文章编号　1672-6634(2020)02-0011-07　　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2020.02.003

广义变系数 Kawachara 方程的等价变换、精确解和守恒律

常丽娜　刘汉泽

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘　要　利用改进的 CK 方法将广义变系数 Kawachara 方程约化为常系数 Kawachara 方程,得到等价变换.应用李群分析求出了该方程的李对称和约化方程,并对约化方程求其精确解,进而得到了变系数 Kawachara 方程的精确解.最后给出了该方程的守恒律.

关键词　广义变系数 Kawachara 方程;等价变换;对称约化;精确解;守恒律

中图分类号　O175.2　　**文献标识码**　A

0　引言

众所周知,许多类似水波、神经脉冲、光孤子和优势基因的传播等物理、生物现象都需要非线性偏微分方程(NLPDEs)来描述,其中变系数偏微分方程比常系数偏微分方程更具有广泛的应用,因此求解变系数方程的精确解无论在理论上还是应用上都具有更重要的意义.经过专家们几十年的不断研究,已经有大量的文章给出了具体有效的方法求非线性微分方程的精确解,例如,G'/G 展开法[1-3]、Riccati 方程法[4]、Jocobi 椭圆函数展开法[5]、$\exp(-\Phi(\xi))$ 扩展方法[6-9]、广义的 tanh 展开法[10]、齐次平衡法[11-13]、经典李群方法[14,15]、反散射法[16]和 CK 直接约化方法[17-20]等.

本文我们将研究以下广义变系数 Kawachara 方程

$$u_t + uu_x + \alpha(t)u + \beta(t)u_{xxx} + \gamma(t)u_{xxxxx} = 0\,, \tag{1}$$

其中 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ 是 t 的函数,$u = u(x,t)$ 为未知函数.

Kawachara 方程是用于描述粘性流体介质中长波的动力学行为的模型,常出现在具有表面张力的潜水波理论及等离子磁声波理论.在文献[21]中作者利用辅助函数法求得修正的 Kawachara 方程的精确解;在文献[22]中作者利用直接代数法求得 Kawachara 方程和修正的 Kawachara 方程的行波解.求解 Kawachara 方程的精确解比较困难,尤其是求解广义变系数 Kawachara 方程(1),所以研究方程(1)的精确解尤其重要.

本文主要由以下几部分组成:在第 1 部分,利用改进的 CK 方法将广义变系数方程(1)约化为常系数方程;在第 2 部分,运用李群方法得到了非线性方程(2)的对称;在第 3 部分,对方程进行约化、求精确解[23,24];在第 4 部分,给出了方程的伴随方程与守恒律[25,26];最后在第 5 部分,对本文做了一个简单的总结.

1　Kawachara 方程的等价变换

首先我们将利用改进的 CK 方法将方程(1)变为常系数方程

$$u_t + uu_x + au + bu_{xxx} + cu_{xxxxx} = 0\,, \tag{2}$$

其中 a,b,c 均为常数.

假设方程(1)有如下形式的解

收稿日期:2019-05-10

基金项目:国家自然科学基金项目(11171041)资助

通讯作者:刘汉泽,男,汉族,博士,教授,研究方向:微分方程理论与应用,E-mail:hnz_liu@aliyun.com.

$$u(x,t)=A(x,t)+BU(X,T)\ , \tag{3}$$

其中 $X=X(x,t)$ ，$T=T(x,t)$ 是待定函数,并且在变换 $\{u,x,t\}\to\{U,X,T\}$ 下要求 $U(X,T)$ 满足方程(2),即

$$U_T+UU_X+aU+bU_{XXX}+cU_{XXXXX}=0\ . \tag{4}$$

将方程(2)-(4)代入方程(1),得到关于 U 及其偏导数的决定方程组

$$\gamma(t)X_x^5-cT_t=0\ , \tag{5}$$

$$\beta(t)X_x^3-bT_t=0\ , \tag{6}$$

$$BX_x-T_t=0\ , \tag{7}$$

$$\cdots$$

$$A_t+AA_x+\alpha(t)A+\beta(t)A_{xxx}+\gamma(t)A_{xxxxx}=0\ . \tag{8}$$

借助 Maple 软件,解决定方程组(5)～(8)

