文章编号　1672-6634(2019)01-0006-06　　　　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2019.01.002

一维双曲逆平均曲率流的对称群和不变解

丁　冉　王增桂

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘　要　通过严格闭凸曲线的支撑函数,将一维双曲逆平均曲率流转化成双曲型偏微分方程,利用李点对称群理论,研究了一维双曲逆平均曲率流的对称群和不变解.

关键词　双曲逆平均曲率流;支撑函数;对称群;不变解

中图分类号　O193,O186.1　　　　**文献标识码**　A

0　引言

本文利用不变群理论研究了一个从双曲几何流中推导出的双曲型偏微分方程的群不变解问题.关于双曲几何流的群不变解及最优系统的研究,已经有很多结果,比如说沃维丰等人[1]利用不变群理论研究了从仿射几何流中推导出的非线性方程的群不变解,并且构造了几何流对应的最优系统,王金花[2]研究了黎曼曲面上双曲几何流的群不变解,并且对于双曲波动方程,找到了一些精确解,王增桂[3]研究了李群在微分方程中应用的双曲平均曲率流的群不变解,基于所得到的对称性的相关向量,建立了方程的不变最优系统,董仲周等人[4]采用经典对称的方法研究了双曲型 Monge-Ampère 方程,并构造了相应的群不变解.19 世纪以来,人们发现了越来越多的偏微分方程,随着现代技术和科学的不断进步,还将涌现更多的偏微分方程,而李对称群理论就是我们求解微分方程最有力的工具.李对称群方法是研究几何和物理领域中微分方程不变解的基础方法.李群又称对称群或不变群,它的中心思想是寻找给定方程的对称群,这是一个十分有用的方法,李对称群理论提供了一套系统的方法,使方程可以达到降阶的目的,即减少一个自变量,它的主要用途在于使较难处理的微分方程得到统一的求解方法且减少方程求解的计算量.为了求解微分方程的不变解,首先要确定微分方程的李点对称群及其子群.

本文将研究如下一维双曲逆平均曲率流

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}=-k^{-1}\boldsymbol{N}+k^{-1}(k^{-1})_s\boldsymbol{T}, \tag{1}$$

其中 γ 是闭严格凸曲线, k^{-1} 是平面曲线 γ 的逆平均曲率,向量 $\boldsymbol{N}$ 是平面曲线 γ 的单位内法向量, s 是平面曲线 γ 的弧长, $\boldsymbol{T}$ 是平面曲线 γ 的单位切向量.

第二部分利用凸曲线的支撑函数,将一维双曲逆平均曲率流转化为一个简单的双曲型偏微分方程.第三部分利用 Olver 提出的方法[5]系统地研究双曲型偏微分方程,求解出该方程的李对称代数.然后在本文最后一部分基于得到的对称性的相关向量,通过对称约化的方法[5]得到了双曲偏微分方程的解.

1　双曲型偏微分方程的导出

微分几何研究的是空间中曲线、曲面的运动,关于这方面的研究,已经建立了一个比较完整的体系,在过去的几十年中,数学家、物理学家以及天文学家对时空中的曲线和曲面的运动越来越感兴趣,这方面的研究也取得了很大的进展,其中最重要的例子就是平均曲率流

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}=k\boldsymbol{N}, \tag{2}$$

收稿日期:2018-03-10

基金项目:国家自然科学基金项目(11001115,11201473);山东省自然科学基金项目(ZR2015AL008)资助

通讯作者:王增桂,女,汉族,博士,副教授,研究方向:偏微分方程,非线性泛函分析等,E-mail:wangzenggui@lcu.edu.cn.

