文章编号　1672-6634(2020)02-0001-06　　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2020.02.001

一个修正的周期 Camassa-Holm 系统解对初值的不一致连续依赖性

王海权　付　英

(西北大学 数学学院、非线性科学研究中心,陕西 西安 710127)

摘　要　为了研究偏微分方程初值问题的解与初值之间的依赖关系,我们考虑了一个周期情形下修正 Camassa-Holm 系统 Cauchy 问题. 由局部适定性结果,该问题的解是连续依赖于初值的. 我们利用近似解方法,证明了该问题的解,在 Besov 空间 $B^s_{2,r}(\mathbf{T})\times B^s_{2,r}(\mathbf{T})(s>3/2,1\leqslant r<\infty)$ 中对初值是不一致连续依赖的.

关键词　不一致连续依赖;Besov 空间;一个修正的周期 Camassa-Holm 系统;近似解

中图分类号　O175.29　　**文献标识码**　A

0　引言

本文考虑周期情形下一个修正的 Camassa-Holm 系统初值问题,具体如

$$\begin{cases} m_t+um_x+2mu_x+\rho\gamma_x=0, t>0, x\in\mathbf{T},\\ \rho_t+(u\rho)_x=0, t>0, x\in\mathbf{T},\\ m(0,x)=m_0(x), x\in\mathbf{T},\\ \rho(0,x)=\rho_0(x), x\in\mathbf{T}, \end{cases}\tag{1}$$

其中 $m=u-u_{xx}$,$\rho=\gamma-\gamma_{xx}$,$\gamma=\bar{\rho}-\bar{\rho}_0$,$\mathbf{T}\cong(0,1)$. 问题(1)中的系统是由文献[1]作为描述水波现象的模型提出来的,其中 $u(t,x)$ 表示速度,$\rho(t,x)$ 表示局部平均密度. 随后,很多学者对问题(1)的解的局部适定性、持久性以及爆破理论进行了详细地研究,具体可参考文献[2-6]. 特别地,文献[2]给出了该问题解在 Besov 空间 $B^s_{p,r}\times B^s_{p,r}(s>3/2,1\leqslant p,r\leqslant\infty)$ 的局部适定性并且同时表明了其解映射 $(u_0,\gamma_0)=z_0\mapsto z(t)=(u(t),\gamma(t))$ 在 Besov 空间 $B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}(s>3/2,1\leqslant r<\infty)$ 的任意子集上都是连续的. 本文主要是以该结论为基础,利用近似解方法[7-11]证明当该解映射在对应空间中的不一致连续依赖性,具体结论如下

定理 1　若 $z_0\in B^s_{2,r}(\mathbf{T})\times B^s_{2,r}(\mathbf{T})$,$s>3/2$,$1\leqslant r<\infty$,则问题(1)的解映射 $z_0\mapsto z(t)$ 在 Besov 空间 $B^s_{2,r}(\mathbf{T})\times B^s_{2,r}(\mathbf{T})$ 的任意子集上都是不一致连续的,其中 $z(t)\in C([0,\mathbf{T}];B^s_{2,r}(\mathbf{T})\times B^s_{2,r}(\mathbf{T}))$ 即存在解序列 $z^1_n(t)=(u^1_n(t),\gamma^1_n(t))$ 和 $z^2_n(t)=(u^2_n(t),\gamma^2_n(t))$,当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时满足

$$\|u^1_n(t)\|_{B^s_{2,r}}+\|u^2_n(t)\|_{B^s_{2,r}}+\|\gamma^1_n(t)\|_{B^s_{2,r}}+\|\gamma^2_n(t)\|_{B^s_{2,r}}\leqslant c\ ,$$
$$\lim_{n\to\infty}\|u^1_n(0)-u^2_n(0)\|_{B^s_{2,r}}=\lim_{n\to\infty}\|\gamma^1_n(0)-\gamma^2_n(0)\|_{B^s_{2,r}}=0\ ,$$
$$\liminf_{n\to\infty}(\|u^1_n(t)-u^2_n(t)\|_{B^s_{2,r}}+\|\gamma^1_n(t)-\gamma^2_n(t)\|_{B^s_{2,r}})\geqslant c|\sin t|\ .$$

符号说明 若 $A\geqslant cB$ 或者 $A\leqslant cB$,其中 c 是仅与指标有关的正常数,每一行的取值不尽相同. 若 $z=(u,\rho)$ 则 $\|z\|_{X\times Y}=\|u\|_X+\|\rho\|_Y$,其中 X 和 Y 是 Banach 空间.

