ \text{s. t. } & \mathbf{w}_x^T \mathbf{S}_w^x \mathbf{w}_x = 1, \mathbf{w}_y^T \mathbf{S}_w^y \mathbf{w}_y = 1. \end{aligned} \quad (17)$$

进而得到如下算法.

算法 6 (SCCA \ PDEs)

步 1-2 同算法 5 中的步 1-2.

步 3 计算矩阵 $\mathbf{S}_w^x, \mathbf{S}_w^y$ 和 \mathbf{C}_{xy} . 为避免奇异性, 置 $\mathbf{S}_w^x \leftarrow \mathbf{S}_w^x + t \mathbf{I}_{d_1 d_3}, \mathbf{S}_w^y \leftarrow \mathbf{S}_w^y + t \mathbf{I}_{d_1(d_2-d_3)}$, 其中 $t > 0$ 是正则化参数.

步 4 对 \mathbf{S}_w^x 做 EVD: $\mathbf{S}_w^x = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}_x \mathbf{U}^T$, 其中 $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{d_1 d_3 \times d_1 d_3}$ 是正交矩阵, $\boldsymbol{\Sigma}_x = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{d_1 d_3}), \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{d_1 d_3} > 0$ 是 \mathbf{S}_w^x 的全部非零特征值.

步 5 令 $\mathbf{B} = \boldsymbol{\Sigma}_x^{-1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_{xy} (\mathbf{S}_w^y)^{-1/2} \in \mathbf{R}^{d_1 d_3 \times d_1(d_2-d_3)}$ 且 $\text{rank}(\mathbf{B}) = r_B \leq \min\{d_1 d_3, d_1(d_2-d_3)\}$.

步 6-9 同算法 5 中的步 7-10.

4 PDEs 的进化对四种算法的影响

本节针对 $K (K \geq 2)$ 类高维噪声(光暗、有遮挡)图像集, 以分类精度为标准, 通过实验研究 PDEs 的进化对四种算法的影响. 对二类图像集, 选用 SVM 作为分类器; 对多类图像集(以三类图像集为例), 选用 OVO-MSVM 作为分类器. 分类器均采用五折交叉验证法. 借助文献[13, 14]的研究成果, PDEs 的进化不超过 10 次. 所有试验都在 Extended Yale B 人脸数据集和 Palm-print 掌纹数据集上进行, 且分类器的模型参数通过网格搜索选择. 为了直观验证 PDEs 的进化作用, 选取了 Extended Yale B 人脸数据集中前 5 个人的第 1 张照片经过 PDEs 进化 1-10 后的图像(见图 5).

4.1 数据集的选取

Extended Yale B 人脸数据集包含 38 个人分别在 $12^\circ, 25^\circ, 50^\circ, 77^\circ, 90^\circ$ 的不同光照角度下的 2414 张面部图像, 每张尺寸为 48×42 , 向量化后的维度是 2016 维. 随机选取 10 人(从左至右依次编号为 1 至 10, 见图 1), 每人前 30 张面部图像组成 5 个二类图像集以及随机选取 15 人(从左至右依次编号为 1 至 15, 见图 2), 每人前 30 张面部图像组成 5 个三类图像集进行实验



图 1 Extended Yale B 数据集中的 5 个二类图像集



图 2 Extended Yale B 数据集中的 5 个三类图像集

Palm-print 掌纹数据集包含 400 个人的 8000 个掌纹,每人 20 个,前 10 个和后 10 个分别在不同时间获取,每个掌纹尺寸为 n ,向量化后的维度是 1024 维.随机选取 10 人(从左至右依次编号为 1 至 10,见图 3)组成 5 个二类掌纹集以及随机选取 15 人(从左至右依次编号为 1 至 15,见图 4)组成 5 个三类掌纹集进行实验

