文章编号　1672-6634(2020)03-0001-05　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2020.03.001

(2+1)维广义柱 Kadomtsev-Petviashvilli 方程的 Painlevé 分析及精确解

唐晓苓　刘汉泽

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘　要　将 Painlevé 分析的 WTC 方法应用到高维变系数方程中,并以(2+1)维广义变系数 KP 方程为例,得到精确解;首先对(2+1)维广义柱 Kadomtsev-Petviashvilli 方程进行 Painlevé 分析,确定 Painlevé 展开式,其次确定共振点,验证共振点,进行相容性分析,最后给出新形式的精确解及其解的图像,在此基础上,再利用 G'/G 展开法,得到该方程新的一般形式的精确解,并讨论特殊情况下该方程的一组特解,扩大解的范围,使方程的解更加完善.

关键词　(2+1)维广义柱 Kadomtsev-Petviashvilli 方程;Painlevé 分析;G'/G 展开法;精确解

中图分类号　O175.2　**文献标识码**　A

0　引言

目前,研究非线性偏微分方程可积性的方法已经有很多种.其中,在 1983 年由 Weiss,Tabor 和 Carnevale(WTC)发展的 Painlevé 分析[1]法是最有效的方法之一,Painlevé 分析法通常被称作 WTC 方法,将 WTC 方法应用到非线性偏微分方程组[2,3]中,不仅可以得到可积和不可积模型的严格解,还可以得到诸如 Painlevé 性质[4],Lax 对,双线性型,Bäcklund 变换[5-8]等性质.在求解常系数非线性发展方程过程中,这种方法用得比较多.而在研究变系数非线性发展方程过程中,这种方法的研究使用比较少见,因此变系数的非线性发展方程在近年来受到越来越多的关注[9-12].

下面研究被数学家和物理学家普遍感兴趣的方程之一(2+1)维广义柱 Kadomtsev- Petviashvilli(KP)方程[13,14]

$$(u_t+6a(t)uu_x+b(t)u_{xxx})_x+c(t)u_x+d(t)u_{yy}=0\text{ ,}\tag{1}$$

其中 $a(t)$,$b(t)$,$c(t)$,$d(t)$ 是关于 t 的光滑函数,这个方程可以化为具有重要物理意义的某些特殊形式的方程,比如:若取 $a(t)=1$,$b(t)=1$,$c(t)=\dfrac{1}{2t}$,$d(t)=0$,则该方程就是著名的圆柱 KdV 方程[15-17]

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}+\frac{1}{2t}u_x=0\text{ ,}\tag{2}$$

如若取 $a(t)=1$,$b(t)=1$,$c(t)=\dfrac{1}{2t}$,$d(t)=\pm\dfrac{3}{t^2}$,则该方程就是著名的圆柱 KP 方程

$$(u_t+6uu_x+u_{xxx})_x+\frac{1}{2t}u_x\pm\frac{3}{t^2}u_{yy}=0\text{ ,}\tag{3}$$

数学物理中有很多模型是通过变系数偏微分方程来描述的,因此用 Painlevé 分析法求它们的精确解具有非常重要的意义.

收稿日期:2019-09-06

基金项目:国家自然科学基金项目(11171041)资助

通信作者:刘汉泽,男,汉族,博士,教授,硕士研究生导师,研究方向:偏微分线性方程,E-mail: hanzeliu@126.com.

1 (2+1)维变系数 Kadomtsev-Petviashvilli 方程的 Painlevé 分析

Painlevé 分析法最初用于常微分方程(组)的解及其研究,是由 Painlevé(法国数学家)及其学派提出的. Painlevé 分析的 WTC 方法就是将 Painlevé 的判别方法推广到非线性偏微分方程的求解中. 具体情况如下,如果用 WTC 方法考虑一个给定的非线性偏微分方程

$$N(u(z_1,z_2,\cdots,z_n))=0\,. \tag{4}$$

设该非线性偏微分方程的解具有如下展开式形式

$$u(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\varphi^{\rho}\sum_{j=1}^{\infty}u_j\varphi^{j}\,, \tag{5}$$

其中 φ 是一个解析函数,ρ 是一个整数,u_j 则通过 Painlevé 展开式代入原方程,比较同次幂,并另其系数等于零,从而求得 $u_j(j=0,1,2,\cdots)$ 的值,寻找共振点,检验相容性条件.

