文章编号　1672-6634(2019)04-0081-14　　DOI　10.19728/j.issn1672-6634.2019.04.013

毕达哥拉斯不确定语言 Maclaurin 对称集成算子及其在多属性决策中的应用

刘政敏　赵晓兰　于远念

(山东财经大学 管理科学与工程学院,山东 济南 250014)

摘　要　毕达哥拉斯不确定语言变量是直觉不确定语言变量的拓展和一般化.针对毕达哥拉斯不确定语言变量的集成问题,首先结合语言刻度函数,提出新的毕达哥拉斯不确定语言变量运算法则和排序方法,克服已有运算存在的缺少封闭性和灵活性的不足.进而,提出了捕获多元关联关系的毕达哥拉斯不确定语言 Maclaurin 对称集成算子(PULMSM)及其加权形式(PULWMSM),并探讨其优良性质和特例.最后,提出一种基于 PULWMSM 的毕达哥拉斯不确定语言多属性决策方法,并通过实例来分析其合理性和有效性.

关键词　毕达哥拉斯不确定语言变量;Maclaurin 对称集成算子;语言刻度函数;多属性决策方法

中图分类号　O439　　**文献标识码**　A

0　引言

Atanassov[1]在经典模糊集概念的基础上增加了非隶属度函数表示,提出了直觉模糊集(Intuitionistic fuzzy set,IFS)的概念.IFS 可以同时刻画隶属度、非隶属度和犹豫度三方面的信息,能够更加灵活地描述模糊性和不确定性,其研究得到大量学者的关注,并取得丰硕的研究成果[2-4].然而,Yager[5]指出在实际问题中可能会存在 IFS 无法描述的情形,即隶属度和非隶属度之和大于 1.为解决此类问题,Yager 对 IFS 进行了扩展,提出了毕达哥拉斯模糊集(Pythagorean fuzzy set,PFS)的概念.作为 IFS 的扩展和一般化,PFS 允许隶属度和非隶属度之和大于等于 1,但平方和小于等于 1.显然,与 IFS 相比,PFS 有更大的隶属度表示空间和更强的模糊描述能力,可以使决策者更灵活地表达自己的观点或看法.

然而,PFS 和 IFS 类似,都只能描述隶属于和非隶属于某个特定模糊概念“好”或“坏”的程度,而其所属对象并不清晰具体[6].而在很多实际问题中,人们更习惯对某些属性做定性评价.例如,在评价某家餐厅的环境时,我们更习惯用“好”、“较好”、“一般”、“较差”、“差”等语言词来表述.因此,结合 PFS 和不确定语言变量,文献[6]提出毕达哥拉斯不确定语言集(Pythagorean uncertain linguistic set,PULS)的概念.PULS 是对现有语言术语集[7]、不确定语言集[8]和直觉不确定语言集[3]的扩展和一般化,可以同时描述不确定语言术语以及决策者对该语言术语的信心水平和犹豫程度,弥补了 PFS 和不确定语言集在信息描述中的不足,能够更加全面地表达决策者的真实想法.目前,与毕达哥拉斯不确定语言信息相关的多属性决策方法已经受到大量学者关注,并取得了一定的研究成果:Wei 等[9]将传统的算数平均算子、几何平均算子、优先算子以及幂算子扩展到毕达哥拉斯不确定语言环境,提出了毕达哥拉斯不确定语言算数平均算子(PULA)、毕达哥拉斯不确定语言几何平均算子(PULG)、毕达哥拉斯不确定语言优先算子(PULPA)以及毕达哥拉斯不确定语言幂算子(PULPA);Liu 等[10]将 Bonferroni 平均算子(BM)扩展到毕达哥拉斯不确定语言环境,提出毕达哥拉斯不确定语言 Bonferroni 平均算子(PULBM).尽管上述研究成果能够对毕达哥拉斯不确定语言变量

收稿日期:2018-12-08

基金项目:国家自然科学基金项目(71771140);山东省自然科学基金项目(ZR2017MG007);教育部人文社科规划项目(17YJA630065);山东省高等学校科研计划项目(J16LN25);山东省社会科学规划项目(17CTQJ04)资助

通讯作者:刘政敏,男,汉族,博士,副教授,研究方向:决策理论与优化方法,Email:lzm525@sdufe.edu.cn.

(Pythagorean uncertain linguistic variable,PULV)进行不同偏好的信息聚合,但是仍然存在以下不足:

(1) 现有 PULV 的运算法则缺少封闭性,且无法满足不同决策者的语义转换需求. 正如 Wang 等在文献[11]指出,现有的运算法则是直接基于语言下标进行的代数运算,虽然简单易用,但存在下标越界情况.

例如,设语言术语集 $S=\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6\}$ 和两个毕达哥拉斯不确定语言变量:$\widetilde{p}_1=\langle[\zeta_4,\zeta_5],(0.6,0.3)\rangle$,$\widetilde{p}_2=\langle[\zeta_3,\zeta_4],(0.7,0.4)\rangle$,根据文献[10]提出的运算法则,可得 $\widetilde{p}_1\oplus\widetilde{p}_2=\langle[\zeta_7,\zeta_9],(0.82,0.12)\rangle$. 显然,结果超过了 S 的上边界. 此外,现有运算法则假定相邻术语的语义偏差总是相等. 然而,在实际中,随着语言下标从中间向两端扩展,决策者可能认为相邻术语的语义偏差会增加或者减小,而不总是相等的. 例如,决策者可能认为"好"和"较好"之间语义距离小于"好"和"非常好"之间的语义距离. 现有运算法则无法满足决策者类似的语义需求.

(2) 已有的 PULV 集成方法均假设属性之间完全独立或者属性之间存在两两关联. 然而,在许多实际决策场景中,输入参数之间可能存在多元关联关系. 此时,已有的毕达哥拉斯不确定语言信息集成方法无法有效进行集成,难以得到准确的聚合结果.

因此,为解决上述问题,本文结合语言刻度函数,提出了新的毕达哥拉斯不确定语言变量的新的运算法则,以弥补现有运算法则在封闭性和语义转换方面的不足. 此外,捕获多元关联关系的经典 Maclaurin 对称集成算子(MSM)扩展到毕达哥拉斯不确定语言环境,提出毕达哥拉斯不确定语言 Maclaurin 对称集成算子(PULMSM)和毕达哥拉斯不确定语言加权 Maclaurin 对称集成算子(PULWMSM). 进而,基于 PULWMSM 提出一种新的多属性决策方法,并通过算例分析验证该方法的有效性和合理性.

1 预备知识

1.1 毕达哥拉斯模糊集

定义 1[12] 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$ 为任意非空集合,则在 X 上的 PFS 定义

$$P=\{\langle x,\mu_P(x),\nu_P(x)\rangle \mid x\in X\},\tag{1}$$

其中 $\mu_P(x):X\to[0,1]$ 和 $\nu_P(x):X\to[0,1]$ 分别代表元素 x 对集合 X 的隶属度和非隶属度,且满足约束条件 $0\leqslant\mu_P^2(x)+\nu_P^2(x)\leqslant1$,$0\leqslant\mu_P(x)\leqslant1$,$0\leqslant\nu_P(x)\leqslant1$,任给元素 x,$\pi_P(x)=1-\mu_P(x)-\nu_P(x)$ 称为 x 对集合 X 的犹豫度. $\langle\mu_P(x),\nu_P(x)\rangle$ 称为毕达哥拉斯模糊数,简记为 $p=\langle\mu_p,\nu_p\rangle$,$0\leqslant{\mu_p}^2+{\nu_p}^2\leqslant1$. 显然,与 IFS 相比,PFS 提供了更大的隶属度表示空间,可以使决策者更自由和灵活地表达观点. 设 $p_1=\langle\mu_1,\nu_1\rangle$,$p_2=\langle\mu_2,\nu_2\rangle$,$p=\langle\mu,\nu\rangle$ 为三个毕达哥拉斯模糊数,运算法则[12]

$$p_1\oplus p_2=\langle\sqrt{{\mu_1}^2+{\mu_2}^2-{\mu_1}^2{\mu_2}^2},\nu_1\nu_2\rangle,\ p_1\otimes p_2=\langle\mu_1\mu_2,\sqrt{{\nu_1}^2+{\nu_2}^2-{\nu_1}^2{\nu_2}^2}\rangle,$$

$$\lambda p=\langle\sqrt{1-(1-\mu^2)^\lambda},\nu^\lambda\rangle,\lambda>0,\ p^\lambda=\langle\mu^\lambda,\sqrt{1-(1-\nu^2)^\lambda}\rangle,\lambda>0,\ p^c=\langle\nu,\mu\rangle.$$

1.2 不确定语言变量

假定 $S=\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_t\}$ 是一个有限的离散语言术语集,集合内元素完全有序且 t 为偶数. 例如,令 $t=6$,可有 $S=\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6\}=\{$非常差,差,较差,一般,较好,好,非常好$\}$. 任给语言术语集 S,需要满足以下性质:(1) 有序性:当且仅当 $i>j$ 时,$\zeta_i>\zeta_j$;(2) 对称性:$Neg(\zeta_i)=\zeta_{t-i}$;(3) 最大元素:若 $i\geqslant j$,则有 $\max\{\zeta_i,\zeta_j\}=\zeta_i$;(4) 最小元素:若 $i\leqslant j$,则有 $\min\{\zeta_i,\zeta_j\}=\zeta_i$.