这种流是抛物的，它是抛物型偏微分方程理论在几何中的成功应用. 这一部分我们将研究如下一维双曲逆平均曲率流

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}(u,t)=-k^{-1}(u,t)\boldsymbol{N}(u,t)+k^{-1}(u,t)(k^{-1})_s(u,t)\boldsymbol{T}(u,t) \quad u\in S^1, t\in[0,\boldsymbol{T}),\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial t}=0,\end{cases} \tag{3}$$

其中 k 是平面曲线 γ 的平均曲率，向量 $\boldsymbol{N}$ 是平面曲线 γ 的单位内法向量，$\boldsymbol{T}$ 是平面曲线 γ 的单位切向量，s 是平面曲线的弧长，上述方程可以简化成曲线的支撑函数所满足的偏微分方程.

假设 $\gamma: S^1\times[0,\boldsymbol{T})\rightarrow\mathbf{R}^2$ 是一族满足(3)的凸曲线族，我们用法向角参数化演化曲线 $\gamma(\cdot,t)$，我们用曲线的支撑函数研究流的短时间存在性.

取 $\tilde{\gamma}(\theta,\tau)=\gamma(u(\theta,\tau),t(\theta,\tau))$，其中 $t(\theta,\tau)=\tau$.

由链式法则可得

$$0=\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

定义演化曲线 $\tilde{\gamma}(\theta,\tau)=(x(\theta,\tau),y(\theta,\tau))$ 的支撑函数为

$$S_\theta(\theta,\tau)=[\tilde{\gamma}(\theta,\tau),-\boldsymbol{N}]=x(\theta,\tau)\cos\theta+y(\theta,\tau)\sin\theta.$$

那么我们有

$$S_\theta(\theta,\tau)=[\tilde{\gamma}(\theta,\tau),\boldsymbol{T}]=-x(\theta,\tau)\sin\theta+y(\theta,\tau)\cos\theta.$$

则曲线 $\tilde{\gamma}$ 可由支撑函数及其支撑函数关于法向角的一阶偏导数给出

$$\begin{cases}x(\theta,\tau)=S\cos\theta-S_\theta\sin\theta,\\ y(\theta,\tau)=S\sin\theta+S_\theta\cos\theta.\end{cases}$$

通过直接计算可得

$$S_{\theta\theta}+S=[\tilde{\gamma}_\theta(\theta,\tau),\boldsymbol{T}]+[\tilde{\gamma}(\theta,\tau),\boldsymbol{N}]+[\tilde{\gamma}(\theta,\tau),-\boldsymbol{N}]=[\tilde{\gamma}_\theta(\theta,\tau),\boldsymbol{T}]=\left[\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\theta},\boldsymbol{T}\right]=\frac{1}{k},$$

$$S_\tau=\left[\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial\tau},-\boldsymbol{N}\right]=\left[\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{\partial\gamma}{\partial t},-\boldsymbol{N}\right]=\left[\frac{\partial\gamma}{\partial t},-\boldsymbol{N}\right],$$

$$S_{\tau\tau}=\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial u\partial t}\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2},-\boldsymbol{N}\right]=\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2},-\boldsymbol{N}\right]=k^{-1}=S_{\theta\theta}+S, \tag{4}$$

这是一个双曲型偏微分方程，根据双曲型偏微分方程的理论，可以得到方程(3)解的局部存在唯一性定理.

2　双曲型偏微分方程(4)的对称群

李对称方法是研究偏微分方程的有效工具，它提供了一套比较系统的方法，使微分方程达到降阶的目的，在一定条件下使得相应的微分方程得到约化，从而简化过程. 我们以2阶偏微分方程为例.

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个开集，$u\in C^2(D)$. 函数 $u^{(2)}: D\rightarrow U^{(2)}=U\times U_1\times U_2$，

$$u^{(2)}=(u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})$$

称为函数 u 的2阶延拓. 全空间 $D\times U^{(2)}$ 称为底空间 $D\times U$ 的2阶基空间. 它的坐标分别表示了自变量、因变量和因变量2阶导数.

一个2阶偏微分方程形式上为

$$F(x,y,u^{(2)})=0, \tag{5}$$

其中 $F: D\times U^{(2)}\rightarrow\mathbf{R}$ 是一个可微的函数.