对于(2+1)维广义柱变系数 Kadomtsev-Petviashvilli 方程

$$(u_t+6a(t)uu_x+b(t)u_{xxx})_x+c(t)u_x+d(t)u_{yy}=0\,, \tag{6}$$

其中取 $c(t)=1,d(t)=1$. 则方程变为

$$(u_t+6a(t)uu_x+b(t)u_{xxx})_x+u_x+u_{yy}=0\,. \tag{7}$$

假设方程(7)有如下形式的解

$$u(x,y,t)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j(x,y,t)\varphi^{j-q}(x,y,t)\,, \tag{8}$$

其中 q 是正整数,u_j ,φ 为 x,y,t 的函数形式 $(j=1,2,\cdots)$.

为了确定常数 q ,我们假设

$$u\approx u_0\varphi^{-q}\,. \tag{9}$$

再对 $u\approx u_0\varphi^{-q}$ 中的 x,y,t 求偏导,可以得到

$$u_t=-qv_0\varphi^{-q-1}\varphi_t,u_x=-qu_0\varphi^{-q-1}\varphi_x\,, \tag{10}$$

$$u_{tx}=-q(-q-1)u_0\varphi^{-q-2}\varphi_t\varphi_x,u_{xx}=-q(-q-1)u_0\varphi^{-q-2}\varphi_x^2\,, \tag{11}$$

$$u_{yy}=-q(-q-1)(-q-2)u_0\varphi^{-q-3}\varphi_y^2,u_x^2=-q^2u_0{}^2\varphi^{-2q-2}\varphi_x{}^2\,, \tag{12}$$

$$u_{xxxx}=-q(-q-1)(-q-2)(-q-3)u_0\varphi^{-q-4}\varphi_x^4\,, \tag{13}$$

将(10)-(13)代入方程组(7)可以得到

$$\begin{aligned}-q(-q-1)u_0\varphi^{-q-2}\varphi_t\varphi_x+6q(-q-1)a(t)u_0^2\varphi^{-2q-2}\varphi_x^2-q(-q-1)(-q-2)(-q-3)b(t)u_0\varphi^{-q-4}\varphi_x^4\\+qu_0\varphi^{-q-1}\varphi_x-q(-q-1)(-q-2)u_0\varphi^{-q-3}\varphi_y^2=0.\end{aligned} \tag{14}$$

比较 φ 的最低次幂可以推出

$$q=2\,, \tag{15}$$

将(15)代入(14)可以得到

$$u_o=-5\frac{b(t)}{a(t)}\varphi_x^2\,, \tag{16}$$

将(16)代入(8)和(9)中,可以得到 $u,u_x,u_x^2,u_t,u_{tx},u_{yy},u_{xxxx}$ 的 Painlevé 展开式

$$u=u_o\varphi^{-2}+u_1\varphi^{-1}+u_2+u_3\varphi+\cdots+v_{j-3}\varphi^{j-4}+\cdots+v_j\varphi^{j-2}+\cdots$$

$$\begin{aligned}u_x=\ &u_{0x}\varphi^{-2}+u_{1x}\varphi^{-1}+u_{2x}+u_{3x}\varphi+\cdots+v_{j-3,x}\varphi^{j-4}+\cdots+v_{j,x}\varphi^{j-2}+\cdots\\&+[-2u_0\varphi^{-3}-u_1\varphi^{-2}+u_3+2u_4\varphi+\cdots+(j-2)u_j\varphi^{j-3}+\cdots]\varphi_x\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_t=\ &u_{0t}\varphi^{-2}+u_{1t}\varphi^{-1}+u_{2t}+u_{3t}\varphi+\cdots+v_{j-3,t}\varphi^{j-4}+\cdots+v_{j,t}\varphi^{j-2}+\cdots\\&+[-2u_0\varphi^{-3}-u_1\varphi^{-2}+u_3+2u_4\varphi+\cdots+(j-2)u_j\varphi^{j-3}+\cdots]\varphi_t\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{tx}=\ &u_{0tx}\varphi^{-2}+u_{1tx}\varphi^{-1}+u_{2tx}+u_{3tx}\varphi+\cdots+u_{jtx}\varphi^{j-2}+\cdots\\&+[-2u_{0t}\varphi^{-3}-u_{1t}\varphi^{-2}+\cdots+(j-2)u_{jt}\varphi^{j-3}+\cdots]\varphi_{tx}\,,\end{aligned}$$