1　预备知识

为了估算方便,将问题 (1) 化为如下形式

收稿日期:2019-05-21

基金项目:国家自然科学基金项目(11471259);陕西省自然科学基础研究计划面上项目(2019JM-007)资助

通讯作者:付英,女,汉族,博士,教授,研究方向:偏微分方程,E-mail:fuying@nwu.edu.cn.

$$\begin{cases} u_t+uu_x+\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}(u^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}\gamma^2-\frac{1}{2}\gamma_x^2)=0, & t>0,x\in\mathbf{T},\\ \gamma_t+u\gamma_x+(1-\partial_x^2)^{-1}((u_x\gamma_x)_x+u_x\gamma)=0, & t>0,x\in\mathbf{T},\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbf{T},\\ \rho(0,x)=\rho_0(x), & x\in\mathbf{T}. \end{cases} \tag{2}$$

接下来,给出 Besov 空间的定义和性质.

定义 1[12,13] 设 $s\in\boldsymbol{R}$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$. 非齐次的 Besov 空间 $B_{p,r}^s(\mathbf{T}^d)$ 定义为

$$B_{p,r}^s(\mathbf{T}^d)=\{f\in S'(\mathbf{T}^d),\|f\|_{B_{p,r}^s}<\infty\},\text{其中 }\|f\|_{B_{p,r}^s}=\begin{cases}(\sum\limits_{q\in Z}2^{qrs}\|\Delta_q f\|_{L^p}^r)^{\frac{1}{r}}, r<\infty,\\ \sup\limits_{q\in Z}2^{qs}\|\Delta_q f\|_{L^p}, r=\infty.\end{cases}$$

命题 1[12,13] 设 $s\in R$, $1\leqslant p,r,p_i,r_i\leqslant\infty(i=1,2)$ 则有

(a) 空间 $B_{p,r}^s(\mathbf{T}^d)$ 是 Banach 空间且连续嵌入 $S'(\mathbf{T}^d)$;

(b) 若 $p_1\leqslant p_2$, $r_1\leqslant r_2$ 则 $B_{p_1,r_1}^s(\mathbf{T}^d)$ 嵌入 $B_{p_2,r_2}^{s-d(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}(\mathbf{T}^d)$,若 $s_1<s_2$,则 $B_{p_1,r_1}^{s_1}(\mathbf{T}^d)$ 嵌入 $B_{p_2,r_2}^{s_2}(\mathbf{T}^d)$;

(c) 对任意的 $s>0$, $B_{p,r}^s$ 是 Banach 代数 $\Leftrightarrow B_{p,r}^s$ 嵌入 $L^\infty\Leftrightarrow s>d/p$(或 $s\geqslant d/p$ 且 $r=1$);

(d) 若 $(u^{(n)})_{n\in N}$ 是 $B_{p,r}^s$ 中的有界序列并且在 S' 中趋于 u,则 $u\in B_{p,r}^s$ 且

$$\|u\|_{B_{p,r}^s}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|u^{(n)}\|_{B_{p,r}^s};$$

(e) 若 $u\in B_{p,r}^s\cap B_{p,r}^{\tilde{s}}$ 以及 $\theta\in[0,1]$,则 $u\in B_{p,r}^{\theta s+(1-\theta)\tilde{s}}$. 进一步有

$$\|u\|_{B_{p,r}^{\theta s+(1-\theta)\tilde{s}}}\leqslant\|u\|_{B_{p,r}^s}^{\theta}\|u\|_{B_{p,r}^{\tilde{s}}}^{1-\theta};$$

(f) 令 $m\in R$, f 是一个 S^m 乘子,则对任意的 $s\in R$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, $f(D)$ 是从 $B_{p,r}^s$ 到 $B_{p,r}^{s-m}$ 的连续算子.

对于输运方程的初值问题

$$\partial_t u+v\cdot u=g,\qquad u|_{t=0}=u_0, \tag{3}$$

有以下结论.

引理 1[14] 令 $(p,r)\in[1,\infty]^2$, $s>-d/p$, v 是一个向量场,使得 $s>1+\dfrac{d}{p}$, $\nabla v\in L^1([0,T];B_{p,r}^{s-1})$ 否则 $\nabla v\in L^1([0,T];B_{p,r}^{d/p}\cap L^\infty)$. 假设 $u_0\in B_{p,r}^s(\mathbf{T}^d)$, $g\in L^1([0,T];B_{p,r}^s(\mathbf{T}^d))$,若 $u\in L^\infty([0,T];B_{p,r}^s(\mathbf{T}^d)\cap C([0,T];S'))$ 是问题(3)的解,则当 $r=1$ 或者 $s\neq1+d/p$ 则

$$\|u\|_{B_{p,r}^s}\leqslant e^{CV(t)}(\|u_0\|_{B_{p,r}^s}+\int_0^t e^{-CV(\tau)}\|g(\tau)\|_{B_{p,r}^s}d\tau)$$

成立,其中若 $s<1+d/p$,则 $V(t)=\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{B_{p,r}^{d/p}\cap L^\infty}d\tau$;否则, $V(t)=\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{B_{p,r}^{s-1}}d\tau$.