定义1　偏微分方程(5)称为最大秩的，如果其相应的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{J}_F(x,y,u^{(2)})=(F_x,F_y,F_u,F_{ux},F_{uy},F_{uxx},F_{uxy},F_{uyy})$$

在解集上的秩为1.在这种情形下,集合

$$S=\{(x,y,u^{(2)})\in D\times U^{(2)}\mid F(x,y,u^{(2)})=0\}$$

是一个超平面.

定义2 偏微分方程(5)的对称群是作用在开子集$M\subset D\times U$上的一个局部变换群G,并且有以下性质

(a) 如果$u=f(x,y)$是方程的一个解,对于任何$g\in G$,若$g\cdot f$有意义,则$v=g\cdot f(x,y)$同样是一个解.

(b) 方程的任意一个解可以由约化后的微分方程求出.因此,每一个解都是群不变解$g\cdot f=f,\forall g\in G$.

定义3 设$\boldsymbol{X}=\xi(x,y,u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y,u)\frac{\partial}{\partial y}+\varphi(x,y,u)\frac{\partial}{\partial u}$是开集$M\subset D\times C$上的一个$C^{\infty}$向量场,它的1阶延拓为

$$pr^{(1)}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}+\varphi^{x}\frac{\partial}{\partial u_x}+\varphi^{y}\frac{\partial}{\partial u_y},$$

其中$\varphi^{x}=\varphi_x+(\varphi_u-\xi_x)u_x-\eta_x u_y-\xi_u u_x^2-\eta_u u_x u_y$,$\varphi^{y}=\varphi_y-\xi_y u_x+(\varphi_u-\eta_y)u_y-\xi_u u_x u_y-\eta_u u_y^2$,它的2阶延拓表示为

$$pr^{(2)}=pr^{(1)}\boldsymbol{X}+\varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\varphi^{xy}\frac{\partial}{\partial u_{xy}}+\varphi^{yy}\frac{\partial}{\partial u_{yy}},\tag{6}$$

其中$\varphi^{xx}=\varphi_{xx}+(2\varphi_{xu}-\xi_{xx})u_x-\eta_{xx}u_y+(\varphi_{uu}-2\xi_{xu})u_x^2-2\eta_{xu}u_x u_y-\xi_{uu}u_x^3-\eta_{uu}u_x^2u_y+(\varphi_u-2\xi_x)u_{xx}$
$-2\eta_x u_{xy}-3\eta_u u_x u_{xx}-\eta_u u_y u_{xx}-2\eta_u u_x u_{xy}$,

$\varphi^{xy}=\varphi_{xy}+(\varphi_{uy}-\xi_{xy})u_x+(\varphi_{ux}-\eta_{xy})u_y-\xi_{uy}u_x^2+(\varphi_{uu}-\xi_{xu}-\eta_{uy})u_x u_y-\eta_{xu}u_y^2-\xi_y u_{xx}$
$+(\varphi_u-\xi_x-\eta_y)u_{xy}\eta_x u_{yy}-\xi_u u_y u_{xx}-2\eta_u u_y u_{xy}-2\xi_u u_x u_{yy}-\xi_{uu}u_x^2 u_y-\eta_{uu}u_x u_y^2$,

$\varphi^{yy}=\varphi_{yy}+(2\varphi_{yu}-\eta_{yy})u_y-\xi_y u_x+(\varphi_{uu}-2\eta_{yu})u_y^2-2\xi_{yu}u_x u_y-\eta_{uu}u_y^3-\xi_{uu}u_x u_y^2+(\varphi_u-2\eta_y)u_{yy}$
$-2\xi_y u_{xy}-3\eta_u u_y u_{yy}-\xi_u u_x u_{yy}-2\xi_u u_y u_{xy}$.