为减少计算过程中的信息丢失,Xu[13] 对上述离散性的语言评价集做进一步的扩展,提出连续性的语言术语集 $\bar{S}=\{\bar{\zeta}_i\mid i\in\mathbf{R}\}$. 显然,$\bar{S}$ 仍满足上述条件. 在实际评价过程中,语言评价值有时难以直接表达为某个特定的语言术语,而可能是介于两个语言术语之间,基于此,Xu[8] 进一步提出不确定语言变量的概念.

定义 2[8] 假定 $\widetilde{S}=[\zeta_\chi,\zeta_\delta]$,$\zeta_\chi,\zeta_\delta\in\bar{S}$,且满足条件 $0\leqslant\chi\leqslant\delta$,$\zeta_\chi$ 和 ζ_δ 分别是 $\bar{S}$ 的上限和下限,则 $\widetilde{S}$ 被称为不确定语言变量.

任给三个不确定语言变量 $\widetilde{S}_1=[\zeta_{\chi1},\zeta_{\delta1}]$,$\widetilde{S}_2=[\zeta_{\chi2},\zeta_{\delta2}]$,$\widetilde{S}=[\zeta_\chi,\zeta_\delta]$,则有运算法则[8]

(1) $\tilde{S}_1 \oplus \tilde{S}_2 = [\zeta_{\chi 1},\zeta_{\delta 1}] \oplus [\zeta_{\chi 2},\zeta_{\delta 2}] = [\zeta_{\chi 1+\chi 2},\zeta_{\delta 1+\delta 2}]$，(2) $\tilde{S}_1 \otimes \tilde{S}_2 = [\zeta_{\chi 1},\zeta_{\delta 1}] \otimes [\zeta_{\chi 2},\zeta_{\delta 2}] = [\zeta_{\chi 1\times\chi 2},\zeta_{\delta 1\times\delta 2}]$，(3) $\gamma\tilde{S} = \gamma[\zeta_{\chi},\zeta_{\delta}] = [\zeta_{\gamma\times\chi},\zeta_{\gamma\times\delta}]$，$\gamma\geqslant 0$，(4) $(\tilde{S})^{\gamma} = ([\zeta_{\chi},\zeta_{\delta}])^{\gamma} = [\zeta_{\chi^{\gamma}},\zeta_{\delta^{\gamma}}]$，$\gamma\geqslant 0$.

1.3　毕达哥拉斯不确定语言集

定义 3[10]　令 $X=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$ 为一给定的非空有限集，则在 X 上的毕达哥拉斯不确定语言集（*PULS*）有定义.

$$P=\{\langle[\zeta_{\chi(x)},\zeta_{\delta(x)}],(\mu_{\tilde{p}(x)},\nu_{\tilde{p}(x)})\rangle\},\zeta_{\chi(x)},\zeta_{\delta(x)}\in\bar{S},$$

其中$[\zeta_{\chi(x)},\zeta_{\delta(x)}]$表示不确定语言变量，且满足条件 $\chi(x)\leqslant\delta(x)$. $\mu_{\tilde{p}(x)}$ 和 $\nu_{\tilde{p}(x)}$ 分别代表 x 对毕达哥拉斯不确定语言变量$[\zeta_{\chi(x)},\zeta_{\delta(x)}]$的隶属度函数和非隶属度函数，且满足条件 $\mu_{\tilde{p}(x)},\nu_{\tilde{p}(x)}\in[0,1]$，$0\leqslant\mu_{\tilde{p}(x)}^2+\nu_{\tilde{p}(x)}^2\leqslant 1$. $\pi(x)=\sqrt{1-(\mu_{\tilde{p}(x)}^2+\nu_{\tilde{p}(x)}^2)}$ 称为是 x 的犹豫度，三元组$\langle[\zeta_{\chi(x)},\zeta_{\delta(x)}],(\mu_{\tilde{p}(x)},\nu_{\tilde{p}(x)})\rangle$称为毕达哥拉斯不确定语言变量.

任给三个毕达哥拉斯不确定语言变量 $\tilde{p}_1=\langle[\zeta_{\chi(\tilde{p}_1)},\zeta_{\delta(\tilde{p}_1)}],\mu_{\tilde{p}1},\nu_{\tilde{p}1}\rangle$，$\tilde{p}_2=\langle[\zeta_{\chi(\tilde{p}_2)},\zeta_{\delta(\tilde{p}_2)}],(\mu_{p2},\nu_{p2})\rangle$ 和 $\tilde{p}=\langle[\zeta_{\chi(\tilde{p})},\zeta_{\delta(\tilde{p})}],(\mu_{\tilde{p}},\nu_{\tilde{p}})\rangle$，文献[10]给出其运算法则如下：

(1) $\tilde{p}_1\oplus\tilde{p}_2=\langle[\zeta_{\chi(\tilde{p}_1)+\chi(\tilde{p}_2)},\zeta_{\delta(\tilde{p}_1)+\delta(\tilde{p}_2)}],(\sqrt{\mu_{\tilde{p}1}^2+\mu_{\tilde{p}2}^2-\mu_{\tilde{p}1}\mu_{\tilde{p}2}},\nu_{\tilde{p}1}\nu_{\tilde{p}2})\rangle$；

(2) $\tilde{p}_1\otimes\tilde{p}_2=\langle[\zeta_{\chi(\tilde{p}_1)\times\chi(\tilde{p}_2)},\zeta_{\delta(\tilde{p}_1)\times\delta(\tilde{p}_2)}],(\mu_{\tilde{p}1}\mu_{\tilde{p}2},\sqrt{\nu_{\tilde{p}1}^2+\nu_{\tilde{p}2}^2-\nu_{\tilde{p}1}\nu_{\tilde{p}2}})\rangle$；

(3) $\gamma\tilde{p}=\langle[\zeta_{\gamma\times\chi(\tilde{p})},\zeta_{\gamma\times\delta(\tilde{p})}],(\sqrt{1-(1-\mu_{\tilde{p}}^2)^{\gamma}},(\nu_{\tilde{p}})^{\gamma})\rangle$，$\gamma\geqslant 0$；

(4) $\tilde{p}^{\gamma}=\langle[\zeta_{(\chi(\tilde{p}))^{\gamma}},\zeta_{(\delta(\tilde{p}))^{\gamma}}],((\mu_{\tilde{p}})^{\gamma},\sqrt{1-(1-\nu_{\tilde{p}}^2)^{\gamma}})\rangle$，$\gamma\geqslant 0$；

(5) $\tilde{p}^{c}=\langle[\zeta_{\chi(\tilde{p})},\zeta_{\delta(\tilde{p})}],(\nu_{\tilde{p}},\mu_{\tilde{p}})\rangle$.

1.4　Maclaurin 对称平均算子

Maclaurin 对称平均算子[14]（MSM）最早由麦克劳林提出，相比传统的 Bonferroni 平均[15]（BM）、Heronian 平均[16]（HM）等算子，MSM 可以处理多输入参数之间的关联关系，而 BM、HM 算子则通常只能处理两个参数之间的关联关系. 因此，MSM 在进行信息融合时，具有更强的灵活性和普适性.

定义 4[14]　假设 $\theta_i(i=1,2,\cdots,n)$为任意非负实数集，如果

$$MSM^{(k)}(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)=\left(\frac{\sum\limits_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n}\prod\limits_{j=1}^{k}\theta_{i_j}}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}},\tag{2}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$. $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$表示遍历$(1,2,\cdots,n)$之后得到的所有的 k 元组合，C_n^k 代表二项式系数，则称 $MSM^{(k)}$ 为 Maclaurin 对称平均算子. 从上式可以看出，$MSM^{(k)}$ 具有优良性质：(1) $\mathrm{MSM}^{(k)}(0,0,\cdots,0)=0$，(2) $\mathrm{MSM}^{(k)}(1,1,\cdots,1)=1$，(3) 假设任给 $i\in[1,n]$，都有 $\eta_i\leqslant\theta_i$，则 $MSM^{(k)}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\leqslant MSM^{(k)}(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$，(4) 任给 $i\in[1,n]$，有$\min\limits_{i=1}^{n}\{\theta_i\}\leqslant MSM^{(k)}(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\leqslant\max\limits_{i=1}^{n}\{\theta_i\}$.

2　毕达哥拉斯不确定语言变量新的操作

2.1　毕达哥拉斯不确定语言变量新的运算法则

目前，关于毕达哥拉斯不确定语言变量的运算法则存在两个问题：一是缺少封闭性，存在语言下标越界现象；二是无法满足决策者不同的语言转换需求. 因此，本文结合语言刻度函数的概念，提出了新的毕达哥拉斯不确定语言变量的运算法则.