$$u_x^2=u_{0x}^2\varphi^4+u_{1x}^2\varphi^1+u_{2x}^2+u_{jx}^2\varphi^{(j-2)^2}+\cdots$$
$$+[-4u_0^2\varphi^9-u_1^2\varphi^4+u_3+\cdots+(j-2)^2u_j^2\varphi^{(j-3)^2}+\cdots]\varphi_x^2,$$
$$u_{yy}=u_{0yy}\varphi^{-2}+u_{1yy}\varphi^{-1}+u_{2yy}+\cdots+u_{jyy}\varphi^{j-2}+\cdots+2[-2u_{0y}\varphi^{-3}+u_{1y}\varphi^{-2}+\cdots+(j-2)u_{jy}\varphi^{j-3}+\cdots]\varphi_x$$
$$+[6u_0\varphi^{-4}2u_1\varphi^{-3}+\cdots+(j-2)(j-3)u_j\varphi^{j-4}+\cdots]\varphi_x^2+[-2u_0\varphi^{-3}+u_1\varphi^{-2}+\cdots+(j-2)u_j\varphi^{j-3}$$
$$+\cdots]\varphi_{xx},$$
$$u_{xxxx}=u_{0xxxx}\varphi^{-2}+u_{1xxxx}\varphi^{-1}+u_{2xxxx}+\cdots+u_{jxxxx}\varphi^{j-2}+\cdots+4[-2u_{0xxx}\varphi^{-3}-u_{1xxx}\varphi^{-2}+\cdots$$
$$+(j-2)u_{jxxx}\varphi^{j-3}+\cdots]\varphi_x+4[6u_{0xx}\varphi^{-4}+2u_{1xx}\varphi^{-3}+\cdots+(j-2)(j-3)u_{jxx}\varphi^{j-4}+\cdots]\varphi_x^2$$
$$+4[-2u_{0xx}\varphi^{-3}+u_{1xx}\varphi^{-2}+\cdots+(j-2)u_{jxx}\varphi^{j-3}+\cdots]\varphi_{xx}+4[-2u_{0x}\varphi^{-3}+u_{1x}\varphi^{-2}+\cdots$$
$$+(j-2)u_{jx}\varphi^{j-3}+\cdots]\varphi_{xxx}+[120u_0\varphi^{-6}-24u_1\varphi^{-5}+\cdots+(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_j\varphi^{j-6}$$
$$+\cdots]\varphi_x^4+4[-24u_0\varphi^{-5}-6u_1\varphi^{-4}+\cdots+(j-2)(j-3)(j-4)u_j\varphi^{j-5}+\cdots]\varphi_x^2\varphi_{xx}+3[6u_{0x}\varphi^{-4}$$
$$+2u_{1x}\varphi^{-3}+\cdots+(j-2)(j-3)u_{jx}\varphi^{j-4}+\cdots]\varphi_{xx}^2+[6u_{0x}\varphi^{-4}+2u_{1x}\varphi^{-3}+\cdots$$
$$+(j-2)(j-3)u_{jx}\varphi^{j-4}+\cdots]\varphi_x\varphi_{xxx}+[-2u_0\varphi^{-3}+u_1\varphi^{-2}+\cdots+(j-2)u_j\varphi^{j-3}+\cdots]\varphi_{xxxx}. \tag{17}$$

为了计算共振点,将(17)代入(7),通过比较 φ 的各次幂系数可以得到

$$\varphi^{-6}:120u_0\varphi_x^4=0, \tag{18}$$
$$\varphi^{-5}:24u_1\varphi_x^4-96u_0\varphi_x^2\varphi_{xx}=0, \tag{19}$$

