文章编号　1672-6634(2020)01-0001-04　　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2020.01.001

模糊划分及其模糊粗糙近似算子

姚　卫　陈晓庆

(河北科技大学 理学院,河北 石家庄 050018)

摘　要　以含幺序半群(不必交换)为取值域,引入一种模糊划分的定义,证明它与模糊等价关系之间的一一对应性,并以交换单位 quantale 为取值格研究了这种模糊划分诱导的模糊粗糙近似算子的基本性质.

关键词　含幺序半群;模糊划分;模糊等价关系;模糊粗糙近似算子

中图分类号　O159　　**文献标识码**　A

0　引言与预备知识

粗糙集理论由 Pawlak 于 1982 年提出[1,2],是基于不可分辨关系的一种聚类方法.经过几十年的发展,粗糙集理论与方法已成功地应用到了过程控制、社会经济、医疗诊断、生物化学、环境科学、心理学和冲突分析等领域中.

最初的粗糙集的基本结构是等价关系,然而这并不能描述信息系统中的一些粒化问题,于是基于广义关系的粗糙集模型得到了快速发展.除关系型粗糙集外,覆盖型和邻域型(包括邻域系统和邻域算子)粗糙集也应运而生.邻域型粗糙集可以看做是覆盖型粗糙集的一种特殊情形,而覆盖型粗糙集可以看做是关系型粗糙集的扩展,二者都具有明显的粒化思想.

粗糙集和模糊集的交叉结合也是粗糙集理论的一个重要组成部分.在关系型模糊粗糙集模型方面,从模糊二元关系和赋值格的扩展两方面涌现了大量的研究论文,如:基于单位区间的模糊粗糙集[3-12],基于剩余格的模糊粗糙集[13-16];在覆盖型和邻域型模糊粗糙集模型方面,由于模糊覆盖诱导的不同类型的邻域系统及其上下近似算子,因此也就诱导了很多不同的粗糙近似算子模型[17-20].此外,文[21]提出了具有分析学背景的度量型粗糙集,研究了这种模型在模糊聚类中的应用.

由于等价关系和划分是两个相互等价的概念,因此二者在研究粗糙集时是等价的.对于模糊情形,通常的模糊等价关系是利用格值上的三角模对经典等价关系的逻辑扩展,其定义方式较为固定.是否存在与模糊等价关系一一对应的模糊划分的概念,一直是模糊数学界关注的问题.2004,Belohavek 基于完备剩余格、利用模糊等同价系引入了一种模糊划分的概念[22],并证明了模糊等价关系和模糊划分之间一一对应性.在此之前的模糊粗糙集的相关结构都是建立在模糊覆盖的基础上的,模糊覆盖虽然是划分的一种弱化后的模糊扩展,但是无论如何它始终无法与模糊等价关系相对应.

本文将以含幺序半群(不必交换)为取值域,引入一种模糊划分的定义,推广 Belohavek 的相关定义,并证明它与模糊等价关系的一一对应性,最后以交换单位 quantale 为取值格研究模糊划分诱导的模糊粗糙近似算子的基本性质.

下面给出本文所需要的预备知识.

定义 1　设 L 是一个偏序集,$*$ 是 L 上的一个半群运算,e 是 L 中关于运算 $*$ 的单位元.如果运算 $*$ 与偏序相互协调,即 $a\leqslant b,c\leqslant d$ 蕴含 $a*c\leqslant b*d(\forall a,b,c,d\in L)$,则称 $(L,*,e)$ 是一个含幺序半群.

定义 2[23]　设 $(L,*,e)$ 是一个交换的含幺序半群,其中 L 是完备格,如果运算 $*$ 对任意并分配,即 $a*$

收稿日期:2019-01-02
基金项目:国家自然科学基金项目(11871189);河北省高校科学技术研究项目重点项目(ZD2016047);河北省青年拔尖人才支持计划;河北省科技厅科技支撑计划(18210109D)资助
通讯作者:姚卫,男,汉族,博士,教授,研究方向:模糊数学及其应用,E-mail:yaowei0516@163.com.

$(\bigvee_{i\in I} b_i)=\bigvee_{i\in I} a*b_i(\forall a\in L,\forall\{b_i|i\in I\}\subseteq L)$;或等价地,存在蕴含算子$\rightarrow:L\times L\rightarrow L$使得$a*b\leqslant c\Leftrightarrow a\leqslant b\rightarrow c$ $(\forall a,b,c\in L)$,则称$(L,*,e)$是一个交换的单位 quantale.