$$X=(C_2x+C_4)\mathrm{e}^{-aT}+C_1x+C_3\ ,\ T=T(t)\ , \tag{9}$$

$$A=\frac{(C_2x+C_4)aT_t\mathrm{e}^{-aT}}{C_1+C_2\mathrm{e}^{-aT}},B=\frac{T_t}{C_1+C_2\mathrm{e}^{-aT}}\ , \tag{10}$$

$$\alpha(t)=\frac{C_1(aT_t^2-T_{tt})-C_2(aT_t^2+T_{tt})\mathrm{e}^{-aT}}{(C_1+C_2\mathrm{e}^{-aT})T_t}\ , \tag{11}$$

$$\beta(t)=\frac{bT_t}{(C_1+C_2\mathrm{e}^{-aT})^3},\gamma(t)=\frac{cT_t}{(C_1+C_2\mathrm{e}^{-aT})^5}\ , \tag{12}$$

其中 $T(t)$ 为 t 的任意光滑函数,C_1 ，C_2 ，C_3 ，C_4 为任意常数.

由方程(2)可以得到方程(1)的解

$$u(x,t)=\frac{(C_2x+C_4)aT_t\mathrm{e}^{-aT}}{C_1+C_2\mathrm{e}^{-aT}}+\frac{T_t}{C_1+C_2\mathrm{e}^{-aT}}U[(C_2x+C_4)\mathrm{e}^{-aT}+C_1x+C_3,T(t)]\ . \tag{13}$$

定理 1 如果 $U=U(X,T)$ 是方程(4)的解,则

$$u(x,t)=A(x,t)+BU(X,T)$$

是方程(1)的解,其中 A ，B ，X ，T 由(9)式和(10)式确定.

2 Kawachara 方程的对称

首先,我们考虑一个单参数李群的无穷小变换

$$x\to x+\varepsilon\xi(x,t,u)\ ,$$

$$t\to t+\varepsilon\tau(x,t,u)\ ,$$

$$u\to u+\varepsilon\eta(x,t,u)\ ,$$

其中 ε 是无穷小参数.上述变换群的向量场可以表示为

$$V=\xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}\ , \tag{14}$$

其中 $\xi(x,t,u)$ ，$\tau(x,t,u)$ ，$\eta(x,t,u)$ 为待定函数.如果向量场(14)是方程(2)的李点对称,则 V 需要满足以下条件

$$\mathrm{Pr}^{(5)}V(\Delta)\mid_{\Delta=0}=0\ , \tag{15}$$

其中 $\mathrm{Pr}^{(5)}V$ 是 V 的五阶延拓.

由(15)得

$$\eta^t+\eta u_x+u\eta^x+a\eta+b\eta^{xxx}+c\eta^{xxxxx}=0\ , \tag{16}$$

其中系数函数为

$$\eta^t=D_t(\eta-\xi u_x-\tau u_t)+\xi u_{tx}+\tau u_{tt}\ , \tag{17}$$

$$\eta^x=D_x(\eta-\xi u_x-\tau u_t)+\xi u_{xx}+\tau u_{xt}\ , \tag{18}$$

$$\eta^{xxx} = D_x^3(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxxx} + \tau u_{xxxt} , \tag{19}$$

$$\eta^{xxxxx} = D_x^5(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxxxxx} + \tau u_{xxxxxt} , \tag{20}$$

其中 D_t ，D_x 为全导算子. 将(17)-(20)式代入(16)式，得到关系 $\xi(x,t,u)$ ，$\tau(x,t,u)$ ，$\eta(x,t,u)$ 的决定方程组，解决定方程组得

$$\xi = r_2 e^{-at} + r_3 , \tau = r_1 , \eta = - r_2 a e^{-at} , \tag{21}$$

其中 $r_i(i = 1,2,3)$ 为任意常数. 同时也得到了方程(1)的相似对称

$$\sigma = (r_2 e^{-at} + r_3) u_x + r_1 u_t - r_2 a e^{-at} , \tag{22}$$

这样就得到了方程(2)的所有向量场

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x} , V_2 = \frac{\partial}{\partial t} , V_3 = e^{-at} \frac{\partial}{\partial x} - a e^{-at} \frac{\partial}{\partial u} . \tag{23}$$

利用 $V_i(i = 1,2,3)$ 得到方程(2)的单参数群 $g_i(i = 1,2,3)$ 为

$$g_1:(x + \varepsilon, t, u) , g_2:(x, t + \varepsilon, u) , g_3:(x + e^{-at}\varepsilon, t, u - a e^{-at}\varepsilon) , \tag{24}$$

其中 ε 是参数.