偏微分方程(5)的对称群由下述偏微分方程不变性的无穷小准则给出

定理1 $F(x,y,u^{(2)})=0$是定义在开集$M\subset D\times U$上的最大秩偏微分方程.如果G是在M上的一个局部变换群,并且对G的每个无穷小生成子X而言,当$F(x,y,u^{(2)})=0$时,总有

$$pr^{(2)}X[F(x,y,u^{(2)})]=0\tag{7}$$

成立,则G就是所考虑方程的对称群.

性质1 如果方程(5)在$M\subset D\times U$上是最大秩的,则无穷小生成子可以生成M上的一个李代数,并且,如果这个代数是有限维的,则偏微分方程的对称群是在M上的一个局部李氏变换群.

综上所述,我们得到了决定偏微分方程(5)对称群的一般步骤,其算法如下

(a) 通过考虑M上的向量场$\boldsymbol{X}$及其1、2阶延拓,我们可以写出无穷小不变条件(7).

(b) 利用已知偏微分方程,消去函数u相独立的偏导数.

(c) 条件(7)化为关于u的偏导数的多项式,让其系数分别等于零.

(d) 得到关于未知函数ξ,η,φ的偏微分方程组,求解该方程组,则它的解定义了偏微分方程(5)的对称群.

下面我们将会给出双曲型偏微分方程(4)的对称群,为方便起见取$x=\tau,y=\theta,S(\theta,\tau)=u(x,y)$.则方程可写为

$$u_{xx}-u_{yy}=u.\tag{8}$$

设

$$\boldsymbol{X}=\xi(x,y,u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y,u)\frac{\partial}{\partial y}+\varphi(x,y,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

是在开集 $M\subset D\times U$ 上的一个 C^{∞} 向量场. 对方程(8)而言，不变条件有

$$\varphi^{xx}-\varphi^{yy}-\varphi=0.$$

将 φ^{xx}，φ^{yy} 的具体形式带入上式，并利用方程(8)，消去 u_{yy}，即用 $u_{xx}-u$ 来代替 u_{yy}，我们就可以得到等式

$$\begin{aligned}0=&-\varphi+\varphi_{xx}+(2\varphi_{xu}-\xi_{xx})u_x-\eta_{xx}u_y+(\varphi_{uu}-2\xi_{xu})u_x^2-2\eta_{xu}u_xu_y\xi_{uu}u_x^3-\eta_{uu}u_x^2u_y+(\varphi_u-2\xi_x)u_{xx}-2\eta_xu_{xy}\\&-3\eta_uu_xu_{xx}-\eta_uu_yu_{xx}-2\eta_uu_xu_{xy}-\varphi_{yy}-(2\varphi_{yu}-\eta_{yy})u_y+\xi_yu_x-(\varphi_{uu}-2\eta_{yu})u_y^2+2\xi_{yu}u_xu_y+\eta_{uu}u_y^3\\&+\xi_{uu}u_xu_y^2-\varphi_uu_{xx}+\varphi_uu+2\eta_yu_{xx}-2\eta_uu+2\xi_yu_{xy}+3\eta_uu_yu_{xx}-3\eta_uu_yu+\xi_uu_xu_{xx}-\xi_uu_xu+2\xi_uu_yu_{xy}.\end{aligned}$$

把这个等式看成是函数 u 各阶偏导数的多项式，由于其各不相关，所以各阶偏导数的系数均恒等于零. 于是，我们得到了一个偏微分方程组

$$\eta_y=0,\eta_u=0,\xi_u=0,\eta_{uu}=0,\xi_{uu}=0,2\varphi_{xu}-\xi_{xx}+\xi_y=0,\eta_{yy}-2\varphi_{yu}-\eta_{xx}=0,$$

$$\varphi_{uu}-2\xi_{xu}=0,\xi_{yu}-\eta_{xu}=0,\eta_y-\xi_x=0,\xi_y-\eta_x=0,2\eta_{yu}-\varphi_{uu}=0,\varphi_{xx}-\varphi_{yy}-\varphi=0.$$

它的通解为

$$\xi(x,y,u)=c_1y+c_2,\eta(x,y,u)=c_1x+c_3,\varphi(x,y,u)=c_4\mathrm{e}^{c_5(x+y)}c_6\mathrm{e}^{\frac{x-y}{4c_5}}.$$

这组通解定义了方程(8)的对称群.