例 1 (1) $([0,+\infty),\times,1])$和$([0,+\infty)^{op},+,1])$都是交换的含幺序半群.

(2) $([0,1],\times,1)$和$([0,1],\min,1)$是交换的单位 quantale.

(3) 设$L=\{0,a,b,1\}$是一个菱形格,即$0<a,b<1,a\parallel b$,规定$0*x=x*0=0,a*x=x*a=x(\forall x\in L)$,$b*b=b*1=1*b=b,1*1=1$,则$(L,*,a)$是一个交换单位的 quantale(还是幂等的且严格双侧的).用L^X表示集合X上的L-模糊子集(即从X到L的映射)的全体[24].

1 模糊划分与模糊等价关系的一一对应性

在本节中,我们假定$(L,*,e)$是一个交换的含幺序半群.

定义 3 设X是一个非空集,映射$R:X\times X\rightarrow L$称为X上的一个模糊等价关系,如果

(R1) 自反性:$\forall x\in X,R(x,x)\geqslant e$;

(R2) 对称性:$\forall x,y\in X,R(x,y)=R(y,x)$;

(R3) 传递性:$\forall x,y,z\in X,R(x,y)*R(y,z)\leqslant R(x,z)$.

定义 4 非空集X的模糊子集族$\Phi\subseteq L^X$称为X上的一个模糊划分,如果

(P1) 对于任意的$C\in\Phi$,存在$x\in X$使得$C(x)\geqslant e$;

(P2) 对于任意的$x\in X$,存在$C\in\Phi$使得$C(x)\geqslant e$;

(P3) 对于任意的$C_1,C_2\in\Phi$和$x_1,x_2\in X$,有$C_1(x_1)*C_2(x_1)*C_1(x_2)\leqslant C_2(x_2)$.

注 1 设Φ是非空集X上的一个模糊划分,则

(P3′) 对于任意的$C_1,C_2\in\Phi$和$x_1,x_2\in X$,$C_1(x_1)*C_2(x_1)*C_2(x_2)\leqslant C_1(x_2)$.

证明 我们只需要交换C_1和C_2就完成了(P3)和(P3′)的相互转化.

我们称(P3)和(P3′)为"三换一"规则.

命题 1 设Φ是非空集X上的一个模糊划分,则对任意的$x\in X$都存在唯一的$C_x\in\Phi$使得$C_x(x)\geqslant e$.

证明 对任意的$x\in X$,设有$C_1,C_2\in\Phi$使得$C_2(x)\geqslant e$和$C_1(x)\geqslant e$.对任意的$y\in X$,由三换一规则,$C_1(y)=e*e*C_1(y)\leqslant C_1(x)*C_1(x)*C_2(y)\leqslant C_2(y)$.则$C_1\leqslant C_2$.同理,$C_2\leqslant C_1$.因此$C_1=C_2$.

在下文中,我们假设R是非空集X上的一个模糊等价关系.对于任意的$x\in X$,定义映射$[x]_R:X\rightarrow L$为$[x]_R(y)=R(x,y)$,称为x在R下的模糊等价类.

命题 2 设R是非空集X上的一个模糊等价关系,则$\Phi_R=\{[x]_R|x\in X\}$是一个模糊划分.

证明 显然,$[x]_R(x)=R(x,x)\geqslant e$,则(P1)和(P2)成立.由$R$的对称性和传递性,对于任意的$a,b,x,y\in X$有,$[x]_R(a)*[y]_R(a)*[x]_R(b)=R(x,a)*R(y,a)*R(x,b)\leqslant R(y,b)=[y]_R(b)$,从而(P3)成立.因此$\Phi_R=\{[x]_R|\forall x\in X\}$是一个模糊划分.

命题 3 设Φ是非空集X上的一个模糊划分,则对于任意的$x,y\in X$都有$C_x(y)=C_y(x)$.

证明 由三换一规则,$C_x(y)=C_x(y)*e*e\leqslant C_x(y)*C_y(y)*C_x(x)\leqslant C_y(x)$.同理,$C_x(y)\geqslant C_y(x)$因此,$C_x(y)=C_y(x)$.

设$\Phi\subseteq L^X$是一个模糊划分,定义$R_\Phi:X\times X\rightarrow L$为$R_\Phi(x,y)=C_x(y)(\forall x,y\in X)$.

命题 4 设Φ是非空集X上的一个模糊划分,则R_Φ是一个模糊等价关系.