定理 2　如果 $u = f(x,t)$ 是方程(2)的解，则函数也是

$$\begin{gathered} g_1(\varepsilon) \cdot f(x,t) = f(x - \varepsilon, t) , \\ g_2(\varepsilon) \cdot f(x,t) = f(x, t - \varepsilon) , \\ g_3(\varepsilon) \cdot f(x,t) = f(x - e^{-at}\varepsilon, t) - a e^{-at}\varepsilon . \end{gathered} \tag{25}$$

3　Kawachara 方程的约化方程和精确解

在这一节中，我们将利用上文求得的对称对方程(2)进行约化，并且应用定理 1 来寻找方程的精确解.

情况 1　$r_1 = 0, r_2 = 0, r_3 \neq 0$ 时，则 $\sigma = r_3 u_x$ ，可以得到下面的相似变换

$$\xi = t ,$$

方程(1)的群不变解为 $u = u(\xi)$ ，代入方程(1)中，得到约化后的常微分方程为

$$f' + af = 0 , \tag{26}$$

从而解得方程(2)的解为

$$u(x,t) = C e^{-aT} , \tag{27}$$

其中 C 为任意常数. 由方程(13)可知方程(1)的解为

$$u = \frac{(C_2 x + C_4) a T_t e^{-aT}}{C_1 + C_2 e^{-aT}} + \frac{T_t}{C_1 + C_2 e^{-aT}} C e^{-at} . \tag{28}$$

情况 2　$V_2 + mV_1$ 时，可以得到下面的相似变换

$$u = f(\xi) , \xi = x - mt , \tag{29}$$

将(29)式代入方程(2)得到

$$- mf' + ff' + af + bf''' + cf^{(5)} = 0 , \tag{30}$$

其中 $f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$. 假设方程(30)有以下形式的解

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n , \tag{31}$$

将级数展开解(31)代入方程(30)，得到

$$\begin{aligned} 120ca_5 &+ c\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)a_{n+5}\xi^n + 6ba_3 \\ &+ b\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}\xi^n + aa_1 + a\sum_{n=1}^{\infty}a_n\xi^n + a_0a_1 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)a_k a_{n-k+1}\Big)\xi^n - ma_1 - m\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\xi^n = 0 . \end{aligned} \tag{32}$$

当 $n=0$ 时得到

$$a_5=\frac{ma_1-a_0a_1-aa_1-6ba_3}{120c}. \tag{33}$$

一般地,当 $n\geqslant 1$ 时得到

$$a_{n+5}=\frac{m(n+1)a_{n+1}-\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)a_ka_{n-k+1}-aa_n-b(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}}{c(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}, \tag{34}$$

其中 $a_i(i=1,2,3,4)$ 为任意常数,所以方程(30)的解可以表示为

$$\begin{aligned}f(\xi)&=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+a_4\xi^4+a_5\xi^5+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+5}\xi^{n+5}\\&=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+a_4\xi^4+\frac{ma_1-a_0a_1-aa_1-6ba_3}{120c}\xi^5\\&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(n+1)a_{n+1}-\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)a_ka_{n-k+1}-aa_n-b(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}}{c(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}\xi^{n+5}.\end{aligned}$$

因此,方程(1)的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{(C_2x+C_4)aT_t\mathrm{e}^{-aT}}{C_1+C_2\mathrm{e}^{-aT}}+\frac{T_t}{C_1+C_2\mathrm{e}^{-aT}}[a_0+a_1(X-mT)+a_2(X-mT)^2\\&\quad+a_3(X-mT)^3+a_4(X-mT)^4+\frac{ma_1-a_0a_1-aa_1-6ba_3}{120c}(X-mT)^5\\&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(n+1)a_{n+1}-\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)a_ka_{n-k+1}-aa_n-b(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}}{c(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}(X-mT)^{n+5}].\end{aligned}$$

情况 3 V_2+V_3 时,可以得到下面的相似变换

$$u=f(\xi)-ax,\ \xi=x-\mathrm{e}^{-at}/a. \tag{35}$$

将其式代入方程(2)中得到

$$cf^{(5)}+f'+bf'''-a\xi f'=0, \tag{36}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$.

