文章编号 1672-6634(2019)01-0001-05 **DOI** 10.19728/j.issn1672-6634.2019.01.001

抛物方程的 Legendre-Galerkin Chebyshev 配置最小二乘法

胡晓梅 覃永辉 谢珍姝

(桂林电子科技大学 数学与计算科学学院,广西 桂林 541004)

摘 要 研究抛物方程的 Legendre-Galerkin-Chebyshev 配置(LGC)最小二乘方法以及其多区域格式.首先通过引进通量,将原问题变成等价的一阶系统.然后对一阶系统,该方法基于 Legendre-Galerkin 格式,对右端源项与初值部分则采用 Chebyshev 插值.数值实验显示该方法具有高阶谱精度.

关键词 抛物方程;Legendre Galerkin;Chebyshev 配置;最小二乘

中图分类号 O241.2 **文献标识码** A

0 引言

近年来,谱方法由于其对光滑问题有所谓的"无穷阶"精度,从而被广泛的关注和研究[1-3].文献[1-3]中谱方法已经成功的应用于偏微分方程的空间离散,但时间则用差分格式.然而,正如文献[4,5]指出这些谱方法的精度往往受时间方向离散的精度的约束从而得不到高精度.为了克服这个弱点,因此文献[4,5]提出了时空谱方法.受文献[4,5]的方法启发,我们研究时间依赖方程的时空谱方法.

本文考虑抛物方程

$$\begin{cases}\partial_t p-\mu\partial_x^2 p=f(x,t),(x,t)\in\Omega,\\ p(-1,t)=p(1,t)=0,t\in I_t,\\ p(x,-1)=p_0(x),x\in I_x,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\Omega=(-1,1)\times(0,T]$,$I_x=(-1,1)$,$I_t=(0,T]$.我们研究方程(1)的 Legendre-Galerkin-Chebyshev(LGC)配置最小二乘法.该方法基于 Legendre Galerkin 形式,但是对源项和初值部分采用 Legendre/Chebyshev 配置点处理,结合最小二乘原理,导出对称正定系统,利用适合迭代方法求解.

对于抛物方程(1),为了时间方向有高阶精度,文献[6-8]中考虑对时间和空间同时采用谱方法离散.文献[6]中则以具有周期边界条件的抛物方程为模型,提出了基于空间和单/多区域的傅里叶变换的谱方法.文[7]中研究了非周期性边界值问题的 Legendre-Galerkin 谱的傅里叶方法,给出了一种新的时空谱方法,给出线性抛物型方法最优的误差估计.文[8]中研究周期性边界条件的一阶双曲方程傅里叶谱逼近,提出了时间上 Legendre 谱方法,给出了最优误差估计方法.文献[9]中研究了椭圆方程的最小二乘 Legendre/Chebyshev 谱配置方法,还给出了对应的误差分析,但是,所给出的结论对于 Chebyshev 情况比不是 H^1-范数最优的.为了改进结论,在文献[10,11]中利用 Chebeshev 加权范数研究导出该方法的最优误差阶,但是格式的稳定性则受该权函数影响.进一步,文献[9]中发展了共轭的最小二乘 Legendre/Chebyshev 配置法.针对具有不连续解问题,文献[12]中发展了间断系数椭圆问题的间断最小二乘谱元法.随后,文献[13]中则研究了一维间断问题和奇异摄动方程最小二乘谱配置方法,并且在文献[14]中研究了两维椭圆交界问题的拟谱最小二乘法.

在流体模型计算中,如 Stoke 方程等,有学者已经研究了相应最小二乘谱元素方法.文献[15]中研究了 Stokes 方程的最小二乘谱 Chebyshev 配置法,且导出强制性与连续性、以及给出最优误差阶.文献[16]中考虑了 Stokes 方程的最小二乘谱配置格式的质量和动量守恒,且该方法被对推广到 Navier-Stokes 方程的情况[17].文献[18]基于矩形单元研究了不可压缩的 Navier-Stokes 方程的最小二乘谱元法的一个直接算子.

收稿日期:2018-06-20

基金项目:国家自然科学基金项目(11701119);广西自然科学基金项目(2017GXNSFBA198053);广西混杂计算与集成电路设计分析重点实验室开放基金课题(HCIC201607)资助

通讯作者:覃永辉,男,壮族,博士,讲师,研究方向:偏微分方程数值解法,E-mail:yonghui1676@163.com.