证明 (R1) 由命题 1 易得.(R2) 由命题 3 易得.

(R3) 对于任意的$x,y,z\in X$,

$$R_\Phi(x,y)*R_\Phi(y,z)=C_y(x)*C_y(z)=C_y(x)*e*C_y(z)\leqslant C_y(x)*C_x(a)*C_y(z)\leqslant C_x(z)=R_\Phi(x,z).$$

因此,R_Φ是一个模糊等价关系.

引理 1 设Φ_R是非空集X上的一个模糊划分,有$C_x=[x]_R$,其中C_x为命题 1 中模糊划分对应的模糊子集.

证明 对于任意$x\in X$,有$[x]_R(x)=R(x,x)\geqslant e$,由命题 1 中的唯一性可知,$C_x=[x]_R$.

引理 2　设 Φ_{R_Φ} 是非空集 X 上的一个模糊划分，有 $C_x=[x]_{R_\Phi}$ 其中 C_x 为命题 1 中模糊划分对应的模糊子集.

证明　对于任意的 $y\in X$，有 $[x]_{R_\Phi}(y)=R_\Phi(x,y)=C_x(y)$. 因此，$[x]_{R_\Phi}=C_x$.

定理 1　设 R 是非空集 X 上的一个模糊等价关系，Φ 是非空集 X 上的一个模糊划分，则(1) $R_{\Phi_R}=R$；(2) $\Phi_{R_\Phi}=\Phi$. 因此，模糊等价关系和模糊划分之间存在一一对应性.

证明　(1) 对于任意的 $x,y\in X$，在 Φ_R 中，由于 $[x]_R(x)=R(x,x)\geqslant e$，由命题 1 中的唯一性知 $C_x^{\Phi_R}=C_x$，故 $R_{\Phi_R}(x,y)=C_x^{\Phi_R}(y)=C_x(y)=[x]_R(y)=R(x,y)$. 因此，$C^{\Phi_R}=R$.

(2) 首先，$\Phi_{R_\Phi}=\{[x]_{R_\Phi}\mid x\in X\}$. 由引理 2，对于任意的 $x\in X$，$[x]_{R_\Phi}=C_x$. 则 $\Phi_{R_\Phi}\subseteq\Phi$. 其次，对于任意的 $C\in\Phi$，存在 $x\in X$ 使得 $C(x)\geqslant e$，我们有 $C=C_x=[x]_{R_\Phi}$. 从而 $\Phi_{R_\Phi}\supseteq\Phi$. 因此，$\Phi_{R_\Phi}=\Phi$.

2　模糊划分诱导的模糊粗糙近似算子

在本节中，我们研究由模糊划分诱导的粗糙近似算子的性质. 虽然由模糊等价关系和模糊划分的等价性可以知道，模糊划分诱导粗糙近似算子在本质上和模糊等价关系诱导的粗糙近似算子在本质上没有差别，但是由模糊划分诱导粗糙近似算子有它们独特的性质，这些性质可以应用到覆盖型模糊粗糙集理论的研究中去. 我们假设 L 是一个交换的单位 quantale. 设 $C,A\in L^X$，令 $Sub_X(C,A)=\bigwedge\limits_{x\in X}(C(x)\rightarrow A(x))$，其取值描述为 C 是 A 的子集的程度；令 $Mt_X(C,A)=\bigvee\limits_{x\in X}(C(x)*A(x))$，其取值描述为 C 和 A 有非空的交的程度.

定义 5　设 X 是一个非空集，Φ 是 X 上的一个模糊划分. 定义两个映射 $\underline{apr}_R$，$\overline{apr}_R$：$L^X\rightarrow L^X$ 分别为

(O1) $\underline{apr}_\Phi(A)(x)=\bigwedge\limits_{C\in\Phi}(C(x)\rightarrow Sub_X(C,A))$；(O2) $\overline{apr}_\Phi(A)(x)=\bigvee\limits_{C\in\Phi}(C(x)*Mt_X(C,A))$，

称为由模糊划分 Φ 诱导的上、下粗糙近似算子. 有意思地是，这两个粗糙近似算子还有如下描述方式.

定理 2　设 Φ 是非空集 X 上的一个模糊划分，则对于任意的 $A\in L^X$ 和 $x\in X$，有

(O3) $\underline{apr}_\Phi(A)(x)=\bigvee\limits_{C\in\Phi}(C(x)*Sub_X(C,A))$；(O4) $\overline{apr}_\Phi(A)(x)=\bigwedge\limits_{C\in\Phi}(C(x)\rightarrow Mt_X(C,A))$.