同样利用上述的方法可以得到

$$\begin{aligned}&120ca_5+c\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)a_{n+5}\xi^n+6ba_3\\&\quad+b\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}\xi^n-a\sum_{n=1}^{\infty}na_n\xi^n\\&\quad+a_0a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[\sum_{k=0}^{\infty}(n-k+1)a_ka_{n-k+1}]\xi^n=0.\end{aligned} \tag{37}$$

当 $n=0$ 时得到

$$a_5=\frac{-(6ba_3+a_0a_1)}{120c}. \tag{38}$$

一般地,当 $n\geqslant 1$ 时得到

$$a_{n+5}=\frac{ana_n-\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)a_ka_{n-k+1}-b(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}}{c(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}. \tag{39}$$

所以方程(36)的解为

$$\begin{aligned}f(\xi)&=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+a_4\xi^4+a_5\xi^5+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+5}\xi^{n+5}\\&=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+a_4\xi^4-\frac{(6ba_3+a_0a_1)}{120c}\xi^5\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ana_n-\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)a_ka_{n-k+1}-b(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}}{c(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}\xi^{n+5}.$$

因此,方程(1)的解为

$$u(x,t)=\frac{(C_2x+C_4)aT_t\mathrm{e}^{-aT}}{C_1+C_2\mathrm{e}^{-aT}}+\frac{T_t}{C_1+C_2\mathrm{e}^{-aT}}\Big[a_0+a_1(X-\frac{\mathrm{e}^{-aT}}{a})+a_2(X-\frac{\mathrm{e}^{-aT}}{a})^2$$
$$+a_3(X-\frac{\mathrm{e}^{-aT}}{a})^3+a_4(X-\frac{\mathrm{e}^{-aT}}{a})^4+\frac{ma_1-a_0a_1-aa_1-6ba_3}{120c}(X-\frac{\mathrm{e}^{-aT}}{a})^5$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ana_n-\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)a_ka_{n-k+1}-b(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}}{c(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}(X-\frac{\mathrm{e}^{-aT}}{a})^{n+5}-aX\Big].$$

4　Kawachara 方程的伴随方程和守恒律

在这一部分,我们会根据之前所求得的对称来求方程(2)的伴随方程和守恒律.方程(1)的伴随方程为

$$v_t+uv_x+av+bv_{xxx}+cv_{xxxxx}=0\,,\tag{40}$$

并且 Largrangian 记作

$$L=v(u_t+uu_x+au+bu_{xxx}+cu_{xxxxx})\,,\tag{41}$$

利用 Ibragimov 的结论,守恒向量的公式为

$$C^i=\xi^iL+W\Big[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}+D_jD_k(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}})+D_jD_kD_mD_n(\frac{\partial L}{\partial u_{ijkmn}})\Big]+D_j(W)\Big[-D_k(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}})-D_kD_mD_n(\frac{\partial L}{\partial u_{ijkmn}})\Big]$$
$$+D_jD_k(W)\Big[\frac{\partial L}{\partial u_{jkm}}+D_mD_n(\frac{\partial L}{\partial u_{ijkmn}})\Big]+D_jD_kD_m(W)\Big[-D_x(\frac{\partial L}{\partial u_{ijkmn}})\Big]$$
$$+D_jD_kD_mD_n(W)\frac{\partial L}{\partial u_{ijkmn}},i=1,2\,,$$

其中 $W^\alpha=\eta^\alpha-\xi^ju_j^\alpha$.