引理 2[15] 令 $(p,r)\in[1,\infty]^2$, $s>-d\min\left\{\dfrac{1}{p},1-\dfrac{1}{p}\right\}$,假设 $u_0\in B_{p,r}^s(\mathbf{T}^d)$, $g\in L^1([0,T];B_{p,r}^s(\mathbf{T}^d))$

$$\begin{cases}\nabla v\in L^1([0,T];B_{p,r}^{s-1}(\mathbf{T}^d)), s>1+d/p(\text{或 } s=1+d/p,\text{且 } r=1);\\ \nabla v\in L^1([0,T];B_{p,r}^s(\mathbf{T}^d)), s=1+d/p, r>1;\\ \nabla v\in L^1([0,T];B_{p,r}^{\frac{1}{p}}(\mathbf{T}^d)\cap L^\infty(\mathbf{T}^d)), s<1+d/p.\end{cases}$$

若 $u\in L^\infty([0,T];B_{p,r}^s(\mathbf{T}^d)\cap C([0,T];S'))$ 是问题(3)的解,则当 $s>0$ 时,

$$\|u\|_{B_{p,r}^s}\leqslant\|u_0\|_{B_{p,r}^s}+\int_0^t\|g(\tau)\|_{B_{p,r}^s}d\tau+C\int_0^t(\|u\|_{B_{p,r}^s}\|\nabla v\|_{L^\infty}+\|\nabla v\|_{B_{p,r}^{s-1}}\|\nabla u\|_{L^\infty})d\tau$$

成立. 然后给出一些重要的不等式.

引理 3[9] 令 σ, $\alpha\in\mathbf{R}$. 若 $n\in\mathbf{Z}^+$,则对于任意的 $1\leqslant p,r\leqslant\infty$ 有

$$\|\cos(nx-\alpha)\|_{B_{2,r}^\sigma(\mathbf{T})}\approx\|\sin(nx-\alpha)\|_{B_{2,r}^\sigma(\mathbf{T})}\approx n^\sigma.$$

引理 4[12] 假设 $(p,r)\in[1,\infty]^2$,则有

(1) 若 $s>0$, $\|fg\|_{B_{p,r}^s}\leqslant C(\|f\|_{B_{p,r}^s}\|g\|_{L^\infty}+\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{B_{p,r}^s})$;

(2) 对于 $s_1\leqslant1/p$, $s_2>1/p(s_2\geqslant1/p, r=1)$ 以及 $s_1+s_2>0$,

$$\|fg\|_{B_{p,r}^{s_1}}\leqslant C\|f\|_{B_{p,r}^{s_1}}\|g\|_{B_{p,r}^{s_2}}.$$

引理 5　若 $z_0=(u_0,\gamma_0)\in B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}(s>3/2,1\leqslant r<\infty)$，则问题(2)存在唯一解 $z(t)\in C([0,\mathbf{T}];B^s_{2,r}\times B^s_{2,r})$ 并且 $z(t)$ 连续依赖于初值 z_0，进一步有

$$\| z(t) \|_{B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}} \leqslant 2 \| z_0 \|_{B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}}, \qquad 0\leqslant t\leqslant T:=\frac{1}{8C\| z_0 \|_{B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}}}, \tag{4}$$

其中 $C>0$，$\| z(t) \|_{B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}}=\| u(t) \|_{B^s_{2,r}}+\| \gamma(t) \|_{B^s_{2,r}}$.

证明　关于问题(2)解的存在性，唯一性以及解对初值的连续依赖性的证明可以参考文献[2]. 接下来主要目标是(4)，由文献[2]中引理 4 证明过程可知存在 $C>0$ 以及 $T_1>0$ 使得 $4C\| z_0 \|_{B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}}T_1<1$ 当 $0\leqslant t\leqslant T_1$，

$$\| z^{(n)}(t) \|_{B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}} \leqslant \frac{\| z_0 \|_{B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}}}{1-4Ct\| z_0 \|_{B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}}}$$

成立. 取 $T:=\dfrac{1}{8C\| z_0 \|_{B^s_{2,1}\times B^s_{2,1}}}$，可得当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，$\| z^{(n)}(t) \|_{B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}}\leqslant 2\| z_0 \|_{B^s_{2,r}\times B^s_{2,r}}$. 又因为序列 $\{z^n(t)\}$ 趋向于 $z(t)$ 当 n 且 $z(t)$ 为问题(2)的解，最后根据命题 1 的(d)可得(4). 引理 5 证毕.

2　定理 1 的证明

在这一部分，通过构造近似解[7-11]的方法来证明定理 1.