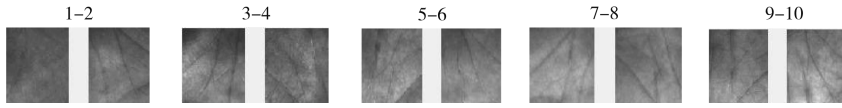


图 3 Palm-print 数据集中的 5 个二类图像集

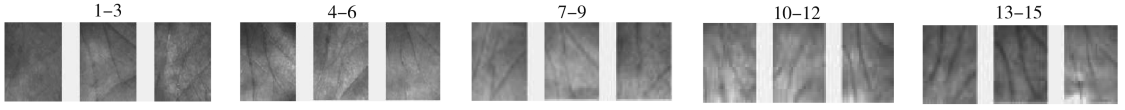


图 4 Palm-print 数据集中的 5 个三类图像集



图 5 Extended Yale B 数据集中的前 5 个人第 1 张照片经 PDEs 进化 10 次的效果图

4.2 累计贡献率的选取

本节只考虑 PDEs 的进化对四种算法的影响,不考虑压缩函数的影响,故取 $g(x) = x$. 利用 LDA 降维后的数据维度只与数据类数有关,而利用 PCA、CCA 或 SCCA 降维后的数据维度均与累计贡献率的选择有关.累计贡献率的大小不仅决定着降维子空间的维度,而且还影响着图像的分类精度,一般常选为 100%,但这样一来很多时候起不到降维的作用.本节以 85%,90%,95%,100% 四个累计贡献率为例,通过一系列实验发现,当累计贡献率为 95% 时,无论是对二类还是多类问题,降维后数据的分类精度都没有太大的损失,且在此贡献率下维度下降最快.为此,在下面的实验中累计贡献率均取为 95%.

4.3 PDEs 的进化对四种降噪降维算法的影响

在下面所有实验中(见表 2 至表 17),每个表的第二列表示只是利用 PCA、LDA、CCA 或 SCCA 降维后的图像分类结果,第三至第十二列表示利用 PCA\PDEs、LDA\PDEs、CCA\PDEs 或 SCCA\PDEs 进行降噪降维后的分类结果, n 表示 PDEs 的进化次数.

4.3.1 PDEs 的进化对 PCA\PDEs 的影响.表 2 和表 3 是 10 个二类图像集上的实验结果,表 4 和表 5 是 10 个三类图像集上的实验结果.对 Extended Yale B 中的 10 个图像集(5 个二类,5 个三类,下同),利用 PCA 可从 2016 维降到 2-10 维(不同的图像集略有不同,下同).对 Palm-print 中的 10 个图像集,利用 PCA 可从 1024 维降到 2-15 维.

表 2 Extended Yale B 中 5 个二类图像数据集上的实验结果(C=10)

数据集	PCA	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
1-2	0.8667	0.9000	0.9333	0.9500	0.9667	0.9667	0.9500	0.9000	0.9000	0.9167	0.9167
3-4	0.8167	0.8333	0.8833	0.7667	0.8500	0.9167	0.9500	0.9500	0.9333	0.9167	0.6333
5-6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7-8	0.9167	0.9333	0.8833	0.8500	0.8333	0.9000	0.9000	0.8667	0.8667	0.9167	0.4167
9-10	0.7333	0.8500	0.9500	0.8833	0.9000	0.9500	0.9333	0.9167	0.8833	0.9167	0.8500

表 3 Palm-print 中 5 个二类图像数据集上的实验结果 ($C=0.01$)

数据集	PCA	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1-2	0.7500	0.7250	0.7750	0.7750	0.8000	0.8000	0.8750	0.9750	1.0000	1.0000	1.0000
3-4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5-6	0.6500	0.7500	0.6500	0.7000	0.7500	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9750	0.9750
7-8	0.7000	0.9750	0.9750	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9-10	0.5500	0.6000	0.6000	0.7000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9250	0.9250

表 4 Extended Yale B 中 5 个三类图像数据集上的实验结果 ($C=0.1$)