定义 5[11]　设 $S=\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_t\}$为任意语言术语集，任给实数 $\xi_\kappa\in R^*(\kappa=0,1,2,\cdots,t)$，语言刻度函数为 ζ_κ 到 ξ_κ 的映射，记作

$$\zeta:\zeta_\kappa\rightarrow\xi_\kappa,\kappa=0,1,2,\cdots,t,\tag{3}$$

其中 $0\leqslant\xi_0\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2\cdots\leqslant\xi_t$. ξ_κ 表示决策者对 ζ_κ 的语义偏好. 显然，函数 ζ 是关于语言下标 k 的严格单调递增

函数.为了满足决策者不同的语义转换,Wang[11]等总结出三种不同的语言刻度函数

$$\zeta(\zeta_\kappa)=\xi_\kappa=\frac{\kappa}{t},\kappa=0,1,\cdots,t,0\leqslant\xi_\kappa\leqslant 1. \tag{4}$$

$$\zeta(\zeta_\kappa)=\xi_\kappa=\begin{cases}\dfrac{\theta^{\frac{t}{2}}-\theta^{\frac{t}{2}-\kappa}}{2\theta^{\frac{t}{2}}-2},\kappa\in\left[0,\dfrac{t}{2}\right];\\ \dfrac{\theta^{\frac{t}{2}}+\partial^{\kappa-\frac{t}{2}}-2}{2\theta^{\frac{t}{2}}-2},\kappa\in\left(\dfrac{t}{2},t\right].\end{cases} \tag{5}$$

$$\zeta(\zeta_\kappa)=\xi_\kappa=\begin{cases}\dfrac{\left(\dfrac{t}{2}\right)^{\varepsilon}-\left(\dfrac{t}{2}-\kappa\right)^{\varepsilon}}{2\left(\dfrac{t}{2}\right)^{\varepsilon}},\kappa\in\left[0,\dfrac{t}{2}\right];\\ \dfrac{\left(\dfrac{t}{2}\right)^{\varphi}+\left(\kappa-\dfrac{t}{2}\right)^{\varphi}}{2\left(\dfrac{t}{2}\right)^{\varphi}},\kappa\in\left(\dfrac{t}{2},t\right].\end{cases} \tag{6}$$

上述三种不同的语言刻度函数分别具有不同的语言转换特点.式(4)是基于语言下标函数 $I(\zeta_\kappa)=\kappa$ 的简单平均语言刻度函数,该函数虽然简单易懂且被广泛使用,但是缺乏合理的理论依据.式(5)基于指数刻度和一n一n 刻度,当术语从语言集中间向两端扩张时,相邻语言术语的绝对偏差逐渐增大.例如,"好"和"较好"之间语义距离小于"好"和"非常好"之间的语义距离.其中参数$\partial=\sqrt[t+1]{\ell}$ (ℓ 代表重要程度比例,$\ell\leqslant 9$),例如令 $\ell=9,t=6$,则有 $\theta=\sqrt[7]{9}\approx 1.37$.式(6)结合前景理论中的价值函数,当术语从语言集中间向两端扩展时,相邻语言术语的绝对偏差逐渐降低.例如,"好"和"较好"之间距离大于"好"和"非常好"之间的距离.其中 $\varepsilon,\varphi\in[0,1]$.特别地,当 $\varepsilon=\varphi=1$ 时,式(6)退化为式(4).

为了减少计算过程中的信息丢失,语言刻度函数 ζ 可以进一步扩展到连续空间,记作 $\bar{\zeta}:\bar{\zeta}_k\in R^*$,且满足条件 $\bar{\zeta}(\zeta_k)=\xi_k$,$\bar{\zeta}^{-1}$ 称作 $\bar{\zeta}$ 的逆函数,有 $\bar{\zeta}^{-1}(\xi_k)=\zeta_k$.结合语言刻度函数的概念,本文提出毕达哥拉斯不确定语言变量新的运算法则,以弥补原有运算法则在封闭性和灵活性上的不足.

定义 6 任给毕达哥拉斯不确定语言变量 $\tilde{p}_1=\langle[\zeta_{\chi(\tilde{p}_1)},\zeta_{\delta(\tilde{p}_1)}],\mu_{\tilde{p}1},\upsilon\tilde{p}_1\rangle$,$\tilde{p}_2=\langle[\zeta_{\chi(\tilde{p}_2)},\zeta_{\delta(\tilde{p}_2)}],\mu_{\tilde{p}2},\upsilon\tilde{p}_2\rangle$ 和 $\tilde{p}=\langle[\zeta_{\chi(\tilde{p})},\zeta_{\delta(\tilde{p})}],\mu_{\tilde{p}},\upsilon\tilde{p}\rangle$,$\gamma\geqslant 0$,则毕达哥拉斯不确定语言的新的运算法则

$$\tilde{p}_1\hat{\oplus}\tilde{p}_2=\langle[\zeta^{-1}(\sqrt{(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(\tilde{p}_1)}))^2+(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(\tilde{p}_2)}))^2}-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(\tilde{p}_1)}))^2(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(\tilde{p}_2)}))^2)],$$
$$\zeta^{-1}[\sqrt{(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(\tilde{p}_1)}))^2+(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(\tilde{p}_2)}))^2}-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(\tilde{p}_1)}))^2(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(\tilde{p}_2)}))^2],(\sqrt{\mu_{\tilde{p}_1}^2+\mu_{\tilde{p}_2}^2-\mu_{\tilde{p}_1}^2\mu_{\tilde{p}_2}^2},\upsilon_{\tilde{p}_1}\upsilon_{\tilde{p}_2})\rangle;$$

$$\tilde{p}_1\hat{\oplus}\tilde{p}_2=\langle[\zeta^{-1}(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(\tilde{p}_1)})\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(\tilde{p}_2)})),\zeta^{-1}(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(\tilde{p}_1)})\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(\tilde{p}_2)}))],(\mu_{\tilde{p}_1}\mu_{\tilde{p}_2},\sqrt{\upsilon_{\tilde{p}_1}^2+\upsilon_{\tilde{p}_2}^2-\upsilon_{\tilde{p}_1}^2\upsilon_{\tilde{p}_2}^2})\rangle,$$
$$\gamma\tilde{p}\langle[\zeta^{-1}(\sqrt{1-(1-(\zeta(\zeta_{\chi(\tilde{p})}))^2)^\gamma}),\zeta^{-1}(\sqrt{1-(1-(\zeta(\zeta_{\delta(\tilde{p})}))^2)^\gamma})],(\sqrt{1-(1-\mu_{\tilde{p}}^2)^\gamma},(\upsilon\tilde{p})^\gamma)\rangle;$$

$$\tilde{p}^\gamma=\langle[\zeta^{-1}(\zeta(\zeta_{\chi(\tilde{p})})^\gamma),\zeta^{-1}(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(\tilde{p})})^\gamma)],((\mu\tilde{p})^\gamma,\sqrt{1-(1-\upsilon^2\tilde{p})^\gamma})\rangle.$$

设语言术语集 $S=\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6\}$ 和两个毕达哥拉斯不确定语言变量 $\tilde{p}_1=\langle[\zeta_4,\zeta_5],(0.6,0.3)\rangle$,$\tilde{p}_2=\langle[\zeta_3,\zeta_4],(0.7,0.4)\rangle$,根据文献[10]提出的运算法则,可得 $\tilde{p}_1\oplus\tilde{p}_2=\langle[\zeta_7,\zeta_9],(0.82,0.12)\rangle$,明显存在下标越界情况,而根据上述新的运算法则,基于式(4)可得 $\tilde{p}_1\oplus\tilde{p}_2=\langle[\zeta_{4.58},\zeta_{5.46}],(0.82,0.12)\rangle$.由此可见,新的运算法则不仅可以满足决策者不同语义转换需求,也可以保证运算封闭性,更为合理和有效.

2.2 毕达哥拉斯不确定语言变量比较方法

定义 7 任给毕达哥拉斯不确定语言变量 $\tilde{p}=\langle[\zeta_{p1},\zeta_{p2}],(\mu_{\tilde{p}},\upsilon_{\tilde{p}})\rangle$,则 $\tilde{p}$ 的期望值 $E(\tilde{p})$ 定义

$$E(\tilde{p})=\frac{(\mu_{\tilde{p}}^2+1-\upsilon_{\tilde{p}}^2)\times\zeta\left(\dfrac{\zeta_{p1+p2}}{2}\right)}{2}. \tag{7}$$

定义 8 任给毕达哥拉斯不确定语言变量 $\tilde{p}=\langle[\zeta_{p1},\zeta_{p2}],(\mu_{\tilde{p}},\upsilon_{\tilde{p}})\rangle$,则 $\tilde{p}$ 的得分函数 $S(\tilde{p})$ 和准确度函

数 $H(\tilde{p})$ 定义

$$S(\tilde{p})=\zeta\left(\frac{\zeta_{p1+p2}}{2}\right)\times(\mu^2\tilde{p}-v^2\tilde{p}), \tag{8}$$

$$H(\tilde{p})=\zeta\left(\frac{\zeta_{p1+p2}}{2}\right)\times(\mu^2\tilde{p}-v^2\tilde{p}). \tag{9}$$

定义 9　任给毕达哥拉斯不确定语言变量 $\tilde{p}_1=\langle[\zeta_{\chi(\tilde{p}_1)},\zeta_{\delta(\tilde{p}_1)}],(\mu_{\tilde{p}1},v_{\tilde{p}2})\rangle$, $\tilde{p}_2\langle[\zeta_{\chi(\tilde{p}2)},\zeta_{\delta(\tilde{p}2)}],(\mu_{p2},v_{p2})\rangle$,其大小比较规则(1)若 $E(\tilde{p}_1)>E(\tilde{p}_2)$,则有 $\tilde{p}_1>\tilde{p}_2$;(2)若 $E(\tilde{p}_1)=E(\tilde{p}_2)$, $S(\tilde{p}_1)=S(\tilde{p}_2)$,则有 $\tilde{p}_1>\tilde{p}_2$;(3)若 $E(\tilde{p}_1)=E(\tilde{p}_2)$, $S(\tilde{p}_1)=S(\tilde{p}_2)$,那么若 $H(\tilde{p}_1)>H(\tilde{p}_2)$,则有 $\tilde{p}_1>\tilde{p}_2$;若 $H(\tilde{p}_1)=H(\tilde{p}_2)$,则有 $\tilde{p}_1=\tilde{p}_2$.