2.1　近似解估计

首先，构造如下近似解

$$u^{\omega,n}(t)=\omega n^{-1}+n^{-s}\cos(nx-\omega t),\ \gamma^{\omega,n}(t)=\omega n^{-1}+n^{-s}\cos(nx-\omega t),$$

其中 $\omega=\pm 1$，$n\in\mathbf{Z}^+$，$s>3/2$. 将上面构造的近似解代入问题(2)的方程，可设

$$E(t)=E_1(t)+E_2(t),\ E_1(t)=u^{\omega,n}_t+u^{\omega,n}u^{\omega,n}_x,$$

$$E_2(t)=\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}((u^{\omega,n})^2+\frac{1}{2}(u^{\omega,n}_x)^2+\frac{1}{2}(\gamma^{\omega,n})^2-\frac{1}{2}(\gamma^{\omega,n}_x)^2),$$

$$F(t)=F_1(t)+F_2(t),\ F_1(t)=\gamma^{\omega,n}_t+u^{\omega,n}\gamma^{\omega,n}_x,$$

$$F_2(t)=(1-\partial_x^2)^{-1}((u^{\omega,n}_x\gamma^{\omega,n}_x)_x+u^{\omega,n}_x\gamma^{\omega,n}).$$

通过简单的计算，然后利用引理 3 估算 $\| E_i(t) \|_{B^\mu_{2,r}}$ 和 $\| F_i(t) \|_{B^\mu_{2,r}}(i=1,2,1/2<\mu<1)$ 可得

$$\| E_1(t) \|_{B^\mu_{2,r}}=\| F_1(t) \|_{B^\mu_{2,r}}=\| -\frac{1}{2}n^{-2s+1}\sin(2nx-2\omega t) \|_{B^\mu_{2,r}}\leqslant cn^{-2s+\mu+1},$$

$$\begin{aligned}\| E_2(t) \|_{B^\mu_{2,r}}&=\| (1-\partial_x^2)^{-1}(-3\omega n^{-s}\sin(nx-\omega t)-\frac{3}{2}n^{-2s+1}\sin(2nx-2\omega t)) \|_{B^\mu_{2,r}}\\&\leqslant cn^{-s}\| \sin(nx-\omega t) \|_{B^{\mu-2}_{2,r}}+cn^{-2s+1}\| \sin(2nx-2\omega t) \|_{B^{\mu-2}_{2,r}}\leqslant cn^{\mu-s-2}+cn^{\mu-2s-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\| F_2(t) \|_{B^\mu_{2,r}}&=\| (1-\partial_x^2)^{-1}((n^{-2s+3}-\frac{1}{2}n^{-2s+1})\sin(2nx-2\omega t)-\omega n^{-s}\sin(nx-\omega t)) \|_{B^\mu_{2,r}}\\&\leqslant c(n^{-2s+3}+n^{-2s+1})\| \sin(2nx-2\omega t) \|_{B^{\mu-2}_{2,r}}+cn^{-s}\| \sin(nx-\omega t) \|_{B^{\mu-2}_{2,r}}\\&\leqslant cn^{\mu-2s+1}+cn^{\mu-2s-1}+cn^{\mu-s-2}\leqslant cn^{\mu-2s+1}+cn^{\mu-s-2}.\end{aligned}$$

引理 6　若 $\omega=\pm 1$，$n\in\mathbf{Z}^+$，$1/2<\mu<1$，$s>3/2$，$1\leqslant r<\infty$则

$$\| E(t) \|_{B^\mu_{2,r}},\ \| F(t) \|_{B^\mu_{2,r}}\leqslant cn^{-r_s},\text{其中 } r_s=\begin{cases}s+2-\mu, & s>3,\\ 2s-1-\mu, & 3/2<s\leqslant 3.\end{cases}$$

2.2　近似解与解的差的估计

设 $(u_{\omega,n}(t),\gamma_{\omega,n}(t))$ 是如下问题的解，即满足

$$\begin{cases}\partial_t u_{\omega,n}+u_{\omega,n}\partial_x u_{\omega,n}+f(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})=0, & t>0,\quad x\in\mathbf{T},\\ \partial_t\gamma_{\omega,n}+u_{\omega,n}\partial_x\gamma_{\omega,n}+g(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})=0, & t>0,\quad x\in\mathbf{T},\\ u_{\omega,n}(0,x)=u^{\omega,n}(0,x)=\omega n^{-1}+n^{-s}\cos nx, & x\in\mathbf{T},\\ \gamma_{\omega,n}(0,x)=\gamma^{\omega,n}(0,x)=\omega n^{-1}+n^{-s}\cos nx, & x\in\mathbf{T},\end{cases}\tag{5}$$

其中 $g(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})=(1-\partial_x^2)^{-1}((\partial_x u_{\omega,n}\partial_x\gamma_{\omega,n})_x+\gamma_{\omega,n}\partial_x u_{\omega,n})$，$f(u_{\omega,n},\sigma_{\omega,n})=\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}(u^2_{\omega,n}+\frac{1}{2}(\partial_x u_{\omega,n})^2$

$$+\frac{1}{2}\gamma_{\omega,n}^2-\frac{1}{2}(\partial_x\gamma_{\omega,n})^2).$$

由引理 3 可知

$$\|u_{\omega,n}(0)\|_{B_{2,r}^s}=\|u^{\omega,n}(0)\|_{B_{2,r}^s}=\|\omega n^{-1}+n^{-s}\cos nx\|_{B_{2,r}^s}\leqslant cn^{-1}+c\leqslant c,$$

$$\|\gamma_{\omega,n}(0)\|_{B_{2,r}^s}=\|\gamma^{\omega,n}(0)\|_{B_{2,r}^s}=\|\omega n^{-1}+n^{-s}\cos nx\|_{B_{2,r}^s}\leqslant cn^{-1}+c\leqslant c.$$