文献[19]研究了 Navier-Stokes 方程最小二乘 Legendre/Chebeshev 配置法. 文献[20]指出通常等阶插值提供稳定的谱格式,在多区域或谱元法的计算中,配置条件和单元交界面条件导出的超定代数系统,因此需要构造最小二乘方法进行计算. 受此启发,我们发展问题(1)的 LGC 配置最小二乘法. 在空间和时间方向上同时采用 LGC 配置方法离散. 还考虑其的多步形式,通过适当数值算例验证 LGC 配置最小二乘谱精度和有效性.

本文内容安排为(1) 介绍本文相关符号及给出抛物方程的 LGC 配置最小二乘格式;(2) 给出 LGC 配置最小二乘法的多区域形式;(3) 选取基函数和 LGC 配置最小二乘格式的实施;(4) 应用数值算例得出多步最小二乘格式具有更优谱精度的结论. 最后,对该方法进行了简要总结.

1 符号与抛物方程的 LGC 配置最小二乘格式

为了便于描述,下面简单介绍一些本章用到的符号. 对于任意 $t_j \in I$,则

$$t_j=\frac{T}{2}(\hat{t}_j+1),j=0,1,\cdots,N, \tag{2}$$

其中$\hat{t}_j \in \hat{I}(0\leqslant j\leqslant N)$为 CGL 结点. 设 $I_{N,x}^{C}$为 x 方向上 Chebyshev 插值算子. 为了区分,设时间方向的 Chebyshev 插值 $I_{N,T}^{C}:C(\bar{I}_t)\to P_N(I_t)$,且满足 $I_{N,T}^{C}u=(I_{N,t}^{C}u)|_{I_t}(t_j)=u|_{I_t}(t_j)$,$(0\leqslant j\leqslant N)$.

引入通量 $u=\boldsymbol{A}\triangledown p$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 因此,问题(1)等价于

$$\begin{cases}u-\boldsymbol{A}\triangledown p=0,(x,t)\in\Omega,\\ Lu=f(x,t),(x,t)\in\Omega,\end{cases} \tag{3}$$

其中 $Lu=u_2-\partial_x u_1$,满足边界与初值条件 $p(-1,t)=p(1,t)=0,p(x,-1)=p_0(x)$.

设逼近 $V=\{u\in H^1(\Omega):u(-1,t)=u(1,t)=0\}$,对任意$(v,q)\in[H^1(\Omega)]^2\times V$,定义(3)的最小二乘函数为

$$F(v,q;f)=\| f-Lv\|^2+\| u-\boldsymbol{A}\triangledown p\|^2.$$

因此,方程(3)变分形式:求$(u,p)\in[H^1(\Omega)]^2\times V$ 使得

$$a(u,p;v,q)=f(v,q),(v,q)\in[H^1(\Omega)]^2\times V, \tag{4}$$

其中 $a(u,p;v,q)=(Lu,Lv)+(u-\boldsymbol{A}\triangledown p,v-\boldsymbol{A}\triangledown q)$,$f(v,q)=(f,Lv)$. 记 $I_N^{C}u:=I_{N,x}^{C}\circ I_{N,T}^{C}u$ 为 Ω 上的 Chebyshev 插值. 定义离散空间为 $\boldsymbol{Q}_N(\Omega)=P_{N_1}(I_x)\times P_{N_2}(I_t)$,$V_N=V\cap\boldsymbol{Q}_N(\Omega)$,则(4)的 LGCC 最小二乘格式为$(u_N,p_N)\in[\boldsymbol{Q}_N(\Omega)]^2\times V_N$ 使得

$$a_N(u_N,p_N;v,q)=f(v,q),\forall(v,q)\in[\boldsymbol{Q}_N(\Omega)]^2\times V_N, \tag{5}$$

其中 $a_N(u_N,p_N;v,q)=(Lu_N,Lv)+(u_N-\boldsymbol{A}\triangledown p_N,v-\boldsymbol{A}\triangledown q)$,$f(v,q)=(I_N^{C}f,Lv)$.

注释 1 若(2)是变系数抛物方程 $p_t-\partial_x(\mu(x,t)\partial_x p)=f(x,t),(x,t)\in\Omega$,其中 $\mu\in C^2(\bar{\Omega})$. 因此,对应格式(5)的左边为改为 $a_N(u_N,p_N;v,q)=(Lu_N,Lv)+(u_N-I_N^{C}(\boldsymbol{A}\triangledown p_N),v-I_N^{C}(\boldsymbol{A}\triangledown q))$.

注意到此时格式导出的代数矩阵如传统的谱配置法那样是稠密的,是不利于直接求解的,由于最小二乘的缘故,该方程系数矩阵是有对称正定的特点,因此在实际计算时可以类似文献[21]中讨论的那样设计预处理迭代格式.