3　毕达哥拉斯不确定语言 Maclaurin 对称集成算子

3.1　毕达哥拉斯不确定语言 Maclaurin 对称集成算子

定义 10　设 $P_i=\langle[\zeta_{\chi(x)},\zeta_{\delta(x)}],(\mu_{pi},v_{pi})\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯不确定语言变量,$k=1,2,\cdots,n$,则存在映射 PULMSM:$\Omega^n\to\Omega$,且有

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\left(\frac{\bigoplus\limits_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n}\prod\limits_{j=1}^{k}\theta_{i_j}}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}}, \tag{10}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$. $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 表示遍历 $(1,2,\cdots,n)$ 之后得到的所有的 k 元组合,C_n^k 代表二项式系数,Ω 表示毕达哥拉斯不确定语言变量集合,则 $\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 称为毕达哥拉斯不确定语言 Maclaurin 对称集成算子.

定理 1　设 $P_i=\langle[\zeta_{\chi(pi)},\zeta_{\delta(pi)}],(\mu_{pi},v_{pi})\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯不确定语言变量,$k=1,2,\cdots,n$,可得 $\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 算子的聚合结果仍然是毕达哥拉斯不确定语言变量,且有

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\langle[\zeta_\varepsilon,\zeta_\varphi],(\mu_\sigma,v_\sigma)\rangle, \tag{11}$$

其中 $\zeta_\varepsilon=\zeta\left(\left(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod\limits_{j=1}^{k}(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$, $\zeta_\varphi=\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod\limits_{j=1}^{k}(\bar{\zeta}(\zeta_{\varphi(p_{ij})}))^2\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$,

$\mu_\sigma=\left(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod\limits_{j=1}^{k}(\mu_{p_{ij}})^2\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)^{\frac{1}{k}}$, $v_\sigma=\sqrt{1-\left(1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod\limits_{j=1}^{k}(1-(v_{p_{ij}})^2)\right)^{\frac{1}{C_n^k}}\right)^{\frac{1}{k}}}$.

证明　基于新的毕达哥拉斯不确定语言运算法则,可以得到

$$\prod_{j=1}^{k}p_{ij}=\left\langle\left[\zeta^{-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})})\right),\zeta^{-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\bar{\zeta}(\zeta_{\varphi(p_{ij})})\right)\right],\left(\prod_{j=1}^{k}\mu_{p_{ij}},\sqrt{1-\prod_{j=1}^{k}(1-(v_{p_{ij}})^2)}\right)\right\rangle,$$

进一步有

$$\bigoplus_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n}\prod_{j=1}^{k}p_{i_j}=\left\langle\left[\zeta^{-1}\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2\right)}\right),\zeta^{-1}\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^2\right)}\right)\right]\right.$$
$$\left.\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}(\mu_{p_{ij}})^2\right)},\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\sqrt{1-\prod_{j=1}^{k}(1-(v_{p_{ij}})^2)}\right)\right\rangle,$$

$$\frac{\bigoplus\limits_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n}\prod\limits_{j=1}^{k}p_{i_j}}{C_n^k}=\left\langle\begin{bmatrix}\zeta^{-1}\left(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod\limits_{j=1}^{k}(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right),\\ \zeta^{-1}\left(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod\limits_{j=1}^{k}(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^2\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}(\mu_{p_{ij}})^2\right)^{\frac{1}{C_n^k}}},\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\sqrt{1-\prod_{j=1}^{k}(1-(v_{p_{ij}})^2)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)\right\rangle,$$

因此

$$\left(\frac{\bigoplus\limits_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant n}\prod\limits_{j=1}^{k}p_{i_j}}{C_n^k}\right)=\left\langle\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)^{\frac{1}{k}},\right.\right.\right.$$

$$\zeta^{-1}\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\delta(p_{ij})}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}^{\frac{1}{k}}\right)\Big],\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(\mu_{p_{ij}}\right)^2\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}^{\frac{1}{k}},$$

$$\sqrt{1-\left(1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-\left(v_{p_{ij}}\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{C_n^k}}\right)^{\frac{1}{k}}}\Big\rangle.$$

示例1 设 $p_1=\langle[\zeta_3,\zeta_5],(0.6,0.5)\rangle$，$p_2=\langle[\zeta_1,\zeta_2],(0.7,0.4)\rangle$，$p_3=\langle[\zeta_4,\zeta_5],(0.3,0.6)\rangle$ 为三个毕达哥拉斯不确定语言变量，令 $k=2$，语言刻度函数采用式(4)所示的简单平均刻度函数，利用 PULMSM 算子进行聚合，则有

$$p_1\otimes p_2=\langle[\zeta_{\frac{3\times1}{7}},\zeta_{\frac{5\times2}{7}}],(0.6\times0.7,\sqrt{0.5^2+0.4^2-0.5^2\times0.4^2})\rangle=\langle[\zeta_{0.4286},\zeta_{1.4285}],(0.42,0.6083)\rangle,$$

$$p_1\otimes p_3=\langle[\zeta_{\frac{3\times4}{7}},\zeta_{\frac{5\times5}{7}}],(0.6\times0.3,\sqrt{0.5^2+0.6^2-0.5^2\times0.6^2})\rangle=\langle[\zeta_{1.7143},\zeta_{3.5714}],(0.18,0.7211)\rangle,$$

$$p_2\otimes p_3=\langle[\zeta_{\frac{1\times4}{7}},\zeta_{\frac{2\times5}{7}}],(0.7\times0.3,0.4^2+0.6^2-0.4^2\times0.6^2)\rangle=\langle[\zeta_{0.5714},\zeta_{1.4286}],(0.21,0.68)\rangle,$$

$$\mathrm{PULMSM}^{(2)}(p_1,p_2,p_3)=\left(\frac{\bigoplus\limits_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant 3}\prod\limits_{j=1}^{2}p_{i_j}}{C_3^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{(p_1\otimes p_2)\oplus(p_1\otimes p_3)\oplus(p_2\otimes p_3)}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\langle[\zeta_{2.73},\zeta_{4.12}],(0.53,0.51)\rangle.$$

很容易证明，毕达哥拉斯不确定语言 Maclaurin 对称集成算子具有以下性质.

定理2 设 $p_i=\langle[\zeta_{\chi(pi)},\zeta_{\delta(pi)}],(\mu_{pi},v_{pi})\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯不确定语言变量，$k=1,2,\cdots,n$，则 $\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 算子的性质

(1) 幂等性 设 $p_i=p=\langle[\zeta_{\chi(p)},\zeta_{\delta(p)}],(\mu_p,v_p)\rangle(i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p,p,\cdots,p)=p.$$

(2) 单调性 设 $p'_i=\langle[\zeta_{\chi(p'i)},\zeta_{\delta(p'i)}],(\mu_{p'i},v_{p'i})\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯不确定语言变量，若对于任意的 p_i 和 $p'_i(i=1,2,\cdots,n)$，都有 $\zeta_{\chi(p'i)}\leqslant\zeta_{\chi(pi)}$，$\zeta_{\delta(p'i)}\leqslant\zeta_{\delta(pi)}$，$\mu_{(p'i)}\leqslant\mu_{(pi)}$，且 $v_{(p'i)}\geqslant v_{(pi)}$ 则有

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p'_1,p'_2,\cdots,p'_n)\leqslant\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n).$$

(3) 有界性 设 $\zeta_{\chi^-}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\zeta_{\chi(pi)}\}$，$\zeta_{\chi^+}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\zeta_{\chi(pi)}\}$，$\zeta_{\delta^-}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\zeta_{\delta(pi)}\}$，$\zeta_{\delta^-}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\zeta_{\delta(pi)}\}$，$\mu^-=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\mu_{(pi)}\}$，$\mu^+=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\mu_{(pi)}\}$，$v^-=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{v_{(pi)}\}$，$v^+=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{v_{(pi)}\}$，则有

$$\langle[\zeta_{\chi^-},\zeta_{\delta^-}],(\mu^-,v^+)\rangle\leqslant\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)\leqslant\langle[\zeta_{\chi^-},\zeta_{\delta^+}],(\mu^+,v^-)\rangle.$$

(4) 交换性 设 $\hat{p}_i=p=\langle[\zeta_{\chi(\hat{p}i)},\zeta_{\delta(\hat{p}i)}],(\mu_{\hat{p}i},v_{\hat{p}i})\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯不确定语言变量，且为 $p_i=p=\langle[\zeta_{\chi(pi)},\zeta_{\delta(pi)}],(\mu_{pi},v_{pi})\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 的任意置换，则有

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\mathrm{PULMSM}^{(k)}(\hat{p}_1,\hat{p}_2,\cdots,\hat{p}_n).$$

当参数 k 取不同的值，可以得到 $\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 算子的不同特例.