所以根据引理 5 知 $(u_{\omega,n}(t),\gamma_{\omega,n}(t))$ 是问题(5)的唯一解,并且解的最大存在时间

$$T_0>T:=\frac{1}{8c(\|u_{\omega,n}(0)\|_{B_{2,r}^s}+\|\gamma_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s})}\geqslant c.$$

为了估算近似解与解的差,设 $\sigma=u^{\omega,n}-u_{\omega,n}$, $\eta=\gamma^{\omega,n}-\gamma_{\omega,n}$ 将其代入(5),则有

$$\begin{cases}\partial_t\sigma+\frac{1}{2}(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})\partial_x\sigma+\frac{1}{2}\sigma\partial_x(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})+f(u^{\omega,n},\gamma^{\omega,n})-f(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})-E(t)=0,\\ \partial_t\eta+u^{\omega,n}\partial_x\eta+\sigma\partial_x\gamma_{\omega,n}+g(u^{\omega,n},\gamma^{\omega,n})-g(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})-F(t)=0,x\in\mathbf{T},t>0,\\ \sigma(0,x)=\sigma_0=0,\eta(0,x)=\eta_0=0,x\in\mathbf{T},\end{cases}\tag{6}$$

其中

$$f(u^{\omega,n},\gamma^{\omega,n})-f(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})=\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}((u^{\omega,n}+u_{\omega,n})\sigma+\frac{1}{2}\partial_x(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})\partial_x\sigma+\frac{1}{2}(\gamma^{\omega,n}+\gamma_{\omega,n})\eta-\frac{1}{2}\partial_x(\gamma^{\omega,n}+\gamma_{\omega,n})\partial_x\eta),$$

$$g(u^{\omega,n},\gamma^{\omega,n})-g(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})=(1-\partial_x^2)^{-1}((\partial_x\sigma\partial_x\gamma^{\omega,n}+\partial_xu_{\omega,n}\partial_x\eta)_x+\eta\partial_xu^{\omega,n}+\gamma_{\omega,n}\partial_x\sigma).$$

对问题(6)的第一个方程和第二个方程分别使用引理 1 可得

$$\|\sigma(t)\|_{B_{2,r}^\mu}\leqslant c\exp(\frac{1}{2}c\int_0^t\|\partial_x(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})(\tau)\|_{B_{2,r}^{1/2}\cap L^\infty}\mathrm{d}\tau)$$
$$\times(\|\sigma_0\|_{B_{2,r}^\mu}+\int_0^t(\|\sigma\partial_x(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})\|_{B_{2,r}^\mu}+\|E(\tau)\|_{B_{2,r}^\mu}+\|f(u^{\omega,n},\gamma^{\omega,n})-f(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})\|_{B_{2,r}^\mu})\mathrm{d}\tau),$$

$$\|\eta(t)\|_{B_{2,r}^\mu}\leqslant c\exp(c\int_0^t\|\partial_xu^{\omega,n}(\tau)\|_{B_{2,1}^{1/2}\cap L^\infty}\mathrm{d}\tau)$$
$$\times(\|\eta_0\|_{B_{2,r}^\mu}+\int_0^t(\|F(\tau)\|_{B_{2,r}^\mu}+\|\sigma\partial_x\gamma_{\omega,n}+g(u^{\omega,n},\gamma^{\omega,n})-g(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})\|_{B_{2,r}^\mu})\mathrm{d}\tau).$$

根据命题 1,对于 $1/2<\mu<\min\{s-1,1\}$ 可得

$$\|\partial_x(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})\|_{B_{2,r}^{1/2}\cap L^\infty}\leqslant c\ \|u^{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s}+\|u_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s},$$
$$\|\partial_xu^{\omega,n}\|_{B_{2,r}^\mu}\leqslant c\ \|u^{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s}.$$