证明　(O3) 首先，对于任意的 $C_1,C_2\in\Phi$ 和 $y\in X$，由三换一规则有 $C_1(x)*(\bigwedge\limits_{z\in X}C_1(z)\rightarrow A(z))*C_2(x)*C_2(y)\leqslant C_1(x)*C_2(x)*C_2(y)*(C_1(y)\rightarrow A(y)\leqslant C_1(x)*(C_1(y)\rightarrow A(y))\leqslant A((y)$，从而 $C_1(x)*(\bigwedge\limits_{z\in X}C_1(z)\rightarrow A(z))\leqslant(C_2(x)*C_2(y))\rightarrow A(y)$. 因此，$\bigvee\limits_{C\in X}C(x)*(\bigwedge\limits_{y\in X}C(y)\rightarrow A(y))\leqslant\bigwedge\limits_{C\in\Phi,y\in X}(C(x)*C(y))\rightarrow A(y)$.

其次，对于任意的 $C\in\Phi$，$y\in X$，由 $C_x(x)\geqslant e$ 得 $\bigwedge\limits_{C\in\Phi,y\in X}(C(x)*C(y))\rightarrow A(y))\leqslant\bigwedge\limits_{y\in X}(C_x(x)*C_x(y))\rightarrow A(y)\leqslant\bigwedge\limits_{y\in X}C_x(y)\rightarrow A(y)\leqslant C_x(y)*\bigwedge\limits_{y\in X}C(y)\rightarrow A(y)\leqslant\bigvee\limits_{C\in\Phi}C(x)*(\bigwedge\limits_{y\in X}C(y)\rightarrow A(y))$.

因此，$\underline{apr}_\Phi(A)(x)=\bigwedge\limits_{C\in\Phi,y\in X}(C(x)*C(y))\rightarrow A(y)=\bigvee\limits_{C\in\Phi}C(x)*(\bigwedge\limits_{y\in X}C(y)\rightarrow A(y))=\bigvee\limits_{C\in\Phi}C(x)*Sub_X(C,A)$.

(O4) 首先，对于任意的 $C_1,C_2\in\Phi$ 和 $y\in X$，由三换一规则有

$$C_1(x)*C_1(y)*A(y)*C_2(x)\leqslant C_2(y)*A(y)\leqslant\bigvee_{z\in X}C_2(z)*A(z),$$

从而 $C_1(x)*C_1(y)*A(y)\leqslant C_2(x)\rightarrow\bigvee\limits_{z\in X}C_2(z)*A(z)$. 故

$$\bigwedge_{C\in\Phi}C(x)\rightarrow(\bigvee_{y\in X}C(y)*A(y))\geqslant\bigvee_{C\in\Phi,y\in X}(C(x)*C(y))*A(y).$$

其次，对于任意的 $C\in\Phi$，$y\in X$，由 $C_x(x)\geqslant e$ 得，$\bigwedge\limits_{C\in\Phi}C(x)\rightarrow(\bigvee\limits_{y\in X}C(y)*A(y))\leqslant C_x(x)\rightarrow(\bigvee\limits_{y\in X}C_x(y)*A(y))\leqslant\bigvee\limits_{y\in X}C_x(y)*A(y)\leqslant C_x(x)*\bigvee\limits_{y\in X}C_x(y)*A(y)\leqslant\bigvee\limits_{C\in\Phi}C(x)*(\bigvee\limits_{y\in X}C(y)*A(y))=\bigvee\limits_{C\in\Phi,y\in X}(C(x)*C(y))*A(y)$. 因此，$\overline{apr}_\Phi(A)(x)=\bigwedge\limits_{C\in\Phi}C(x)\rightarrow(\bigvee\limits_{y\in X}C(y)*A(y))=\bigvee\limits_{C\in\Phi,y\in X}(C(x)*C(y))*A(y)=\bigwedge\limits_{C\in\Phi}C(x)\rightarrow Mt_X(C,A)$.

注 2　公式(O1,O3)解释为：$x\in\underline{apr}_\Phi(A)$ 当且仅当 $[x]\subseteq A$，当且仅当对于任意的 $C\in\Phi$，$x\in C$ 蕴含 $C\subseteq A$，当且仅当存在 $C\in\Phi$ 使得 $x\in C$ 且 $C\subseteq A$(注意 C 其实就是 $[x]$).