情况1 当 $k=1$，即属性之间相互独立时，根据定义10和式(11)，可得

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\Big\langle\Big[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{1}\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\chi(p_{ij})}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)^{\frac{1}{1}}\right),$$

$$\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{1}\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\delta_{(p_{ij})}}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)^{\frac{1}{1}}\right)\Big],\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{1}\left(\mu_{p_{ij}}\right)^2\right)\frac{1}{C_n^k}}\right)^{\frac{1}{1}},\right.$$

$$\left.\sqrt{1-\left(\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{1}\left(1-\left(v_{p_{ij}}\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{C_n^k}}\right)^{\frac{1}{1}}}\right)\Big\rangle$$

$$=\Big\langle\Big[\zeta^{-1}\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\chi(p_{ij})}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}}\right),\zeta^{-1}\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\delta_{(p_{ij})}}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}}\right)\Big],$$

$$\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}\left(1-\left(\mu_{p_{ij}}\right)^2\right)\frac{1}{n}},\sqrt{\left(\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{1}\left(1-\left(v_{p_{ij}}\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{n}}\right)}\right)\Big\rangle$$

$$=\left(\left[\zeta^{-1}\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_i)}))^2)^{\frac{1}{n}}}\right),\zeta^{-1}\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_i)}))^2)^{\frac{1}{n}}}\right)\right],\right.$$

$$\left.\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-(\mu_{p_i})^2)\frac{1}{n}},\sqrt{\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}((v_{p_{ij}})^2))^{\frac{1}{n}}}\right)\right)=\mathrm{PULA}(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

从上式可以看出，当 $k=1$ 时，$\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 算子退化成毕达哥拉斯不确定语言平均算子(PULA)[9]，即 PULA 是 $\mathrm{PUPULMSM}^{(k)}$ 算子的一个特例.

情况 2　当 $k=2$ 时，根据定义 10 和公式(11)，有

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\left(\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{2}(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right),\right.\right.$$

$$\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{1}(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^2)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg],\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{2}(\mu_{p_{ij}})^2)\frac{1}{C_n^k}}\right)^{\frac{1}{2}},\right.$$

$$\left.\left.\sqrt{1-(\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{2}(1-(v_{p_{ij}})^2))^{\frac{1}{C_n^k}})^{\frac{1}{2}}}\right)\right)$$

$$=\left(\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})})\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{i2})}))^2)^{\frac{2}{n(n-1)}})}\right)^{\frac{1}{2}}\right),\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})})\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{i2})}))^2)^{\frac{2}{n(n-1)}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right],\right.$$

$$\left.\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-(\mu_{p_{ij}}\mu_{p_{ij}})^2)^{\frac{2}{n(n-1)}}},\sqrt{(\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{1}(1-(v_{p_{ij}})^2))^{\frac{2}{n(n-1)}})}\right)\right)$$

$$=\left(\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{i_n,i_2=1,i_1\neq i_2}((1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})})\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{i2})}))^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{n(n-1)}})}\right)^{\frac{1}{2}}\right),\right.\right.$$

$$\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{i_n,i_2=1,i_1\neq i_2}(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})})\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{i2})}))^2)^{\frac{2}{n(n-1)}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg],$$

$$\left.\left(\sqrt{1-\prod_{i_n,i_2=1,i_1\neq i_2}((1-(\mu_{p_{ij}}\mu_{p_{ij}})^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{n(n-1)}}},\sqrt{(\prod_{i_n,i_2=1,i_1\neq i_2}((1-\prod_{j=1}^{1}(1-(v_{p_{ij}})^2))^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{n(n-1)}})}\right)\right)$$

$$=\left(\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{i_n,i_2=1,i_1\neq i_2}(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})})\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{i2})}))^2)^{\frac{2}{n(n-1)}})}\right)^{\frac{1}{2}}\right),\right)\right)$$

$$\left(\left(\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{i_n,i_2=1,i_1\neq i_2}(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})})\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{i2})}))^2)^{\frac{2}{n(n-1)}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right],\right.$$

$$\left.\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-(\mu_{p_{ij}}\mu_{p_{ij}})^2)^{\frac{2}{n(n-1)}}},\sqrt{(\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{1}(1-(v_{p_{ij}})^2))^{\frac{2}{n(n-1)}})}\right)\right)$$

$$=\mathrm{PULBM}^{[1,1]}(p_1,p_2,\cdots,p_n).$$

由此可见，当 $k=2$ 时，$\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 算子退化成毕达哥拉斯不确定语言 Bonferroni 平均算子($p=q=1$)[10].

情况 3　当 $k=3$ 时，有

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\left(\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_n\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{1}(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2)^{\frac{1}{C_n^n}}}\right)^{\frac{1}{n}}\right),\right.\right.$$

$$\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_n\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{1}(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^2)^{\frac{1}{C_n^n}}}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\Bigg],\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_n\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{1}(\mu_{p_{ij}})^2)\frac{1}{C_n^n}}\right)^{\frac{1}{n}},\right.$$

$$\left.\left.\sqrt{1-(\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_n\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{1}(1-(v_{p_{ij}})^2))^{\frac{1}{C_n^n}})^{\frac{1}{n}}}\right)\right)$$

$$=\left(\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2))}\right)^{\frac{1}{n}}\right),\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^2))}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right],\right.$$

$$\left.\left(\left(\sqrt{1-(1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(\mu_{p_{ij}})^2))}\right)^{\frac{1}{n}},\left(\sqrt{(1-(1-(1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{1}(v_{p_{ij}})^2))))}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right)$$

$$=\left(\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{\prod_{j=1}^{n}(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_j)}))^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right),\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{\prod_{j=1}^{n}(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_j)}))^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right],\right.$$

$$(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}(1-(\mu_{p_i})^2)^{\frac{1}{n}}},\sqrt{\prod_{1\leqslant i_1\leqslant n}((v_{p_{ij}})^2))^{\frac{1}{n}}})]$$

$$=\mathrm{PULGA}(p_1,p_2,\cdots,p_n).$$

由此可见,当 $k=n$ 时,$\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 算子退化成毕达哥拉斯不确定语言几何算子(PULGA)[9],即 PULGA 是 $\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 算子的一个特例.

3.2 毕达哥拉斯不确定语言加权 Maclaurin 对称平均算子

$\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 在集成信息时只考虑了属性之间的关联关系,没有考虑到输入参数的重要性,然而在很多实际的决策问题中,属性权重在信息集成中起到很大的作用.下面,进一步提出 $\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 的加权形式.

定义 11 设 $P_i=\langle[\zeta_{\chi(x)},\zeta_{\delta(x)}],(\mu_{pi},v_{pi})\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯不确定语言变量,$\omega=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为输入参数 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量,$\omega_i\in[0,1](i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1,k=1,2,\cdots,n$,则存在映射 $\mathrm{PULWMSM}:\Omega^n\to\Omega$,且有

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\left(\frac{\bigoplus_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant n}\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}\otimes p_{ij}}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}},\tag{12}$$

则 $\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 被称为毕达哥拉斯不确定语言加权麦克劳林对称平均算子.其中,$k=1,2,\cdots,n.(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 表示遍历$(1,2,\cdots,n)$之后得到的所有的 k 元组合,C_n^k 代表二项式系数,Ω 表示毕达哥拉斯不确定语言变量的集合.

定理 3 设 $P_i=\langle[\zeta_{\chi(x)},\zeta_{\delta(x)}],(\mu_{pi},v_{pi})\rangle(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组毕达哥拉斯不确定语言变量,$\omega=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为参数 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量,$\omega_i\in[0,1](i=1,2,\cdots,n)$,且 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1,k=1,2,\cdots,n$,则 $\mathrm{PULMSM}^{(k)}$ 的聚合结果仍然是毕达哥拉斯不确定语言变量,且有

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2\cdots,p_n)=\langle[\zeta_{\varepsilon_\omega},\zeta_{\delta_\omega}],(\mu_\omega,v_\omega)\rangle,\tag{13}$$

其中 $\zeta_{\varepsilon\omega}=\zeta^{-1}\left((\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots,i_k\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{k}(1-(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2)^{\omega_i j}))^{\frac{1}{C_n^k}}})\frac{1}{k}\right)$,

$$\zeta_{\varepsilon\omega}=\zeta^{-1}\left((\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots,i_k\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{k}(1-(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^2)^{\omega_i j}))^{\frac{1}{C_n^k}}})\frac{1}{k}\right),$$

$$\mu_\omega=(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{k}(1-(1-(\mu_{p_{ij}})^2)^{\omega_{ij}}))^{\frac{1}{C_n^k}}})^{\frac{1}{k}},$$

$$v_\sigma=\sqrt{1-(1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_n\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{k}(1-(v_{p_{ij}})^{2\omega_{ij}}))^{\frac{1}{C_n^k}})\frac{1}{k}}.$$