2 多步 LGC 配置最小二乘法

设 M 和 $N_m(1\leqslant m\leqslant M)$为正整数,将 $I_t=[0,T]$划分为 $0=a_0<\cdots<a_m<\cdots a_M=T$. 记 $I_t^m=(0,\tau_m)$,其 $\tau_m=a_{m+1}-a_m$. 因此,有 $v(x,t)|_{I_x\times I_t^m}=v(x,t+a_m):=v^m$,其中 $t=\frac{1}{2}(\tau_m\hat{t}+a_m+a_{m+1})\in I_t^m$,$\hat{t}\in\hat{I}$,$(1\leqslant m\leqslant M)$.

为了方便,记$(\cdot,\cdot):=(\cdot,\cdot)_{I_x\times I_t^m}$,$\|\cdot\|_s:=\|\cdot\|_{H^s(I_x\times I_t^m)}$,$|\cdot|_s:=|\cdot|_{H^s(I_x\times I_t^m)}$. 设 P_{τ_m,N_m}^{1} 分别为 I_t^m 上的 L^2-和 H^1-Legendre 正交投影. 令 I_t^m 上 CGL 点插值算子定义为 $I_{N_m,\tau_m}^{C}u^m=(I_{N,t}^{C}u)|_{I_t^m}(t_j^m)=u|_{I_t^m}(t_j^m)$,0

$\leqslant j\leqslant N_m, 1\leqslant m\leqslant M$.

类似地，记 $I^C_{N_m}u := I^C_{N,x}\circ I^C_{N_m,\tau_m}u$ 为 $I_x\times I_t^m$ 上的 Chebyshev 插值. 设 $\boldsymbol{Q}_{N_m}=P_{N_1}(I_x)\times P_{N_{2,m}}(I_t^m)$，$V_N^m=V\cap\boldsymbol{Q}_{N_m}$，则(4)的多步 LGC 配置最小二乘格式为：求 $(u_N^m,p_N^m):=(u_N,p_N)|\Omega_m\in[\boldsymbol{Q}_{N_m}]^2\times V_N^m$ 使得

$$a_N(u_N^m,p_N^m;v,q)=f(v,q),\ \forall(v,q)\in[\boldsymbol{Q}_{N_m}]^2\times V_N^m, \tag{6}$$

其中 $a_N(u_N^m,p_N^m;v,q)=(Lu_N^m,Lv)+(u_N^m-\boldsymbol{A}\triangledown p_N^m,v-\boldsymbol{A}\triangledown q)$，$f(v,q)=(I^C_{N_m}f,Lv)$.

3　最小二乘格式的实施

设 $L_k(\theta)$ 表示次数为 Legendre 多项式，其中 $\theta=t,x$. 格式(5)中我们对空间变量取边界基函数为

$$\varphi_0(\theta)=\frac{1}{2}(L_0(\theta)-L_1(\theta)),\varphi_1(\theta)=\frac{1}{2}(L_0(\theta)+L_1(\theta)), \tag{7}$$

而内部的基函数取为 $\varphi_k(\theta)=L_k(\theta)-L_{k-2}(\theta),k\geqslant 2$.

对于时间方向的离散时，初值处采用基函数为 $\varphi_1(\theta)=\frac{1}{2}(L_0(\theta)+L_1(\theta))$. 非初值处采用的基函数与空间的内部的基函数一致. 下面定义为 $\boldsymbol{Q}_N=\{\varphi_k(x)\varphi_l(t),0\leqslant k,l\leqslant N\}$. 为了便于叙述，我们引进矩阵分别为 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{S_{xx}},\boldsymbol{S_{yy}}$，其中元素分别为 $(u,v)\in\boldsymbol{Q}_N(M)_{mn}=(\varphi_m,\varphi_n)$，$(S_{xx})_{mn}=(\partial_x\varphi_m,\partial_x\varphi_n)$，$(S_{yy})_{mn}=(\partial_y\varphi_m,\partial_y\varphi_n)$，因此，对于 $(u,v)\in\boldsymbol{Q}_N$，有

$$(u,v)=\hat{v}(\boldsymbol{M}_x^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{M}_t)\hat{u},\quad(\partial_x u,\partial_x v)=\hat{v}(\boldsymbol{S}_{xx}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{M}_t)\hat{u},(\partial_x u,v)=\hat{v}(\boldsymbol{S}_x^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{M}_t)\hat{u},$$