将(16)式代入(19)式,可以计算出

$$u_1=-20\frac{b(t)}{a(t)}\varphi_{xx}, \tag{20}$$
$$\varphi^{-4}:24u_{0xx}\varphi_x^2+2u_2\varphi_x^4-24u_1\varphi_x^2\varphi_{xx}+6u_{0x}\varphi_x\varphi_{xxx}=0, \tag{21}$$

(16)式和(20)式代入(21)式,可以计算出

$$u_2=\frac{30b(t)\varphi_{xx}\varphi_{xxx}+120b(t)\varphi_x\varphi_{xxx}-240\varphi_x^2\varphi_xa(t)}{\varphi_x^3a(t)}, \tag{22}$$
$$\varphi^{-3}:-8u_{0xxx}\varphi_x+2u_{1xx}\varphi_x^2-8u_{0xx}\varphi_{xx}-8u_{0x}\varphi_{xxx}+u_3\varphi_x^4+4u_2\varphi_x^2\varphi_{xx}+6u_{1x}\varphi_{xx}^2$$
$$-2u_0\varphi_{xxxx}+2u_{1x}\varphi_x\varphi_{xxx}=0, \tag{23}$$

显然, u_3 可以由(16),(20)和(22)求出

$$u_3=\frac{40b(t)\varphi_{xxxx}}{\varphi_x^2}-\frac{80b(t)\varphi_{xxxx}}{\varphi_x^3}-\frac{160b(t)\varphi_{xx}\varphi_{xxx}}{\varphi_x^4}-\frac{40b(t)\varphi_{xxx}}{\varphi_x^3}-120b(t)\varphi_x\varphi_{xx}\varphi_{xxx}$$
$$-480b(t)\varphi_x^2\varphi_{xxx}+960\varphi_{xx}^2\varphi_x^2+120b(t)\varphi_{xx}^2\varphi_x^4\varphi_{xxx}. \tag{24}$$

但是用类似的计算方法却无法求出 u_4, u_5, u_6 原因是

$$\varphi^{j-6}:=[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_{(j-2)t}]\varphi_{tx}+6[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_{(j-3)x}]\varphi_x$$
$$+[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_{(j-3)xxx}]\varphi_x+[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_{(j-2)xx}]\varphi_x^2$$
$$+[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_{(j-3)xx}]\varphi_{xx}+[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_{(j-3)x}]\varphi_{xxx}$$
$$+[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_j]\varphi_x^4+[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_{(j-1)xx}]\varphi_x^2\varphi_{xx}$$
$$+[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_j]\varphi_{xx}^4+a(t)[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)(j-6)u_{(j-3)}]\varphi_x$$
$$+b(t)u_{(j-4)yy}+2b(t)[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)(j-6)u_{(j-3)}]\varphi_y$$
$$+b(t)[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_{(j-2)}]\varphi_y^2-2b(t)[(j-2)(j-3)(j-4)(j-5)u_{(j-3)}]\varphi_{yy}$$
$$=0. \tag{25}$$

在上式中 u_j 的系数可以写成

$$(j+1)(j-4)(j-5)(j-6)u_j=F(u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{j-1},\varphi_x,\varphi_t,\varphi_{tx},\varphi_{yy},\cdots), \tag{26}$$

并且(26)式中的右端只与低于 u_j 的 u_0, u_1, u_2, $\cdots$, u_{j-1} 及 φ_x, φ_t, φ_{tx}, φ_{yy}, $\cdots$ 有关,当 $j=-1,4,5,6$ 时 u_j 的系数为零,因此 $j=-1,4,5,6$ 为方程的(7)的共振点,所以 $j=-1,4,5,6$ 无法求出,其他的 u_j 可以通过(26)式求出.

若取 $u_4=u_5=u_6=0$,则从(26)知 $u_7=u_8=\cdots=0$,此时(8)式是有限项,即

$$u = u_0\varphi^{-2} + u_1\varphi^{-1} + u_2 + u_3\varphi\ , \tag{27}$$

其中 u_0, u_1, u_2, u_3 由(16),(20),(22)和(24)确定.