证明 根据新的毕达哥拉斯不确定语言运算法则,可以得到

$$\omega_{ij}p_{ij}=\langle[\zeta^{-1}(\sqrt{1-(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2)^{\omega_{ij}}}),\zeta^{-1}(\sqrt{1-(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^2)^{\omega_{ij}}}),(\sqrt{1-(1-(\bar{\zeta}(\mu_{\chi(p_{ij})}))^2)^{\omega_{ij}}})]\rangle,$$

然后有

$$\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}p_{i_j}=\langle[\zeta^{-1}(\prod_{j=1}^{k}\sqrt{1-(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2)^{\omega_{ij}}}),\zeta^{-1}(\prod_{j=1}^{k}\sqrt{1-(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^2)^{\omega_{ij}}}),$$

$$(\sqrt{1-(1-(\bar{\zeta}(\mu_{\chi(p_{ij})}))^2)^{\omega_{ij}}},(v_{p_{ij}}{}^{\omega_i j}))]\rangle,$$

$$\bigoplus_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\prod_{j=1}^{k}\omega_{i_j}p_{i_j}=\langle[\zeta^{-1}(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{k}(1-(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2)^{\omega_{ij}}))}),$$

$$\zeta^{-1}(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{k}(1-(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^2)^{\omega_{ij}}))})],$$

$$(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}(1-\prod_{j=1}^{k}(1-(1-(\mu_{p_{ij}})^2)^{\omega_{ij}}))},\prod_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\sqrt{1-\prod_{j=1}^{k}(1-(v_{p_{ij}})^{2\omega_{ij}})})\rangle$$

$$\frac{\bigoplus\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\prod\limits_{j=1}^{k}\omega_{i_j}p_{i_j}}{C_n^k}=\Big(\Big[\zeta^{-1}\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{k}\big(1-\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big),$$

$$\zeta^{-1}\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{k}\big(1-\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)\Big],$$

$$\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{k}\big(1-\big(1-(\mu_{p_{ij}})^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}},\Big(\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\sqrt{1-\prod\limits_{j=1}^{k}\big(1-(v_{p_{ij}})^{2\omega_{ij}}\big)}\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}\Big)\Big),$$

进而有

$$\left(\frac{\bigoplus\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\prod\limits_{j=1}^{k}\omega_{i_j}p_{i_j}}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}}=\Big(\Big[\zeta^{-1}\Big(\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{k}\big(1-\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{k}}\Big),$$

$$\zeta^{-1}\Big(\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{k}\big(1-\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{k}}\Big)\Big],$$

$$\Big(\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{k}\big(1-\big(1-(\mu_{p_{ij}})^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{k}},\sqrt{1-\Big(1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<\cdots i_k\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{k}\big(1-(v_{p_{ij}})^{2\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}\Big)^{\frac{1}{k}}}\Big)\Big).$$

与 PULMSM$^{(k)}$ 类似,接下来进一步讨论参数 k 取不同值时 PULWMSM 算子的形式变化.

情况 1　当 $k=1$,根据公式(13)可得

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\Big(\Big[\zeta^{-1}\Big(\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{1}\big(1-\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{1}}\Big),$$

$$\zeta^{-1}\Big(\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{1}\big(1-\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{1}}\Big),$$

$$\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{k}\big(1-\big(1-(\mu_{p_{ij}})^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{1}},$$

$$\sqrt{1-\Big(1-\prod\limits_{1\leqslant i_1\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{1}\big(1-(v_{p_{ij}})^{2\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}\Big)^{\frac{1}{1}}}\Big)$$

$$=\Big(\Big[\zeta^{-1}\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1\leqslant n}\big(\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)^{\frac{1}{n}}}\Big),$$

$$\zeta^{-1}\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1\leqslant n}\big(\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)^{\frac{1}{n}}}\Big)\Big],$$

$$\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_j\leqslant n}\big(\big(1-(\mu_{p_{ij}})^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)^{\frac{1}{n}}},\sqrt{\prod\limits_{1\leqslant i_j\leqslant n}\big((v_{p_{ij}})^{2\omega_{ij}}\big)^{\frac{1}{n}}}\Big)\Big).$$

情况 2　当 $k=2$ 时,基于式(13)可得

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\Big(\Big[\zeta^{-1}\Big(\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{2}\big(1-\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big),$$

$$\zeta^{-1}\Big(\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{2}\big(1-\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{1}}\Big)\Big],$$

$$\Big(\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{k}\big(1-\big(1-(\mu_{p_{ij}})^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{1-\Big(1-\prod\limits_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\Big(1-\prod\limits_{j=1}^{2}\big(1-(v_{p_{ij}})^{2\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}\Big)^{\frac{1}{2}}}\Big)\Big)$$

$$=\Big(\Big[\zeta^{-1}\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1\leqslant n}\big(\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)^{\frac{1}{n}}}\Big),\zeta^{-1}\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_1\leqslant n}\big(\big(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)^{\frac{1}{n}}}\Big)\Big],$$

$$\Big(\sqrt{1-\prod\limits_{1\leqslant i_j\leqslant n}\big(\big(1-(\mu_{p_{ij}})^{2}\big)^{\omega_{ij}}\big)^{\frac{1}{n}}},\sqrt{\prod\limits_{1\leqslant i_j\leqslant n}\big((v_{p_{ij}})^{2\omega_{ij}}\big)^{\frac{1}{n}}}\Big)\Big)$$

$$=\left\langle\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\left(1-\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\chi(p_{ij})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{i1}}\right)\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\chi(p_{i_2})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{i_2}}\right)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right),\right.\right.$$

$$\left.\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\left(1-\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\delta(p_{ij})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{i1}}\right)\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\delta_{\chi(p_{i_2})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{i_2}}\right)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right],$$

$$\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\left(1-\left(1-\left(1-\left(\mu_{p_{i1}}\right)^{2\omega_{i1}}\right)\left(1-\left(1-\left(\mu_{p_{i2}}\right)^2\right)^{\omega_{i2}}\right)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}\right)}\right)^{\frac{1}{2}},\right.$$

$$\left.\left.\sqrt{1-\left(1-\prod_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\left(1-\left(1-\left(v_{p_i1}\right)^{2\omega_{i1}}\right)\left(1-\left(v_{p_{i2}}\right)^{2\omega_{i2}}\right)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\rangle$$

$$=\left\langle\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{i_1,i_2=1,i_1\neq i_2}\left(1-\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\chi(p_{ij})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{i1}}\right)\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\chi(p_{i_2})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{i_2}}\right)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right),\right.\right.$$

$$\left.\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{i_1,i_2=1,i_1\neq i_2}\left(1-\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\delta(p_{ij})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{i1}}\right)\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\delta_{\chi(p_{i_2})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{i_2}}\right)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right],$$

$$\left(\left(\sqrt{1-\prod_{i_1,i_2=1,i_1\neq i_2}\left(1-\left(1-\left(1-\left(\mu_{p_{i1}}\right)^{2\omega_{i1}}\right)\left(1-\left(1-\left(\mu_{p_{i2}}\right)^2\right)^{\omega_{i2}}\right)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}\right)}\right)^{\frac{1}{2}},\right.$$

$$\left.\left.\sqrt{1-\left(1-\prod_{i_1,i_2=1,i_1\neq i_2}\left(1-\left(1-\left(v_{p_i1}\right)^{2\omega_{i1}}\right)\left(1-\left(v_{p_{i2}}\right)^{2\omega_{i2}}\right)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}\right)^{\frac{1}{2}}},\right)\right\rangle$$

$$=\mathrm{PUPLWBM}^{(1,1)}(p_1,p_2,\cdots,p_n).$$

从上式可以看出,当 $k=2$ 时,PULWMSM 算子退化成毕达哥拉斯不确定语言加权 BM 算子[10]($p=q=1$).

情况 3 当 $k=n$,根据式(13),可以得出

$$\mathrm{PULMSM}^{(k)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\left\langle\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\chi(p_{ij})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{ij}}\right)\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)^{\frac{1}{n}}\right),\right.\right.$$

$$\left.\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\delta(p_{ij})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{ij}}\right)\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right],$$

$$\left(\left(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\left(1-\left(\mu_{p_{ij}}\right)^2\right)^{\omega_{ij}}\right)\right)^{\frac{1}{C_n^k}}}\right)^{\frac{1}{n}},\right.$$

$$\left.\left.\sqrt{1-\left(1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\left(v_{p_{ij}}\right)^{2\omega_{ij}}\right)\right)^{\frac{1}{C_n^k}}\right)^{\frac{1}{n}}}\right)\right\rangle$$

$$=\left\langle\left[\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\chi(p_{ij})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{ij}}\right)}\right)^{\frac{1}{n}}\right),\right.\right.$$

$$\left.\zeta^{-1}\left(\left(\sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(1-\left(1-\left(\bar{\zeta}\left(\zeta_{\delta(p_{ij})}\right)\right)^2\right)^{\omega_{ij}}\right)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right],$$

$$\left.\left(\left(\sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(1-\left(1-\left(\mu_{p_{ij}}\right)^2\right)^{\omega_{ij}}\right)}\right)^{\frac{1}{n}},\sqrt{1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\left(v_{p_{ij}}\right)^{2\omega_{ij}}\right)^{\frac{1}{n}}}\right)\right\rangle.$$

由此可得,当 $k=n$ 时,PULWMSM 算子退化成毕达哥拉斯不确定语言加权 BM 算子[10]($p=1,q=0$).