为了方便，我们对格式(5)的左端改写为

$$\begin{aligned}a_N(u_N,p_N;v,q)&=(u_2-\partial_x u_1,v_2-\partial_x v_1)+(u_1-\mu\partial_x p,v_1-\mu\partial_x q)+(u_2-\partial_y p,v_2-\partial_y q)\\&=(u_2,v_2)-(\partial_x u_1,v_2)-(u_2,\partial_x v_1)+(\partial_x u_1,\partial_x v_1)+(u_1,v_1)-(\mu\partial_x p,v_1)\\&\quad-(u_2,\mu\partial_x q)+(\mu\partial_x p,\mu\partial_x q)+(u_2,v_2)-(\partial_y p,v_2)-(u_2,\partial_y q)+(\partial_y p,\partial_y q).\end{aligned}$$

格式(5)的右端同理得到. 当格式(5)中 (v,q) 取遍整个检验空间时，则代数方程

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_x^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{M} & -S_x^{\mathrm{T}}\otimes I & \mu\boldsymbol{S}_x^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{S}_x^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I} & 2M_x^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{M} & -I\otimes\boldsymbol{S}_y\\ \mu\boldsymbol{S}_x^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I} & -I\otimes\boldsymbol{S}_y & \mu\boldsymbol{S}_{xx}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{S}_{yy}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{p}\end{pmatrix}=\boldsymbol{f},$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 为右端的离散形式.

4　数值算例

例 1　考虑抛物方程[6] $\partial_t p-\partial_x^2 p=0,(x,t)\in(0,1)^2$，其中边界与初值满足 $p(0,t)=p(1,t)=0,p(x,0)=\sin(\pi x)$. 精确解为 $p(x,t)=\sin(\pi x)\exp(\pi^2 t)$.

这里考虑文献[6]中 Legendre 谱方法与我们的格式(5)进行比较. 在表 1 中，给出 $t=1$ 时刻的 L^2-范数的相对误差(其中 $\mu=1,I=[0,1]$.). 所给的数值结果显示 LGC 配置最小二乘法的精度与文献[6]中 Legendre 谱方法的相似. 当 $N_1=20,N_2=20$ 时，LGC 配置最小二乘法的结果更优.

表 1　例 1 中 $t=1$ 的相对 L^2-范数误差

N_1	N_2	Legendre 谱[6]	格式(5)
20	12	6.4e−05	7.3e−05
20	12	2.2e−06	3.1e−06
20	14	5.9e−08	9.8e−08
20	16	1.2e−09	2.4e−10
20	18	2.4e−11	4.6e−11
20	20	1.2e−11	4.0e−14

例 2 考虑抛物方程(1),其中初值为 $U_0=\sin(-x)\exp\left(\dfrac{1}{-1+\alpha}\right)(\mathrm{ch}x-\mathrm{ch}1)^2$. 精确解为 $U(x,t)=\sin(xt)\exp\left(\dfrac{1}{t+\alpha}\right)(\mathrm{ch}x-\mathrm{ch}1)^2$. 该算例比较格式(5)和(6)的精度. 设$(u^m,p^m)$和$(u_N^m,p_N^m)$分别为(3)对应 $I_x\times I_t^m$ 精确解和近似解. 为了方便叙述,下面定义误差函数为 $E_p=p_N^m-p^m$, $E_u=u_N^m-u^m$. 这里分别应用格式(5)和(6)计算该算例. 表 2 中给出 $t=1$ 时刻的 L^2-范数的误差(其中 $\mu=1$, $I_t=(-1,-0.8)\cup(-0.8,1]$),并且数值结果显示两步格式的 LGC 配置最小二乘格式得到更优的谱精度.

表 2 例 2 中 $t=1$ 的 L^2-范数误差

		方法(5)			方法(6)	
N_1	N_2	$\Vert E_p\Vert$	$\Vert E_u\Vert$	$(N_{2,1},N_{21})$	$\Vert E_p\Vert$	$\Vert E_u\Vert$
4	40	2.9598e+00	2.5590e+00	(20,20)	2.2065e+00	6.6675e+01
8	50	2.0070e−03	2.100e−01	(25,25)	1.1419e−04	1.2362e−03
16	60	2.0780e−05	9.1469e−03	(30,30)	4.0135e−08	9.5695−06
32	70	6.1903e−07	3.4211e−04	(35,35)	1.4481e−09	4.2768e−07
64	80	1.6843e−08	1.1535e−05	(40,40)	1.1262e−10	2.8377e−08

5 总结

本文研究了抛物方程的 LGC 配置最小二乘方法以及给出其多区间格式. 该方法导出的代数方程是对称正定的,求解时可应用合理的迭代方法. 基于 Legendre-Galerkin 框架,但对源项和初值部分采用 Chebyshev 配置方法处理. 因此,格式有快速计算特点,适合推广到非线性问题的计算. 注意到这里可以利用 Legendre 配置点进行插值. 数值例子证明了该方法具有高阶谱精度. 更有意义的是考虑高维非线性问题,如文[16,17]等. 结合交替方向技术,将来我们研究高维非线性抛物方程 LGC 配置最小二乘法.