由引理 4 可得

$$\|\sigma\partial_x(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})\|_{B_{2,r}^\mu}\leqslant c\ \|\sigma\|_{L^\infty}\ \|\partial_x(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})\|_{B_{2,r}^\mu}+\|\sigma\|_{B_{2,r}^\mu}\ \|\partial_x(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})\|_{L^\infty}$$
$$\leqslant c(\|u^{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s}+\|u_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s})\ \|\sigma\|_{B_{2,r}^\mu}.$$

$$\|\sigma\partial_x\gamma_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^\mu}\leqslant c\ \|\gamma_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s}\ \|\sigma\|_{B_{2,r}^\mu}.$$

$$\|f(u^{\omega,n},\gamma^{\omega,n})-f(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})\|_{B_{2,r}^\mu}$$
$$\leqslant c(\|(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})\sigma\|_{B_{2,r}^{\mu-1}}+\|\partial_x(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})\partial_x\sigma\|_{B_{2,r}^{\mu-1}}+\|(\gamma^{\omega,n}+\gamma_{\omega,n})\eta\|_{B_{2,r}^{\mu-1}}+\|\partial_x(\gamma^{\omega,n}+\gamma_{\omega,n})\partial_x\eta\|_{B_{2,r}^{\mu-1}})$$
$$\leqslant c(\|u^{\omega,n}+u_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^\mu}\ \|\sigma\|_{B_{2,r}^{\mu-1}}+\|\partial_x(u^{\omega,n}+u_{\omega,n})\|_{B_{2,r}^\mu}\ \|\partial_x\sigma\|_{B_{2,r}^{\mu-1}}+\|\gamma^{\omega,n}+\gamma_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^\mu}\ \|\eta\|_{B_{2,r}^{\mu-1}}+$$
$$\|\partial_x(\gamma^{\omega,n}+\gamma_{\omega,n})\|_{B_{2,r}^\mu}\ \|\partial_x\eta\|_{B_{2,r}^{\mu-1}})$$
$$\leqslant c(\|u^{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s}+\|u_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s}+\|\gamma^{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s}+\|\gamma_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s})(\|\sigma\|_{B_{2,r}^\mu}+\|\eta\|_{B_{2,r}^\mu}),$$

$$\|g(u^{\omega,n},\gamma^{\omega,n})-g(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})\|_{B_{2,r}^\mu}$$
$$\leqslant c(\|\partial_x\sigma\|_{B_{2,r}^{\mu-1}}\ \|\partial_x\gamma^{\omega,n}\|_{B_{2,r}^\mu}+\|\partial_xu_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^\mu}\ \|\partial_x\eta\|_{B_{2,r}^{\mu-1}}+\|\eta\|_{B_{2,r}^{\mu-1}}\ \|\partial_xu^{\omega,n}\|_{B_{2,r}^\mu}+\|\gamma_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^\mu}\times$$
$$\|\partial_x\sigma\|_{B_{2,r}^{\mu-1}})$$
$$\leqslant c(\|u^{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s}+\|u_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s}+\|\gamma^{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s}+\|\gamma_{\omega,n}\|_{B_{2,r}^s})(\|\sigma\|_{B_{2,r}^\mu}+\|\eta\|_{B_{2,r}^\mu}),$$

根据引理 3 以及引理 5 可知

$$\|u_{\omega,n}(t)\|_{B_{2,r}^s},\|\rho_{\omega,n}(t)\|_{B_{2,r}^s}\leqslant c\|z_{\omega,n}(t)\|_{B_{2,r}^s\times B_{2,r}^s}\leqslant c,$$

再根据引理 1 以及 $\|\sigma_0\|_{B_{2,r}^\mu}=\|\eta_0\|_{B_{2,r}^\mu}=0$ 可得

$$\|\sigma(t)\|_{B_{2,r}^\mu}\leqslant cn^{-r_s}+c\int_0^t(\|\sigma(\tau)\|_{B_{2,r}^\mu}+\|\eta(\tau)\|_{B_{2,r}^\mu})\mathrm{d}\tau,$$

$$\|\eta(t)\|_{B^{\mu}_{2,r}} \leqslant cn^{-r_s} + c\int_0^t (\|\sigma(\tau)\|_{B^{\mu}_{2,r}} + \|\eta(\tau)\|_{B^{\mu}_{2,r}})\mathrm{d}\tau,$$

于是有

$$\|\bar{z}(t)\|_{B^{\mu}_{2,r}\times B^{\mu}_{2,r}} \leqslant cn^{-r_s} + \int_0^t \|\bar{z}(\tau)\|_{B^{\mu}_{2,r}\times B^{\mu}_{2,r}}\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\|\bar{z}(t)\|_{B^{\mu}_{2,r}\times B^{\mu}_{2,r}} = \|\sigma(t)\|_{B^{\mu}_{2,r}} + \|\eta(t)\|_{B^{\mu}_{2,r}}$,$0 \leqslant t \leqslant T$. 然后利用 Gronwall 不等式得如下结论

引理 7　若 $\omega = \pm 1$,$n \in \mathbf{Z}^+$,$1/2 < \mu < \min\{s-1,\ 1\}$,$s > 3/2$,$1 \leqslant r < \infty$,则

$$\|\sigma(t)\|_{B^{\mu}_{2,r}},\ \|\eta(t)\|_{B^{\mu}_{2,r}} \leqslant cn^{-r_s},\ 0 \leqslant t \leqslant T,\text{其中 } r_s = \begin{cases} s+2-\mu, & s>3, \\ 2s-1-\mu, & 3/2 < s \leqslant 3. \end{cases}$$