定理 2 方程

$$u_{xx}-u_{yy}=u$$

的对称群所对应的李代数由以下向量场生成：

$$\boldsymbol{X}_1=\frac{\partial}{\partial x},\boldsymbol{X}_2=\frac{\partial}{\partial y},\boldsymbol{X}_3=y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}.$$

下面验证向量场 $\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3\}$ 关于李括号运算是封闭的

$$[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_1]=[\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_2]=[\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_3]=0,$$

$$[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2]=-[\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_1],[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_3]=-[\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_1],[\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3]=-[\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_2].$$

进一步，我们可以求出与上述向量场对应的单参数群如下

$$G_1:(x,y,u)\to(x+\varepsilon,y,u),G_2:(x,y,u)\to(x,y+\varepsilon,u),G_3:(x,y,u)\to(x+\varepsilon y,y+\varepsilon x,u).$$

我们已经求出了方程(8)的向量场和对称群，那么根据单参数不变群的性质可知，若 $u=f(x,y)$ 是方程(8)的解，那么下列 $u^{(1)}$，$u^{(2)}$，$u^{(3)}$ 也是该方程的解，即群不变解

$$u^{(1)}=f(x-\varepsilon,y),u^{(2)}=f(x,y-\varepsilon),u^{(3)}=f(x-\varepsilon y,y-\varepsilon x).$$

3 方程(8)的对称约化和群不变解

我们可以把原偏微分方程(4)化为常微分方程. 下面我们分别给出 X_1，X_2，X_3 情形的不变解.

3.1 X_1 情形

首先求解 X_1 对应的不变量 ξ，为求不变量，我们解 X_1 相应的特征方程，X_1 的特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{0}=\frac{\mathrm{d}u}{0},\tag{9}$$

解式(9)得到 X_1 的 1 个群不变量

$$\xi=y,\tag{10}$$

从不变量(10)得到原方程(8)的不变解具有

$$u=f(\xi).\tag{11}$$

由式(11)计算出关于 x,y 的各阶导数 $u_x=0,u_{xx}=0,u_y=f',u_{yy}=f''$，把以上结果代入方程(8)，得到以下常微分方程

$$-f''=f,\tag{12}$$

解方程(12)得 $f(y)=C_1\cos y+C_2\sin y$,其中 C_1,C_2 是任意常数.

3.2 X_2 情形

首先求解 X_2 对应的不变量 ξ,为求不变量,我们解 X_2 相应的特征方程,X_2 的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{0}=\frac{\mathrm{d}y}{1}=\frac{\mathrm{d}u}{0}, \tag{13}$$

解式(13)得到 X_2 的 1 个群不变量

$$\xi=x, \tag{14}$$

从不变量(14)得到原方程(8)的不变解具有

$$u=f(\xi). \tag{15}$$

由式(15)计算出关于 x,y 的各阶导数 $u_x=f'$,$u_{xx}=f''$,$u_y=0$,$u_{yy}=0$,把以上结果代入方程(8)得到以下常微分方程

$$f''=f, \tag{16}$$

解方程(16)得 $f(y)=C_1e^x+C_2e^{-x}$,其中 C_1,C_2 是任意常数.

3.3 X_3 情形

首先求解 X_3 对应的不变量 ξ,为求不变量,我们解 X_3 相应的特征方程,X_3 的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{0}, \tag{17}$$

解式(17)得到 X_3 的 1 个群不变量

$$\xi=y^2-x^2, \tag{18}$$

从不变量(18)得到原方程(8)的不变解具有

$$u=f(\xi), \tag{19}$$

由式(19)计算出关于 x,y 的各阶导数 $u_x=-2xf'$,$u_{xx}=-2f'+4x^2f''$,$u_y=2yf'$,$u_{yy}=2f'+4y^2f''$,把以上结果代入方程(8),得到以下常微分方程 $-4f'-4\xi f''=f$.