2 (2+1)维变系数 Kadomtsev-Petviashvilli 方程的精确解及其解图像

通过上述计算可知(2+1)维广义圆柱变系数 Kadomtsev-Petviashvilli 方程的精确解 $u = u_0\varphi^{-2} + u_1\varphi^{-1} + u_2 + u_3\varphi$,其中我们还要确定函 φ,因为 u_0, u_1, u_2, u_3 由(16),(20),(22)和(24)确定,我们假设 φ 可以表示为指数函数形式

$$\varphi = 1 + e^{kx+\eta(y,t)+\int\omega(t)\mathrm{d}t}\ , \tag{28}$$

其中 $\eta(y,t)$ 是关于 y,t 的待定函数,$\omega(t)$ 是关于 t 的待定函数,将 φ 代入(16),(20),(22)和(24)中,可以得到关于 $\eta(y,t)$ 的一个特解

$$\eta(y,t) = f_1(t)y + f_2(t)\ , \tag{29}$$

其中 $f_1(t), f_2(t)$ 都是关于 t 的函数.

将(29)代入(28)可以得到

$$\varphi = 1 + e^{kx+f_1(t)y+f_2(t)+\int\omega(t)\mathrm{d}t}\ . \tag{30}$$

再将(29)和(30)式代入(24)式中,可以得到

$$\omega(t) = \frac{72a(t)e^{(f_1(t)+f_2(t))}}{99kb\ (t)^2 + 44k^2}\ . \tag{31}$$

将(16),(20),(22),(24),(30)和(31)代入 $u = u_0\varphi^{-2} + u_1\varphi^{-1} + u_2 + u_3\varphi$ 中,即得到(7)的精确解

$$u = \frac{\dfrac{a(t)}{b(t)}\ (e^{(kx+f_1(t)y+f_2(t)+\omega(t))})^4 k^3}{6a(t)e^{(kx+f_1(t)y+f_2(t)+\omega(t))}+1} - \frac{k}{2}\left[\frac{b(t)}{a\ (t)^2}\right]\ , \tag{32}$$

其中 $\omega(t)$ 由(31)式决定.上述解是一个新解,还未被其他文献描述过.图 1(a)刻画了最终解的一个结构图,其中 $a(t) = \sin(t), b(t) = \cos(t), f_1(t) = t, f_2(t) = t+1, k = 0, \omega(t) = \sin(t)\cos(t)$.

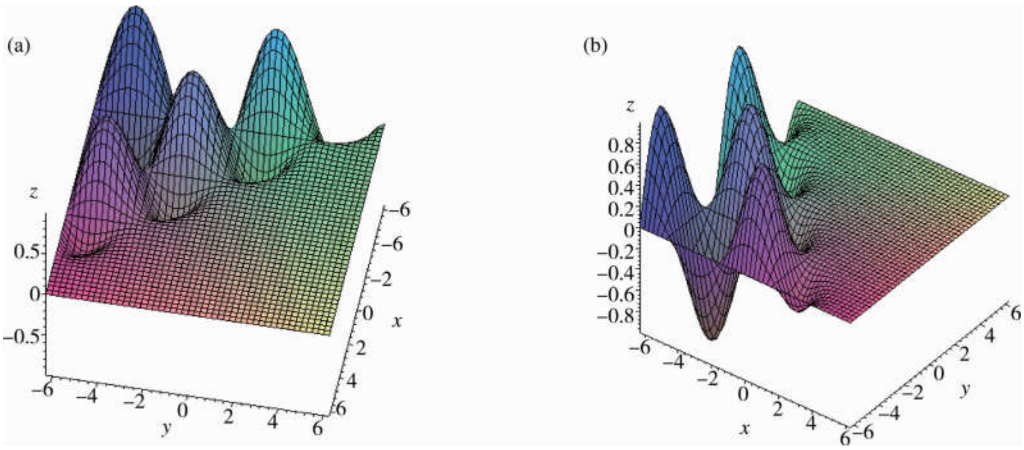

图 1 解(32)的空间结构图

$f_1(t), f_2(t)$ 为光滑函数,在这一部分当中,我们用 Maple 将(16),(20),(22),(24),(30),(31)和(32)代入 $u = u_0\varphi^{-2} + u_1\varphi^{-1} + u_2 + u_3\varphi$ 中,方程(7)成立,其解满足方程.