2.3　完成定理 1 的证明

根据引理 3 以及引理 5 可知

$$\|u_{\pm1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}},\ \|\gamma_{\pm1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} \leqslant c\|z_{\pm1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}\times B^{s}_{2,r}} \leqslant c,$$

因此可知 $z_{1,n}(t)$ 和 $z_{-1,n}(t)$ 是问题(5)初值分别为 $z^{1,n}(0)$ 和 $z^{-1,n}(0)$ 相对应的解,并且解的最大存在时间 $\mathbf{T}_0$ 与 n 无关. 取定 n 且足够大,设 $k = 2s-\mu$,对问题(5)的两个方程使用引理 2 得

$$\|u_{\omega,n}(t)\|_{B^{k}_{2,r}} \leqslant c\|u_{\omega,n}(0)\|_{B^{k}_{2,r}} + c\int_0^t (\|f(u_{\omega,n},\rho_{\omega,n})\|_{B^{k}_{2,r}} + \|u_{\omega,n}(\tau)\|_{B^{k}_{2,r}}\ \|\partial_x u_{\omega,n}(\tau)\|_{L^\infty})\mathrm{d}\tau,$$

$$\begin{aligned}\|\gamma_{\omega,n}(t)\|_{B^{k}_{2,r}} \leqslant{}& c\|\gamma_{\omega,n}(0)\|_{B^{k}_{2,r}} + c\int_0^t \|g(u_{\omega,n},\gamma_{\omega,n})\|_{B^{k}_{2,r}}\mathrm{d}\tau \\ &+ c\int_0^t (\|\gamma_{\omega,n}(\tau)\|_{B^{k}_{2,r}}\ \|\partial_x u_{\omega,n}(\tau)\|_{L^\infty} + \|\partial_x u_{\omega,n}\|_{B^{k-1}_{2,r}}\ \|\partial_x \gamma_{\omega,n}(\tau)\|_{L^\infty})\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

利用命题 1(b)以及引理 4 分别估算上述两式每一项可得

$$\|u_{\omega,n}(t)\|_{B^{k}_{2,r}} \leqslant c\|u_{\omega,n}(0)\|_{B^{k}_{2,r}} + c\int_0^t \|z_{\omega,n}(\tau)\|_{B^{k}_{2,r}\times B^{k}_{2,r}}\ \|z_{\omega,n}(\tau)\|_{B^{s}_{2,r}\times B^{s}_{2,r}}\mathrm{d}\tau,$$

$$\|\gamma_{\omega,n}(t)\|_{B^{k}_{2,r}} \leqslant c\|\gamma_{\omega,n}(0)\|_{B^{k}_{2,r}} + c\int_0^t \|z_{\omega,n}(\tau)\|_{B^{k}_{2,r}\times B^{k}_{2,r}}\ \|z_{\omega,n}(\tau)\|_{B^{s}_{2,r}\times B^{s}_{2,r}}\mathrm{d}\tau,$$

将上面两式相加,然后利用引理 5 以及 Gronwall 不等式可得

$$\|u_{\omega,n}(t)\|_{B^{k}_{2,r}},\ \|\gamma_{\omega,n}(t)\|_{B^{k}_{2,r}} \leqslant c\|z^{\omega,n}(0)\|_{B^{k}_{2,r}\times B^{k}_{2,r}} \leqslant cn^{k-s},\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

进一步有

$$\|\sigma(t)\|_{B^{k}_{2,r}},\ \|\eta(t)\|_{B^{k}_{2,r}} \leqslant cn^{k-s},\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

结合命题 1(e)以及引理 7 可得

$$\|\sigma(t)\|_{B^{s}_{2,r}} \leqslant \|\sigma(t)\|^{1/2}_{B^{k}_{2,r}}\ \|\sigma(t)\|^{1/2}_{B^{\mu}_{2,r}} \leqslant cn^{-m_s},\quad \|\eta(t)\|_{B^{s}_{2,r}} \leqslant \|\eta(t)\|^{1/2}_{B^{k}_{2,r}}\ \|\eta(t)\|^{1/2}_{B^{\mu}_{2,r}} \leqslant cn^{-m_s},$$

其中 $m_s = \begin{cases} 1, & s>3, \\ \dfrac{s-1}{2}, & 3/2 < s \leqslant 3. \end{cases}$

再结合引理 3,引理 5 以及 $u^{\omega,n}$ 和 $\rho^{\omega,n}$ 的定义有

$$\|u_{1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} + \|u_{-1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} + \|\gamma_{1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} + \|\gamma_{-1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} \leqslant c,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|u_{1,n}(0)-u_{-1,n}(0)\|_{B^{s}_{2,r}} = \lim_{n\to\infty}\|\gamma_{1,n}(0)-\gamma_{-1,n}(0)\|_{B^{s}_{2,r}} = \lim_{n\to\infty}2n^{-1} = 0,$$

$$\begin{aligned}\|u^{1,n}(t)-u^{-1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} &= \|2n^{-1}+n^{-s}(\cos(nx-t)\cos(nx+t))\|_{B^{s}_{2,r}} \\ &\leqslant cn^{-s}\ \|\sin nx\|_{B^{s}_{2,r}}|\sin t| - cn^{-1}.\end{aligned}$$