4 基于毕达哥拉斯不确定语言 Maclaurin 对称集结算子的多属性决策方法

设多属性决策问题中有 m 个备选方案和 n 个属性,且备选方案集为 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$,属性集为 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$,$\boldsymbol{W}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为属性权重向量,且满足条件 $\omega_I\in[0,1]$,$\sum_{i=1}^{n}\omega=1$.假定专家对备选方案 A_i 在属性 C_j 上的评价值为毕达哥拉斯不确定语言变量 $P_{ij}=\langle[\zeta_{\chi(p_{ij})},\zeta_{\delta(p_{ij})}],(\mu_{p_{ij}},v_{p_{ij}})\rangle$,决策矩阵表示为 $\boldsymbol{\Lambda}=(p_{ij})_{m\times n}$.

下面基于本文提出的毕达哥拉斯不确定语言 Maclaurin 对称集结算子,提出一种毕达哥拉斯不确定语言多属性决策方法,决策步骤.

步骤 1　对决策矩阵进行标准化处理. 通常属性分为两种，一种是成本型属性（评价值越小越好），一种是效益型属性（评价值越大越好），为了便于信息集成，需要把属性值进行标准化处理. 转化规则

$$\bar{p}_{ij}=\begin{cases}p_{ij},C_j\ \text{为收益型属性},\\(p_{ij})^c,C_j\ \text{为成本型属性},\end{cases}$$

其中 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，$(p_{ij})^c$ 是 p_{ij} 的补集，$(P_{ij})^c=\langle[\zeta^{-1}(\zeta(\zeta_t)-\zeta(\zeta_{\delta(p_{ij})}))\zeta^{-1}(\zeta(\zeta_t)-\zeta(\zeta_{\chi(p_{ij})}))],(v_{p_{ij}},\mu_{p_{ij}})\rangle$.

步骤 2　利用 PULWMSM 算子对决策矩阵的评价值进行集成，得到各个方案的综合评价值. 其中

$$p_i=\mathrm{PULWMSM}^{(k)}(\bar{p}_{i1},\bar{p}_{i2},\cdots,\bar{p}_{in})=\left(\frac{\bigoplus\limits_{1\leqslant j_1,j_2,\cdots,j_k\leqslant n}\prod\limits_{t=1}^{k}\omega_{i_{jt}}}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$=\Big\langle\Big[\zeta^{-1}\Big(\Big(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n}\Big(1-\prod_{j=1}^{n}\big(1-(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\chi(p_{ij})}))^2)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big),$$

$$\zeta^{-1}\Big(\Big(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n}\Big(1-\prod_{j=1}^{n}\big(1-(1-(\bar{\zeta}(\zeta_{\delta(p_{ij})}))^2)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big)\Big],$$

$$\Big(\Big(\sqrt{1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n}\Big(1-\prod_{j=1}^{n}\big(1-(1-(\mu_{p_{ij}})^2)^{\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}}\Big)^{\frac{1}{n}},$$

$$\sqrt{1-\Big(1-\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant n}\Big(1-\prod_{j=1}^{n}\big(1-(v_{p_{ij}})^{2\omega_{ij}}\big)\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}\Big)^{\frac{1}{n}}}\Big)\Big\rangle.$$

步骤 3　计算 p_i 的期望值 $E(p_i)$，得分函数 $S(p_i)$ 和精确度函数 $H(p_i)$.

步骤 4　根据毕达哥拉斯不确定语言变量的比较法则，对备选方案进行排序择优.

5　算例分析

5.1　决策过程

某投资公司要选择一家公司进行投资，经董事会讨论，选出四个备选方案：A_1 是一家汽车公司；A_2 是一家广告公司；A_3 是一家互联网公司；A_4 是一家家电公司. 该投资公司依据以下四个标准选择方案：C_1：风险程度；C_2：发展前景；C_3：商业影响力；C_4：政策影响. 属性权重为 $\omega=(0.35,0.21,0.19,0.26)^{\mathrm{T}}$. 采用的语言集为 $S=\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6\}$ = {非常差，差，较差，一般，较好，好，非常好}，专家对备选方案 A_i 在属性 C_j 上的评价值表示为毕达哥拉斯不确定语言变量 $p_{ij}=\langle[\zeta_{z(p_{ij})},\zeta_{\delta(p_{ij})}],(\mu_{p_{ij}},v_{p_{ij}})\rangle$，决策矩阵 $\Lambda=(p_{ij})_{m\times n}$ 表示如下

$$\bar{\Lambda}=\begin{pmatrix}\langle[\zeta_3,\zeta_4],(0.7,0.4)\rangle & \langle[\zeta_5,\zeta_5],(0.6,0.3)\rangle & \langle[\zeta_5,\zeta_5],(0.8,0.3)\rangle & \langle[\zeta_5,\zeta_5],(0.7,0.4)\rangle\\ \langle[\zeta_2,\zeta_4],(0.5,0.6)\rangle & \langle[\zeta_4,\zeta_4],(0.8,0.1)\rangle & \langle[\zeta_4,\zeta_5],(0.7,0.6)\rangle & \langle[\zeta_4,\zeta_4],(0.6,0.4)\rangle\\ \langle[\zeta_2,\zeta_4],(0.6,0.3)\rangle & \langle[\zeta_4,\zeta_5],(0.7,0.1)\rangle & \langle[\zeta_5,\zeta_5],(0.6,0.2)\rangle & \langle[\zeta_3,\zeta_5],(0.9,0.2)\rangle\\ \langle[\zeta_2,\zeta_3],(0.8,0.6)\rangle & \langle[\zeta_4,\zeta_5],(0.5,0.4)\rangle & \langle[\zeta_2,\zeta_4],(0.9,0.3)\rangle & \langle[\zeta_1,\zeta_3],(0.5,0.6)\rangle\end{pmatrix}.$$

下面，基于本文提出的决策方法，对方案进行排序，其中语言刻度函数采用式(4). 具体计算步骤如下.

步骤 1　由于 $C1$ 是成本型属性，$C2$，$C3$，$C4$ 均为效益型属性，因此，需要对决策矩阵进行标准处理. 标准化后的决策矩阵

$$\bar{\Lambda}=\begin{pmatrix}\langle[\zeta_2,\zeta_3],(0.4,0.7)\rangle & \langle[\zeta_5,\zeta_5],(0.6,0.3)\rangle & \langle[\zeta_5,\zeta_5],(0.8,0.3)\rangle & \langle[\zeta_5,\zeta_5],(0.7,0.4)\rangle\\ \langle[\zeta_2,\zeta_4],(0.6,0.5)\rangle & \langle[\zeta_4,\zeta_4],(0.8,0.1)\rangle & \langle[\zeta_4,\zeta_5],(0.7,0.6)\rangle & \langle[\zeta_4,\zeta_4],(0.6,0.4)\rangle\\ \langle[\zeta_2,\zeta_4],(0.3,0.6)\rangle & \langle[\zeta_4,\zeta_5],(0.7,0.1)\rangle & \langle[\zeta_5,\zeta_5],(0.6,0.2)\rangle & \langle[\zeta_3,\zeta_5],(0.9,0.2)\rangle\\ \langle[\zeta_3,\zeta_4],(0.6,0.8)\rangle & \langle[\zeta_4,\zeta_5],(0.5,0.4)\rangle & \langle[\zeta_2,\zeta_4],(0.9,0.3)\rangle & \langle[\zeta_1,\zeta_3],(0.5,0.6)\rangle\end{pmatrix}.$$

步骤 2　利用 PULWMSM 算子($k=2$)集成标准化矩阵 $\bar{\Lambda}$ 中的第 i 行决策信息，得到方案 $A_i(i=1,2,3,4)$ 的综合评价值 p_i

$$p_1=\langle[\zeta_{2.4614},\zeta_{2.7289}],(0.3525,0.8039)\rangle;p_2=\langle[\zeta_{1.9733},\zeta_{2.3917}],(0.3505,0.8490)\rangle$$

$$p_3=\langle[\zeta_{2.0130},\zeta_{2.8409}],(0.3838,0.7089)\rangle;p_4=\langle[\zeta_{1.4086},\zeta_{2.2889}],(0.3505,0.8490)\rangle$$

步骤 3 计算综合评价值 $p_i(i=1,2,3,4)$的期望值 $E(p_i)$：

$$E(p_1)=0.1034;E(p_2)=0.0957;E(p_3)=0.1303;E(p_4)=0.0619.$$

步骤 4 根据定义 9 对方案进行排序：

$$A_3\succ A_1\succ A_2\succ A_4.$$

因此，最佳的方案为 A_3.

下面讨论关联参数 k 对排序结果的影响，不同参数 k 得到的排序结果如表 1 所示.

从表 1 可以看出，参数 k 的取值对排序结果会产生轻微的影响，三种 k 值条件下得到的最差方案都是 A_4，但是最优方案、次优方案和次差方案的排序有所区别. 因此，相比已有的毕达哥拉斯不确定语言多属性决策方法，本文提出的方法可以反映多元输入参数之间的关联关系，而不仅仅局限在二元关联关系. 在实际情况下，决策者可以根据自己的风险偏好选择恰当的 k 值. 一般地，取 $k=[n/2]$，其中 n 为属性个数，在此情况下，既可以保证决策者的风险偏好中性，又可以充分体现输入参数之间的关联关系，较为简单直观.