3 总结

首先,这篇文章对(2+1)维变系数 Kadomtsev-Petviashvilli 方程进行了 Painlevé 分析,其次,用 Painlevé 分析的 WTC 方法得到了(2+1)维广义柱 Kadomtsev-Petviashvilli 方程新的精确解,并用 Maple 对其解的正确性进行了验证,其中 $f_1(t), f_2(t)$ 为光滑函数,这会使得到的空间结构图更加丰富,若取不同的参数值,便会得到不同的图形.

参　考　文　献

[1] Wess J，Tabor M，Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. Journal of Mathematical Physics，1983，24(3)：522-527.

[2] 陈美同. Painlevé 方法构造非线性偏微分方程的精确解[D]. 锦州：渤海大学，2015.

[3] 庞晶，靳玲花.(2＋1)维广义圆柱 Kadomtsev-Petviashvilli 方程精确解[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版)，2011，30(3)：168-174.

[4] 蒋燕.(2＋1)维变系数 Kadomtsev-Petviashvilli 方程新的精确解[J]. 南昌大学学报(理科版)，2015，39(5)：423-425＋431.

[5] 刘汉泽. 基于李对称分析的偏微分方程精确解的研究[D]. 昆明：昆明理工大学，2009.

[6] 张玉峰. 孤立子方程求解与可积系统[D]. 大连：大连理工大学，2002.

[7] 刘岳峰. 若干非线性可积系统的孤子解、呼吸子解和怪波解[D]. 太原：太原理工大学，2016.

[8] 朱佐农. 若干非线性偏微分方程的 Painlevé 性质和 Bäcklund 变换[J]. 东南大学学报，1994(2)：132-136.

[9] 张纬民. 若干非线性波方程的构造性求解研究[D]. 镇江：江苏大学，2009.

[10] 蔡九鲜. 变系数非线性演化方程孤子解的研究[D]. 北京：北方工业大学，2012.

[11] 王敏. 基于 Hirota 方法的变系数非线性发展方程孤子解的研究[D]. 北京：北方工业大学，2013.

[12] 牛晓星. 三个耦合系统的达布变换和贝克隆变换及非线性叠加公式[D]. 北京：中国矿业大学，2017.

[13] 范恩贵. 齐次平衡法、Weiss-Tabor-Carnevale 法及 Clarkson-Kruskal 约化法之间的联系[J]. 物理学报，2000(8)：1409-1412.

[14] 袁萍，邓崑平. Newell 方程的 Backl ¨und 变换和新精确解[J]. 吉首大学学报(自然科学版)，2017，38(2)：1-3＋41.

[15] 张国栋，秦青锋. 齐次平衡法在微分方程中的应用[J]. 中国新技术新产品，2012(21)：243-244.

[16] 王岗伟，刘希强，张颖元. 变系数 mKdV 方程的精确解[J]. 井冈山大学学报(自然科学版)，2012，33(5)：1-5.

[17] 牛艳霞，李二强，张金良. 利用 G'/G-展开法求解 2＋1 维破裂孤子方程组[J]. 河南科技大学学报(自然科学版)，2008，29(5)：73-76.

Painlevé Analysis and Exact Solutions to the (2＋1)-Dimensional Kadomtsev-Petviashvilli Equations

TANG Xiao-ling　LIU Han-ze

(School of Mathematical Sciences，Liaocheng University，Liaocheng 252059，China)

Abstract　This article with Painlevé analysis of the WTC method is first applied to the high dimensional equation with variable coefficients，and the (2＋1) dimensional Kadomtsev-Petviashvilli equation as an example，For the (2＋1) dimensional generalized column Kadomtsev-Petviashvilli equation Painlevé analysis，determine the Painlevé expansion，determine the resonance point，verify the resonance point，Secondly compatibility analysis，get the equation of Painlevé properties，And give a picture of the exact solution of the new form and its solution，On this basis，the G'/G-expansion method is used to obtain the accurate solution of the new general form of the equation，and to discuss a group of special solutions of the equation in special cases to expand the range of solutions and improve the solution of the equation.

Key words　(2＋1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvilli equations；Painlevé analysis；G'/G-expansion method；the exact solution