最终,对于任意的 $0 \leqslant t \leqslant \mathbf{T}$ 有

$$\begin{aligned}&\|u_{1,n}(t)-u_{-1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} + \|\gamma_{1,n}(t)-\gamma_{-1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} \\ &\geqslant c\|u_{1,n}(t)-u_{-1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} \\ &\geqslant c\|u_{1,n}(t)-u^{1,n}(t)+u^{-1,n}(t)-u_{-1,n}(t)+u^{1,n}(t)-u^{-1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} \\ &\geqslant c\|u^{1,n}(t)-u^{-1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} - cn^{-m_s} \geqslant cn^{-s}\ \|\cos nx\|_{B^{s}_{2,r}}|\sin t| - cn^{-1} - cn^{-m_s}.\end{aligned}$$

通过引理 3 然后两边同时取极限可得

$$\liminf_{n\to\infty}(\|u_{1,n}(t)-u_{-1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}} + \|\gamma_{1,n}(t)-\gamma_{-1,n}(t)\|_{B^{s}_{2,r}}) \geqslant c|\sin t|.$$

定理 1 证毕.

参考文献

[1] Holm D D,Naraigh L,Tronci C. Singular solution of a modified two-component Camassa-Holm system[J]. Physical Review E,2009,79(2):1-13.

[2] Yan W F,Tian L X. Local well-posedness and blow-up phenomenon for a modified two-component Camassa-Holm system in Besov spaces[J]. International Journal of Nonlinear Science,2012,13(1):99-104.

[3] Long W,Wang Y,Zhang H Y. Breaking waves and persistence property for a two-component Camassa-Holm system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2017,445(1):1084-1096.

[4] Guo Z G,Zhu M X. Wave breaking for a modified two-component Camassa-Holm system[J]. Journal of Differential Equations,2012,252(3):2759-2770.

[5] Jin L B,Guo Z G. A note on a modified two-component Camassa-Holm system[J]. Nonlinear Analysis:Real World Applications,2012,13(2):887-892.

[6] Guo Z G,Zhu M X,Ni L D. Blow-up criteria of solutions to a modified two-component Camassa-Holm system[J]. Nonlinear Analysis:Real World Applications,2011,12(6):3531-3540.

[7] Himonas A,Kenig C,Misiolek G. Non-uniform dependence for the periodic CH equation[J]. Communications in Partial Differential Equations,2010,35(6):1145-1162.

[8] Himonas A,Misiolek G. High-frequency smooth solutions and well-posedness of Camassa-Holm equation[J]. International Mathematics Research Notices,2005(51):3135-3151.

[9] Tang H,Yin Z Y,Liu Z R. A note on the solution map for the periodic Camassa-Holm equation[J]. Applicable Analysis,2014,93(8):1745-1760.

[10] Wang H Q,Fu Y. Non-uniform dependence on initial data for the two-component Novikov system[J]. Journal of Mathematical Physics,2017,58:021502.

[11] Fu Y G,Liu Z R. Non-uniform dependence on initial data for the periodic Degasperis-Procesi equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2011,384(2):293-302.

[12] Bahouri H,Chemin J,Danchin R. Fourier analysis and nonlinear partial differential equations[M]. Berlin,Heidelberg:Springer-Verlag,2011.

[13] Danchin R. A few remarks on the Camassa-Holm equation[J]. Differential and Integral Equations,2001,14(8):953-988.

[14] Danchin R. Fourier analysis methods for PDEs(EB/OL).(2005-11-14)[2019-5-21] https://m.doc88.com/p-9079718125760.html.

[15] Li J L,Yin Z Y. Well-posedness and analytic solutions of two-component Euler-Poincaré system[J]. Monatshefte *für* Mathematik,2017,183(3):509-537.

Non-Uniform Dependence on Initial Data for a Periodic Modified Camassa-Holm System

WANG Hai-quan FU Ying

(School of Mathematics、Center for Nonlinear Studies,Northwest University,Xi'an 710127,China)

Abstract In order to investigate the dependency between the solutions to the initial value problem associated with certain partial differential equations and their initial data,we consider the Cauchy problem of a periodic modified Camassa-Holm system. From the local well-posedness result of this problem, it is known that the solution map from the initial data to the solutions is uniformly continuous. Based on the method of approximate solutions, we prove that the solution map is not uniformly continuous in Besov spaces $B^s_{2,r}(\mathbf{T})\times B^s_{2,r}(\mathbf{T})$ with $s>3/2, 1\leqslant r<\infty$.

Key words non-uniform dependence; Besov spaces; a periodic modified Camassa-Holm system; approximate solutions