根据 Ibragimov 给出的结论,给出向量场的通式

$$V=\xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}\,,\tag{42}$$

那么方程(1)的守恒律有下面的式子决定

$$D_t(C^1)+D_x(C^2)=0\,,\tag{43}$$

则向量场 $C=(C^1,C^2)$ 由下式决定

$$C^1=\xi^1L+W(\frac{\partial L}{\partial u_t})\,,\tag{44}$$

$$\begin{aligned}C^2=\xi^2L+W\Big[\frac{\partial L}{\partial u_x}+D_{xx}(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}})+D_{xxxx}(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxxx}})\Big]+D_x(W)\Big[-D_x(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}})-D_{xxx}(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxxx}})\Big]\\+D_{xx}(W)\Big[\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}+D_{xx}(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxxx}})\Big]+D_{xxx}(W)\Big[-D_x(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxxx}})\Big]+D_{xxxx}(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xxxxx}}.\end{aligned}\tag{45}$$

其中 $W=\eta-\xi^1u_t-\xi^2u_x$.

下面我们将分情况讨论.

情况 1　对于向量场 $V_1=\frac{\partial}{\partial x}$,我们可以求得 $W=-u_x$,由此,我们可以求得方程(1)的守恒向量场为

$$C^1=-u_xv\,,$$
$$C^2=v(u_t+uu_x+au+bu_{xxx}+cu_{xxxxx})-u_x(uv+bv_{xx}+cv_{xxxx})$$
$$+(bv_x+cv_{xxx})u_{xx}-u_{xxx}(bv+cv_{xx})+cv_xu_{xxxx}-cvu_{xxxxxx}.$$

情况 2　对于向量场 $V_1=\frac{\partial}{\partial t}$,我们可以求得 $W=-u_t$,同样地,我们可以求得方程(1)的守恒向量场为

$$C^1=v(u_t+uu_x+au+bu_{xxx}+cu_{xxxxx})-u_tv\ ,\ C^2=-u_t(uv+bv_{xx}+cv_{xxxx})-(bv_x+cv_{xxx})u_{xt}$$
$$-u_{xxt}(bv+cv_{xx})+cv_xu_{xxxt}-cvu_{xxxxxt}.$$

情况 3 对于向量场 $V_3=\mathrm{e}^{-at}\dfrac{\partial}{\partial x}-a\mathrm{e}^{-at}\dfrac{\partial}{\partial u}$,我们可以求得 $W=-a\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-at}u_x$,同样地,我们可以求得方程(1)的守恒向量场为

$$C^1=-\mathrm{e}^{-at}(a+u_x)v\ ,$$
$$C^2=-\mathrm{e}^{-at}v(u_t+uu_x+au+bu_{xxx}+cu_{xxxxx})+(-a\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-at}u_x)(uv+bv_{xx}+cv_{xxxx})$$
$$-\mathrm{e}^{-at}(-bv_x-cv_{xxx})u_{xx}-\mathrm{e}^{-at}u_{xxx}(bv+cv_{xx})+c\mathrm{e}^{-at}v_xu_{xxxx}-c\mathrm{e}^{-at}vu_{xxxxxx}.$$

以上守恒向量 $\boldsymbol{C}=(C^1,C^2)$ 包含伴随方程(40)的任意解 v,因此以上守恒向量给出了方程(1)的无穷多个守恒律.

5 结论

本文利用改进 CK 方法将广义变系数 Kawachara 方程约化为常系数 Kawachara 方程,得到了等价变换.然后利用李群分析得到了常系数方程的对称以及约化方程,并利用幂级数展开法求得了常系数方程的精确解,进而通过等价变换得到了变系数方程的解.虽然求解变系数物理方程比常系数物理方程具有挑战性,但是变系数方程对物理、数学等方面有更广泛的影响力.最后,我们还给出了 Kawachara 方程的伴随方程和守恒律.

参 考 文 献

[1] Zhu S D. The Extended G′/G-Expansion Method and Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations[J]. Mathematical and Computational Applications,2010,15:924-929.

[2] Zhang H. New application of the -expansion method[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2009,14:3220-3225.

[3] Khan K,Akbar M A. Study of analytical method to seek for exact solutions of variant Boussinesq equations[J]. Springerplus,2014,3:324.

[4] 马云峰.推广 Riccati 函数展开法求 Burgers 方程新的精确解[J].辽东学院学报(自然科学版),2014,3:211-213.

[5] Feng D,Li K. Exact traveling wave solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by Fan sub-equation method[J]. Physics Letters A,2011,375:2201-2210.

[6] Khan K,AKBAR M A. The exp(−Φ(ξ))-expansion method for finding Traveling Wave Solutions of Vakhnenko-Parkes Equation[J]. International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations,2014,5:72-83.