数据集	PCA	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1-3	0.6667	0.7778	0.8889	0.8333	0.8889	0.7778	0.8333	0.8889	0.8889	0.8333	0.5000
4-6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9444	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9444
7-9	0.9444	1.0000	1.0000	0.9444	0.9444	0.9444	0.9444	0.8889	0.8889	0.8889	0.3889
10-12	0.9444	0.9444	1.0000	1.0000	1.0000	0.9444	1.0000	0.9444	0.9444	0.8889	0.4444
13-15	0.7778	0.7778	0.8889	0.8889	0.8889	0.9444	0.9444	0.9444	0.8333	0.8333	0.3333

表 5 Palm-print 中 5 个三类图像数据集上的实验结果 ($C=0.01$)

数据集	PCA	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1-3	1.0000	0.9167	0.9167	0.9167	0.9167	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4-6	0.3333	0.6667	0.6667	0.6667	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7-9	0.6667	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10-12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9167
13-15	0.6667	0.6667	0.6667	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.6667

从表 2-表 5 中可以看出,利用 PCA\PDEs 进行降噪降维,最多经过 2 次 PDEs 进化,其降噪降维后的分类精度明显高于只利用 PCA 降维后的分类精度.对 Palm-print 图像集,最多经过 8 次 PDEs 进化,精度可达 100%;对 Extended Yale B 图像集,最多经过 6 次 PDEs 进化,精度可达 93%以上(除一种情况外).

4.3.2 PDEs 的进化对 LDA\PDEs 的影响.表 6 和表 7 是在二类图像集上的实验结果,表 8 和表 9 是在三类图像集上的实验结果.不同于 PCA、CCA 和 SCCA,LDA 降维后的维度是类数-1,即对二类图像集,LDA 降至 1 维,对三类图像集,LDA 降至 2 维.

表 6 Extended Yale B 中 5 个二类图像数据集上的实验结果 ($C=1$)

数据集	LDA	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1-2	0.8833	0.8833	0.8167	0.9167	0.9167	0.9333	0.9333	0.9500	0.9500	0.9833	0.9833
3-4	0.7000	0.7167	0.7000	0.7333	0.7667	0.7833	0.6833	0.8333	0.8833	0.8667	0.6000
5-6	0.8500	0.8667	0.8333	0.8667	0.8500	0.8833	0.9000	0.9000	0.9000	0.9000	0.9167
7-8	0.5833	0.6667	0.6833	0.7833	0.8000	0.8833	0.9000	0.9500	0.9833	0.8000	0.5000
9-10	0.7167	0.7167	0.7667	0.8000	0.8167	0.8167	0.8167	0.8500	0.8500	0.9167	0.9667

表 7 Palm-print 中 5 个二类图像数据集上的实验结果 ($C=0.01$)

数据集	LDA	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1-2	0.8000	0.6750	0.7000	0.7250	0.7250	0.7000	0.7000	0.7250	0.7250	0.7250	0.7250
3-4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5-6	0.6250	0.6750	0.5500	0.6000	0.6500	0.5750	0.8000	0.6500	0.9500	0.8750	0.6500
7-8	0.6500	0.9750	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9-10	0.7000	0.7500	0.7500	0.7750	0.8000	0.8500	1.0000	1.0000	0.9500	0.9750	0.6500

表 8 Extended Yale B 中 5 个三类图像数据集上的实验结果 ($C=0.1$)

数据集	LDA	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1-3	0.6111	0.6667	0.6667	0.6111	0.6667	0.7778	0.8333	0.8333	0.8889	0.8889	0.6111
4-6	0.8333	0.7222	0.9444	0.8889	0.9444	1.0000	0.9444	1.0000	1.0000	0.9444	0.7778
7-9	0.7222	0.6667	0.7222	0.8333	0.8333	0.8333	0.8333	0.9444	1.0000	0.9444	0.4444
10-12	0.8889	0.8889	0.7778	0.8333	0.8333	0.8889	0.8889	0.8889	0.9444	0.8889	0.2778
13-15	0.6111	0.6667	0.6111	0.7778	0.7222	0.7778	0.8333	0.8333	0.8333	0.6667	0.3333

表 9 Palm-print 中 5 个三类图像数据集上的实验结果 (C=0.01)