参考文献

[1] Canuto C, Hussaini M Y, Quareroni A, et al. Spectral Methods[M]. Berlin:Springer-Verlag, 2006.

[2] Canuto C,Hussaini M Y, Quareroni A, et al. Spectral Methods[M]. Berlin: Springer, 2007.

[3] Shen J, Tang T,Wang L L. Spectral Methods[M]. Berlin:Springer Heidel Berg, 2011.

[4] Hillel T E. Spectral methods in time for hyperbolic equations[J]. SIAM J Numer Anal,1986,23(1):11-26.

[5] Hillel T E. Spectral methods in time for parabolic problems[J]. SIAM J Numer Anal,1989,26(1):1-11.

[6] Tang J G,Ma H P. Single and multi-interval Legendre τ-methods in time for parabolic equations[J]. Adv Compute Math,2002,17(4):349-367.

[7] Shen J, Wang L L. Fourierization of the Legendre-Galerkin method and a new space time spectral method[J]. Appl Numer Math,2007, 57(5-7):710-720.

[8] Tang J G, Ma H P. A Legendre spectral method in time for first order hyperbolic equation[J]. Appl Numer Math,2007,57(1):1-11.

[9] Kim S D, Lee H C,Shin B C. Pseudospectral least-squares method for the second-order elliptic boundary vuale Problem [J]. SIAM J Number Anal,2003,41(4):1370-1387.

[10] Kim S D, Shin B C. Chebyshev weighted norm least-squares spectral methods for the elliptic problem[J]. J Comput Math, 2006,24(4):451-462.

[11] Kim S D, Shin B C. Adjoint Pseudospectral least-squares methods for an elliptic boundary value problem[J]. Appl Numer Math,2009,59(2):334-348.

[12] Gerritsma M I, Proot M J. Analysis of a discontinuous least square spectral element method[C]. //Proceedings of the Fif-th International Conference on Spectral and High Order Methods (ICOSAHOM-01),2002.

[13] Heinrichs W. Least-squares spectral collocation for discontinuous and singular perturbation problem[J]. J Comput Appl Math,2003,157

(2):329-345.

[14] Shin B C. Pseudo-spectral least-squares method for elliptic interface problems[J]. J Korean Math Soc,2013,50(6):1291-1310.

[15] Kim S D, Lee H C, Shin B C. Least-squares spectral collocation method for the Stokes equations[J]. Number Method Partial Differential Equations, 2004,20(1):128-139.

[16] Kattelans T, Heinrichs W. Conservation of mass and momentum of the least-squares spectral collocation scheme forth Sto-kes problem [J]. J Comput Phys, 2009,228(13):4649-4664.

[17] Kattelans T, Heinrichs W. Conservation of mass and momentum of the least-squares spectral collocation scheme forth Na-vier-Stokes problem[J]. J Comput Appl Math, 2011,236(6):1193-1215.

[18] Heirichs W, Kattelans T. A direct solver for the least-squares spectral collocation system on rectangular elements for the incompressible Navier-Stokes equations[J]. J Comput Phys,2008,227(9):4776-4796.

[19] Hesspri P, Shin B C. The least-squares pseudo-spectral method for Navier-Stokes equations[J]. Comput Math Appl,2013,66(3):318-329.

[20] Heinrichs W. An adaptive least-squares spectral collocation methods with triangular elements for the incompressible Navier-Stokes equations[J]. J Engrg Math,2006,56(3):337-350.

[21] Qin Y H, Li J L, Ma H P. The Legendre Galerkin Chebyshev collocation least squares for the elliptic problem[J]. Numer Methods Partial Differential Equations,2016,32(6):1689-1703.

Legendre-Galerkin Chebyshev Collocation Least Squares Method for Parabolic Equations

HU Xiao-mei　QIN Yong-hui　XIE Zhen-shu

(School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004,China)

Abstract　The Legendre-Galerkin Chebyshev collocation least squares methods for parabolic equations is developed in this paper. We also consider its multi-intervals formulas. The original equation is rewritten into an equivalent first-order system by introducing a flux. The propose is based on the Legendre- Galerkin scheme, but the right hand side and the initial value terms are computed by Chebyshev collocation. Some numerical examples are given to test the accuracy of our schemes.

Key words　parabolic equations; Legendre Galerkin; Chebyshev collocation; least squares