表 1 不同参数 k 得到的排序结果

k 值	期望值	排序结果
$k=1$	$E(p_1)=0.1186,E(p_2)=0.1167,$ $E(p_3)=0.1516,E(p_4)=0.0739$	$A_3\succ A_2\succ A_1\succ A_4$
$k=2$	$E(p_1)=0.1072,E(p_2)=0.0957,$ $E(p_3)=0.1304,E(p_4)=0.0620$	$A_3\succ A_1\succ A_2\succ A_4$
$k=3$	$E(p_1)=0.3222,E(p_2)=0.2574,$ $E(p_3)=0.3176,E(p_4)=0.1914$	$A_1\succ A_3\succ A_2\succ A_4$
$k=4$	$E(p_1)=0.0864,E(p_2)=0.0824,$ $E(p_3)=0.1041,E(p_4)=0.0490$	$A_3\succ A_1\succ A_2\succ A_4$

5.2 对比分析

接下来，把提出的方法与现有毕达哥拉斯不确定语言多属性决策方法[9,10]进行对比分析，这三种方法分别基于毕达哥拉斯不确定语言加权平均算子(PULWA)、毕达哥拉斯不确定语言加权几何算子(PULWG)以及毕达哥拉斯不确定语言加权 Bonferroni 平均算子(PULWBM). 利用上述三种算子聚合实例中的评估值，对备选方案进行排序，并与本文提及的方法进行比较分析. 方案排序结果与分析结果分别见表 2、表 3.

表 2 方案排序结果

集成方法	参数	期望值	排序结果
PULWA[9]	无参数	$E(p_1)=\zeta 3.1996,E(p_2)=\zeta 2.7156,$ $E(p_3)=\zeta 3.1879,E(p_4)=\zeta 2.0549$	$A_1\succ A_3\succ A_2\succ A_4$
PULWG[9]	无参数	$E(p_1)=\zeta 3.1027,E(p_2)=\zeta 2.3476,$ $E(p_3)=\zeta 2.9481,E(p_4)=\zeta 1.6809$	$A_1\succ A_3\succ A_2\succ A_4$
PULWBM[10]	$p=q=1$	$E(p_1)=\zeta 0.1186,E(p_2)=\zeta 0.0925,$ $E(p_3)=\zeta 0.1479,E(p_4)=\zeta 0.0680$	$A_3\succ A_1\succ A_2\succ A_4$
本文提出的 PULWMSM	$k=2$,式(4)	$E(p_1)=0.1072,E(p_2)=0.0957,$ $E(p_3)=0.1304,E(p_4)=0.0620$	$A_3\succ A_1\succ A_2\succ A_4$
	$k=2$,式(5)	$E(p_1)=0.0971,E(p_2)=0.1011,$ $E(p_3)=0.1334,E(p_4)=0.0706$	$A_3\succ A_2\succ A_1\succ A_4$
	$k=2$,式(6)	$E(p_1)=0.1128,E(p_2)=0.1020,$ $E(p_3)=0.1336,E(p_4)=0.0634$	$A_3\succ A_1\succ A_2\succ A_4$

通过表 2 和表 3 可以看出，已有毕达哥拉斯不确定语言多属性决策方法使用了不同的信息集成算子，具有不同的功能特点. 其中，当 k＝2 且采用式(4)和式(9)所示语言刻度函数时本文提出方法得到的排序结果

与刘[10]提出的基于 PULWBM 算子的多属性决策方法得到的排序结果相同,主要原因在于 PULWMSM 算子与 PULWBM 算子均可以捕获二元参数之间的关联关系.这也证明了本文提出方法的有效性.但是,与 PULWBM 相比,本文提出的方法只需要取一个参数来处理信息,而 PULWBM 需要两个参数.此外,本文提出的方法不仅可以捕获多个参数的关联关系,而且可以更加灵活的实现决策者的语义转换需求.PULWA 与 PULWG 既不能描述属性之间的关联关系,也无法满足决策者语义转换需求,容易造成计算结果不准确.

表 3　比较分析

方法	运算法则	能否适应语义变换	能否处理关联关系
PULWA[9]	不封闭	否	否
PULWG[9]	不封闭	否	否
PULWBM[10]	不封闭	否	能
PULWMSA	封闭	能	能

从表 3 可以看出,与已有的毕达哥拉斯不确定语言多属性决策方法相比,本文提出的方法的主要特点是:一方面,本文提出的新的运算法则具有封闭性,可以避免下标越界,同时结合语言刻度函数,可以满足不同决策者的语义转换需求;另一方面,本文提出的 PULWMSM 算子可以同时捕获多个输入参数之间的关联关系,更具灵活性和有效性.

6　结论

毕达哥拉斯不确定语言变量集成了毕达哥拉斯模糊数和不确定语言变量的优点,是直觉不确定语言变量的扩展和一般化,在描述模糊信息时更加灵活有效.针对现有毕达哥拉斯不确定语言变量运算法则缺乏封闭性和无法满足决策者语义转换需求的问题,结合语言刻度函数,本文提出了新的毕达哥拉斯不确定语言变量的运算法则和大小比较方法.同时,将 MSM 扩展到毕达哥拉斯不确定语言模糊环境,提出了毕达哥拉斯不确定语言 Maclaurin 对称集成算子(PULMSM)和毕达哥拉斯不确定语言加权 Maclaurin 对称集成算子(PULWMSM).新算子能够捕获多元输入参数之间的关联关系并且能够满足不同决策者的语义转换需求,使集成结果更加准确合理.在此基础上,提出了基于 PULWMSM 算子的多属性决策方法,并通过算例分析验证了该方法的有效性和优越性.下一步,将针对属性权重未知的多属性决策问题,进一步研究毕达哥拉斯不确定语言模糊环境下的多属性决策问题.

参　考　文　献

[1]　Atanassov K[T]. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy sets and Systems,1986,20(1):87-96.

[2]　Atanassov K[T],Gargov G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy sets and systems,1989,31(3):343-349.

[3]　刘培德,张新.直觉不确定语言集成算子及在群决策中的应用[J].系统工程理论与实践,2012,32(12):2704-2711.

[4]　Xu Z,Yager R R,Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. nternational journal of general systems,2006,35(4):417-433.

[5]　Yager R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2014,22(4):958-965.

[6]　刘政敏,刘培德,刘位龙.基于 Pythagorean 不确定语言的扩展 VIKOR 多属性群决策方法[J].控制与决策,2017,32(12):2145-2152.

[7]　王坚强,李寒波.基于直觉语言集结算子的多准则决策方法[J].控制与决策,2010,25(10):1571-1574.

[8]　Xu Z S. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment[J]. Information Sciences,2004,168(1):171-184.

[9]　Lu M,Wei G W. Pythagorean uncertain linguistic aggregation operators for multiple attribute decision making[J]. International Journal of Knowledge-based and Intelligent Engineering Systems,2017,21(3):165-179.

[10]　Liu Z,Liu P,Liu W,et al. Pythagorean uncertain linguistic partitioned Bonferroni mean operators and their application in multi-attribute

decision making[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017, 32(3): 2779-2790.

[11] Wang J, Wu J, Wang J, et al. Interval-valued hesitant fuzzy linguistic sets and their applications in multi-criteria decision-making problems [J]. Information Sciences, 2014, 288: 55-72.

[12] Zhang X, Xu Z. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2014, 29(12): 1061-1078.

[13] Xu Z. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations[J]. Information sciences, 2004, 166(1-4): 19-30.

[14] Maclaurin C. A second letter to Martin Folkes Esq concerning the roots of equations, with the demonstartion of other rules in algebra[J], Phil. Transactions, 1970(36): 59-96.

[15] Yager R R. On generalized Bonferroni mean operators for multi-criteria aggregation[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2009, 50(8): 1279-1286.

[16] Beliakov G, Pradera A, Calvo T. Aggregation Functions: A Guide for Practitioners[M]. Heidelberg: Springer, 2007.

Pythagorean Uncertain Linguistic Maclaurin Symmetric Mean Operators and Their Application in Multi-attribute Decision Making[1]

LIU Zheng-min ZHAO Xiao-lan YU Yuan-nian

(School of Management Science and Engineering, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China)

Abstract Pythagorean uncertain linguistic variables are the extension and generalization of intuitionistic uncertain linguistic variables. In order to aggregate Pythagorean uncertain linguistic variables, some new operational laws and comparison method of the Pythagorean uncertain linguistic variables are proposed by combining with linguistic scale function, which overcomes the shortcomings of closeness and flexibility in existing operations. Furthermore, the Pythagorean uncertain linguistic Maclaurin symmetric mean operator (PULMSM) and its weighted form (PULWMSM) are proposed to aggregate Pythagorean uncertain linguistic variables, which can model the interrelationship among multi-inputs. Meanwhile, some of desirable properties and special cases are discussed. Finally, a Pythagorean uncertain linguistic multi-attribute decision making method is proposed based on the proposed PULMSM operator, then an illustrative example is conducted to show the rationality and effectiveness.

Key words Pythagorean uncertain linguistic variables; Maclaurin symmetric mean; linguistic scale function; multi-attribute decision making