[7] Khater M M A. Exact traveling wave solutions for the generalized Hirota-Satsuma couple KdV system using the exp(−φ(ξ))-expansion method[J]. Cogent Mathematics,2016,3:1-16.

[8] Hafez M G. Exact solutions to the (3+1)-dimensional coupled Klein-Gordon-Zakharov equation using exp(−Φ (ξ))-expansion method [J]. Alexandria Engineering Journal,2016,55:1635-1645.

[9] Kadkhoda N,Jafari H. Analytical solutions of the Gerdjikov-Ivanov equation by using exp(−φ (ξ))-expansion method[J]. Optik - International Journal for Light and Electron Optics,2017,139:72-76.

[10] Wazwaz A M. The tanh method:exact solutions of the sine-Gordon and the sinh-Gordon equations[J]. Applied Mathematics & Computation,2005,167:1196-1210.

[11] Wang M. Solitary wave solutions for variant boussinesq equations[J]. Physics Letters A,1995,199:169-172.

[12] Wang M,Zhou Y,Li Z. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics [J]. Physics Letters A,1996,216:67-75.

[13] Bai C L. Extended Homogeneous Balance Method and Lax Pairs,Backlund Transformation[J]. Communication in Theoretical Physics,2002,37:645-648.

[14] Liu H,S Bo,Xin X,et al. CK transformations,symmetries,exact solutions and conservation laws of the generalized variable-coefficient KdV types of equations[J]. Journal of Computational & Applied Mathematics,2019,345:127-134.

[15] 辛祥鹏.非线性发展方程非局部对称及精确解[J].聊城大学学报(自然科学版),2018,32:15-20.

[16] Ablowitz M J,Clarkson P A. Solitons,nonlinear evolution equations and inverse scattering[M]. Cambridge Univ:Pr,1991.

[17] Chen M,Liu X Q. Exact solutions and conservation laws of the Konopelchenko-Dubrovsky equations[J]. Pure & Applied Mathematics,2011,27:533-532.

[18] 徐阳,刘庆松,孟广武. 修正的 VN 方程组的对称、约化和精确解[J]. 中国科技论文,2016,11(5):538-544.

[19] 李宁,刘希强. Broer-Kau-Kupershmidt 方程组的对称、约化和精确解[J]. 物理学报,2013,62:160203-160203.

[20] 程雪苹,李金玉,薛江蓉. 耦合 KdV 方程的约化及求解[J]. 物理学报,2011,60:19-25.

[21] 张辉群. 修正的 Kawachara 方程的精确解[J]. 青岛大学学报(自然科学版),1998,1998:24-26.

[22] Mustafa M. Stability analysis for the kawachara and modified kawachara equations[J]. Middle East Journal of Science,2018,4:15-22.

[23] 李凯辉,刘汉泽,辛祥鹏. 一类高阶非线性波方程的李群分析、最优系统、精确解和守恒律[J]. 物理学报,2016,65:1-7.

[24] 李玉,李立群,李会会,等. (3+1)维 Zakharov-Kuznetsov-Burgers 方程的精确解和守恒律[J]. 聊城大学学报(自然科学版),2017,30:10-17.

[25] 张丽香,刘汉泽,辛祥鹏. 广义(3+1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的对称约化、精确解和守恒律[J]. 物理学报,2017,66:1-7.

[26] 常丽娜,刘汉泽. 广义(3+1)维 Kadomtsev-Petviashvili-Boussinesq 方程的对称约化、精确解和守恒律[J]. 滨州学院学报,2019,35:40-47.

Equivalent Transformation, Exact Solution and Conservation Law of Generalized Kawachara Equation with Variable Coefficient

CHANG Li-na　LIU Han-ze

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract　In this paper, the Kawachara equation with generalized variable coefficient is reduced to the Kawachara equation with constant coefficient by the improved CK method, and equivalent transformation is obtained. By using Lie group analysis, the Lie symmetric and reductive equation of the equation is obtained, and the exact solution of the reductive equation is obtained, and then the exact solution of the Kawachara equation with variable coefficients is obtained. finally, the conservation law of the equation is given.

Key words　Kawachara equation with generalized variable coefficient; equivalent transformation; symmetry reduction; the exact solution; conservation law