数据集	LDA	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
1-3	0.9167	0.9167	0.9167	0.9167	0.9167	0.9167	0.9167	1.0000	0.9167	0.9167	0.9167
4-6	0.3333	0.6667	0.6667	0.6667	0.6667	0.6667	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7-9	0.6667	1.0000	0.9167	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10-12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9167
13-15	0.6667	0.6667	0.6667	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9167

从表 6-表 9 中可以看出,利用 LDA\PDEs 进行降噪降维,最多经过 5 次 PDEs 进化,其降噪降维后的分类精度明显高于只利用 LDA 降维后的分类精度或保持不变.对 Palm-print 图像集,最多经过 8 次 PDEs 进化即可达到最佳精度,甚至达到 100%;对 Extended Yale B 图像集,最多经过 10 次 PDEs 进化可达到最佳精度.

4.3.3 PDEs 的进化对 CCA\PDEs 的影响.表 10 和表 11 是在二类图像集上的实验结果,表 12 和表 13 是在三类图像集上的实验结果.对 Extended Yale B 图像集,利用 CCA 可从 2016 维降至 72-80 维;对 Palm-print 图像集,可从 1024 维降至 4-24 维.

表 10 Extended Yale B 中 5 个二类图像数据集上的实验结果 (C=0.1)

数据集	CCA	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
1-2	0.5000	0.6667	0.6167	0.5000	0.5833	0.5000	0.6500	0.6000	0.5000	0.5000	0.5500
3-4	0.5833	0.6833	0.5833	0.6000	0.7333	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
5-6	0.5500	0.5333	0.5167	0.5333	0.5000	0.5000	0.5500	0.6000	0.5667	0.6167	0.6000
7-8	0.6000	0.5833	0.5167	0.5667	0.5333	0.5000	0.5000	0.5167	0.5167	0.5000	0.5000
9-10	0.5500	0.5500	0.5167	0.5000	0.5000	0.5333	0.6667	0.6333	0.5000	0.5000	0.5000

表 11 Palm-print 中 5 个二类图像数据集上的实验结果 (C=0.1)

数据集	CCA	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
1-2	0.5000	0.5000	0.6000	0.6000	0.7000	0.7000	0.5000	0.6250	0.5750	0.5750	0.5000
3-4	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.6000	0.6750	0.6000	0.5500	0.5750
5-6	0.5000	0.5250	0.6000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.6000	0.5000	0.5000	0.5000
7-8	0.5000	0.5000	0.5000	0.9000	0.7000	0.8000	0.6000	0.5000	0.6750	0.5750	0.6000
9-10	0.5000	0.6000	0.6000	0.5250	0.6250	0.5000	0.6500	0.6000	0.5000	0.5250	0.5000

表 12 Extended Yale B 中 5 个三类图像数据集上的实验结果 (C=1)

数据集	CCA	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
1-3	0.7778	0.7778	0.7222	0.8333	0.7778	0.7222	0.7222	0.6111	0.5556	0.5000	0.4444
4-6	0.8889	0.9444	0.9444	0.8889	0.7222	0.5000	0.6111	0.6111	0.6111	0.4444	0.2778
7-9	0.7222	0.8333	0.8333	0.8333	0.7778	0.9444	0.8889	0.6667	0.3889	0.3889	0.3333
10-12	0.8333	0.8333	0.7778	0.7778	0.8889	0.7222	0.8333	0.7222	0.6667	0.5556	0.5556
13-15	0.8889	0.7778	0.7778	0.6111	0.6111	0.4444	0.7222	0.5000	0.5000	0.5000	0.4444

表 13 Palm-print 中 5 个三类图像数据集上的实验结果 (C=0.01)

数据集	CCA	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
1-3	0.3333	0.6667	0.5000	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333
4-6	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333
7-9	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.6667	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333
10-12	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333
13-15	0.3333	1.0000	1.0000	0.6667	0.6667	0.3333	0.6667	0.3333	0.3333	0.3333	0.3333

从表 10-表 13 中可以看出,除两种情况精度下降、两种情况精度保持不变外,利用 CCA\PDEs 进行降噪降维,最多经过 7 次 PDEs 进化,其降噪降维后的分类精度明显高于只利用 CCA 降维后的分类精度,最多可提高 66.67% 的精度.