公式(O2,O4)解释为：$x\in\overline{apr}_\Phi(A)$ 当且仅当 $[x]\cap A\neq\varnothing$，当且仅当存在 $C\in\Phi$ 使得 $x\in C$ 且含 $C\cap A\neq\varnothing$，当且仅当对于任意的 $C\in\Phi$，$x\in C$ 蕴含 $C\cap A\neq\varnothing$(注意 C 其实就是 $[x]$).

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11:341-356.

[2] Pawlak Z. Rough Set:Theoretical Aspects of Reasoning about Data[M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1991.

[3] Liu G L. The axiomatization of the rough set upper approximation operations[J]. Fundamenta Informaticae,2006,69:331-342.

[4] Mi J S,Zhang W X. An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets[J]. Information Sciences,2004,160:235-249.

[5] Thiele H. On axiomatic characterization of fuzzy approximation operators I[C]. //Proceedings of the 2nd International Conference Rough Sets and Current Trends in Computing,Canada,2000,pp. 239-247.

[6] Thiele H. On axiomatic characterization of fuzzy approximation operators II[C]. //Proceedings of the 31st IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic,2001.

[7] Wu W Z,Mi J S,Zhang W X. Generalized fuzzy rough sets[J]. Information Sciences,2003,151:263-282.

[8] Wu W Z,Li T J,Gu S M. Using one axiom to characterize fuzzy rough approximation operators determined by a fuzzy implication operator [J]. Fundamenta Informaticae,2015,142:87-104.

[9] Wu W Z,Zhang W X. Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators[J]. Information Sciences,2004,159:233-254.

[10] Wu W Z,Leung Y,Mi J S. On characterizations of (I,T)-fuzzy rough approximation operators[J]. Fuzzy Sets and Systems,2005,154:76-102.

[11] Wu W Z,Xu Y H,Shao M W,et al. Axiomatic characterizations of (S,T)-fuzzy rough approximation operators[J]. Information Sciences, 2016,334/335:17-43.

[12] Morsi N N,Yakout M M. Axiomatics for fuzzy rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1998,100:327-342.

[13] Radzikowska A M. On lattice-based fuzzy rough sets[C]. //35 Years of Fuzzy Set Theory,Springer,2010.

[14] Radzikowska A M,Kerre E E. Fuzzy rough sets based on residuated lattices[J]. Lecture Notes in Computer Science,2004,3135:278-296.

[15] Wang C Y,Hu B Q. Fuzzy rough sets based on generalized residuated lattices[J]. Information Sciences,2013,248:31-49.

[16] She Y H,Wang G J. An axiomatic approach of fuzzy rough sets based on residuated lattices[J]. Computers and Mathematics with Applications,2009,58:189-201.

[17] Deng T Q,Chen Y M,Xu W L,et al. A novel approach to fuzzy rough sets based on a fuzzy covering[J]. Information Sciences,2007,177: 2308-2326.

[18] Ma L W. Two fuzzy covering rough set models and their generalizations over fuzzy lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems,2015,294:1-17.

[19] Feng T,Zhang S P,Mi J S. The reduction and fusion of fuzzy covering systems based on the evidence theory[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2012,53:87-103.

[20] Li T J,Leung Y,Zhang W X. Generalized fuzzy rough approximation operators based on fuzzy coverings[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2008,48:836-856.

[21] Yao W,She Y H,Lu L X. Metric-based L-fuzzy rough sets:Approximation operators and definable sets[J]. Knowledge-Based Systems, 2019,163:91-102.

[22] Belohlavek R. Fuzzy Relational Systems:Foundations and Principles[M]. New York:Kluwer Academic Publishers,2002.

[23] Rosenthal K I. Quantales and Their Applications[M]. Harlow:Longman House,1990.

[24] Yao W,Zhao B. A duality between Omega-categories and algebraic Omega-categories[J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science,2014,301:153-168.

Fuzzy Partitions and Fuzzy Rough Approximation Operators

YAO Wei CHEN Xiao-Qing

(School of Sciences,Hebei University of Science and Technology,Shijiazhuang 050018,China)

Abstract Considering an ordered monoid as the truth value table,this paper introduces a definition of fuzzy partitions. It is shown that there is a one-to-one correspondence between fuzzy partitions and fuzzy equivalence relations. The properties of fuzzy rough approximation operators induced by fuzzy partitions are studied.

Key words ordered monoid; fuzzy partition; fuzzy equivalence relation; fuzzy rough approximation operator