4 结论

双曲平均曲率流的应用范围很广,在力学、化学反应、生物学和图像处理等科学中都有实际的例子,在模拟肥皂泡行为、晶体演化、生物细胞学及 Minkowski 时空相对论弦(或膜)理论等方面都有实际的例子.如 Bellettini 等人在[6]中通过类似于双曲平均曲率流的方法去研究闭弦的几何性质.Ishida 等人[7]用表面积函数代替双曲平均曲率流,将薄膜动力学转化为几何流,从而使得肥皂泡模拟采用的方法简单、快速、稳健,并且符合 Plateau's 原理.Gurtin 等人在[8]中用平面曲线的双曲平均曲率流的方程去刻画氦晶体的融化和结晶交界面的运动现象.Alias 与 Buenzli[9]提出了一种基于细胞的组织生长数学模型,组织合成细胞表面演化的法向加速度线性地依赖于平均曲率.已知若干生物组织的生长部分地由局部几何特征(如组织界面的曲率)控制,深刻理解这种控制细胞学基础对于生物支架组织工程学、骨微体结构的演变、伤口愈合和肿瘤生长具有重要的意义.在这篇文章中,我们研究了一维双曲逆平均曲率流:平面曲线的演化,通过严格闭凸曲线的支撑函数,将一维双曲逆平均曲率流转化为双曲型偏微分方程,然后利用 Olver 提出的方法系统地研究了双曲型偏微分方程,并求解出该方程的对称代数,最后通过对称约化的方法得到了双曲型偏微分方程的不变解.

参　考　文　献

[1] 沃维丰，杨淑心，黄晴. 双曲型仿射不变流的最优系统及群不变解[J]. 宁波大学学报：理工版，2017，3(3)：36-41.

[2] Wang J H. Symmetries and solutions to geometrical flows[J]. Science China Math，2013，56(8)：1698-1704.

[3] Wang Z G. Symmetries and solutions of hyperbolic mean curvature flow with a constant forcing term [J]. Applied Mathematics and Computation，2014(235)：560-566.

[4] Dong Z Z，Chen Y，Kong D X，et al. Symmetry reduction and exact solutions of a hyperbolic Monge-Ampere equation[J]. Chin Ann Math，2012，33B(2)：309-313.

[5] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. New York：Springer，1998.

[6] Bellettini G，Hoppe J，Novaga M，et al. Compactness and convexity results for closed relativistic strings[J]. Complex Analysis & Operator Theory，2010，4(3)：473-496.

[7] Ishida S，Yamamoto M，Ando R and Hachisuka T. A hyperbolic geometric flow for evolving films and foams[J]. Acm Transactions on Graphics，2017，36(6)：1-11.

[8] Gurtin M E，Podio-Guidugli P. A hyperbolic theory for the evolution of plane curves[J]. SIAM Journal of Mathematical Analysis，1991，22：575-586.

[9] Alias A，Buenzli P. Modelling the effect of curvature on the collective behaviour of cells growing new tissue[J]. Biophysical Journal，2017，112(1)：193-204.

Symmetry Group and Invariant Solutions of One dimensional Hyperbolic Inverse Mean Curvature Flow

DING Ran　WANG Zeng-gui

(School of Mathematical Sciences，Liaocheng University，Liaocheng 252059，China)

Abstract　In this article，by the support function of strictly convex curve ，the one dimensional hyperbolic inverse mean curvature flow reduces to a single hyperbolic partial differential equations. Then using the Lee points symmetry group theory，we study symmetry group and invariant solutions of one dimensional hyperbolic inverse of mean curvature flow.

Key words　hyperbolic inverse mean curvature flow；support function；symmetry group；invariant solutions