4.3.4 PDEs 的进化对 SCCA\PDEs 的影响. 表 14 和表 15 是在二类图像集上的实验结果, 表 16 和表 17 是在三类图像集上的实验结果. 对 Extended Yale B 图像集, 利用 SCCA 可从 2016 维降到 46-80 维; 对 Palm-print 图像集, 利用 SCCA 可从 1024 维降到 2-4 维.

表 14 Extended Yale B 中 5 个二类图像数据集上的实验结果 ($C=0.01$)

数据集	SCCA	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1-2	0.5000	0.6333	0.5000	0.6833	0.6000	0.9000	1.0000	0.5000	1.0000	1.0000	1.0000
3-4	0.6000	0.7000	0.5500	0.6167	0.8000	0.9833	0.5000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5-6	0.5000	0.6000	0.7000	0.6667	0.5000	0.8667	0.7833	0.7000	0.5000	1.0000	1.0000
7-8	0.6167	0.5000	0.5000	0.5000	0.7667	0.8667	0.5000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9-10	0.6167	0.6000	0.7000	0.8000	0.7000	0.7000	0.9000	0.5000	1.0000	1.0000	1.0000

表 15 Palm-print 中 5 个二类图像数据集上的实验结果 ($C=0.01$)

数据集	SCCA	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1-2	0.5000	0.9250	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3-4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5-6	0.5000	0.5000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7-8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9-10	0.5000	0.8750	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表 16 Extended Yale B 中 5 个三类图像数据集上的实验结果 ($C=0.01$)

数据集	SCCA	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1-3	0.3333	0.6667	0.6111	0.5556	0.6667	0.6667	0.6111	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4-6	0.3333	0.6667	0.6667	0.6667	0.3333	0.9444	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7-9	0.3889	0.6667	0.6667	0.6667	0.8889	0.3333	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10-12	0.3333	0.6667	0.6667	0.6667	0.6667	0.6667	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13-15	0.6667	0.3889	0.9444	0.6667	1.0000	0.8889	0.6667	1.0000	1.0000	1.0000	0.6667

表 17 Palm-print 中 5 个三类图像数据集上的实验结果 ($C=0.01$)

数据集	SCCA	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1-3	1.0000	0.9167	0.9167	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4-6	0.3333	0.3333	0.9167	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7-9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10-12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13-15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

从表 14-表 17 中可以看出, 利用 SCCA\PDEs 进行降噪降维, 对 Palm-print 图像集, 最多经过 3 次 PDEs 进化, 其分类精度可达 100%; 对 Extended Yale B 数据集, 最多经过 9 次(大多数情况下最多经过 7 次) PDEs 进化, 其精度可达 100%. 明显好于只利用 SCCA 降维后的分类精度.

综上所述, 本文提出的四种降噪降维算法明显好于 PCA、LDA、CCA 和 SCCA 四种降维方法, 且通过 PDEs 的进化可以提高降维所带来的低分类精度. 这对处理高维噪声数据的分类任务很有帮助.

5 结论

面对高维噪声图像(光暗、有遮挡)的分类任务, 首先需要考虑的是对图像进行降噪、降维处理. 现有的降噪方法大多不具备降维功能, 同样地, 现有的降维方法也大多不具备降噪功能. 为了能够一体化进行降噪降维, 且还能保持良好的分类精度, 本文提出了 PCA\PDEs、LDA\PDEs、CCA\PDEs 以及 SCCA\PDEs 四种降噪降维算法. 通过在 Extended Yale B 人脸数据集和 Palm-print 掌纹数据集中选取的 20 个(二类和三类)数据集上进行的 80 组实验, 可以看出所提的四种降噪降维算法明显好于 PCA、LDA、CCA 和 SCCA 四种降维方法, 且通过不超过 10 次的 PDEs 进化可明显改善降维所带来的低分类精度. 接下来将在本文的基础上进一步拓展 PDEs 的应用范围, 并将其使用在更为复杂的应用场景中.

参 考 文 献

- [1] Li Y S, Qu J H, Dong W Q, et al. Hyperspectral pansharpening via improved PCA approach and optimal weighted fusion strategy[J]. *Neurocomputing*, 2018, 315: 371-380.
- [2] Wang N F, Lao K Y, Zhang X H, et al. The recognition of grasping force using LDA[J]. *Biomedical Signal Processing and Control*, 2019, 47: 393-400.
- [3] Youness A G, Frank Rudzicz, Hamid A M. Fast incremental LDA feature extraction[J]. *Pattern Recognition*, 2015, 48(6): 1999-2012.
- [4] Hotelling H. Relations between two sets of variates[J]. *Biometrika*, 1936, 28(3/4): 321-377.
- [5] Sun Q S, Liu Z D, Heng P A, Xia D S. A theorem on the generalized canonical projective vectors[J]. *Pattern Recognition*, 2005, 38(3): 449-452.
- [6] 杨静, 高希占. 边界监督多重集典型相关分析[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2019, 32(3): 13-22.
- [7] Lenc L, Kral P. Automatic face recognition system based on the SIFT features[J]. *Computers and Electrical Engineering*, 2015, 46: 256-272.
- [8] Alilou V K, Yaghmaee F. Non-texture image inpainting using histogram of oriented gradients[J]. *Journal of Visual Communication & Image Representation*, 2017, 48: 43-53.
- [9] Bruna J, Mallat S. Invariant scattering convolution networks[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(8): 1872-1886.
- [10] Liu R, Lin Z C, Zhang W, et al. Toward designing intelligent PDEs for computer vision: An optimal control approach[J]. *Image and Vision Computing*, 2013, 31(1): 43-56.
- [11] Liu R S, Zhong G Y, Zhou P, et al. Learning to Diffuse: A new perspective to design PDEs for visual analysis[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2016, 38(12): 2457-2471.
- [12] Fang C, Zhao Z Y, Zhou P, et al. Feature learning via partial differential equation with applications to face recognition[J]. *Pattern Recognition*, 2017, 69: 14-25.
- [13] 江珊珊, 杨静, 范丽亚. 基于 PDEs 的图像特征提取方法[J]. *山东大学学报(工学版)*, 2018, 48(4): 27-35.
- [14] 江珊珊, 范丽亚. PDEs 对 RSVM 中模型参数的影响[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2019, 32(3): 23-35.
- [15] 夏文静, 陈耿, 范丽亚. 八种最小二乘 SVM 型学习算法的优势比较[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2016, 29(2): 33-41.
- [16] 侯明, 张新新, 范丽亚. 四种基于支持向量机的多类分类器的性能比较[J]. *聊城大学学报(自然科学版)*, 2014, 27(3): 54-60.
- [17] Yang Z X, Shao Y H, Zhang X S. Multiple birth support vector machine for multi-class classification[J]. *Neural Comput Appl*, 2013, 22(1): 153-161.
- [18] Hsu C W, Lin C J. A comparison of methods for multi-class support vector machines[J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 2002, 13: 415-425.

Effects of PDEs for Four Noise Reduction and Dimension Reduction Methods of Images

WANG Zhen LEI Tian-tian FAN Li-ya YANG Jing

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract For the classification problems of high-dimensional noisy (dark and covered) images, the classification qualities depend on the selection of noise reduction methods and dimension reduction methods for images. However, the most of noise reduction methods for images have no dimension reduction function, and vice versa. In order to simultaneously noise reduction and dimension reduction with good classification accuracy, this paper presents four noise reduction dimension reduction algorithms based on partial differential equations (PDEs), that is, PCA\PDEs, LDA\PDEs, CCA\PDEs and SCCA\PDEs, and researches the effects of PDEs evolution for them.

Key words partial differential equations; principal component analysis; linear discriminant analysis; canonical correlation analysis; supervision canonical correlation analysis