第 31 卷　第 1 期
2018 年 3 月

聊城大学学报(自然科学版)
Journal of Liaocheng University(Nat. Sci.)

Vol. 31 No. 1
Mar. 2018

文章编号　1672-6634(2018)01-0029-06　　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2018.01.005

非奇异 *H*-张量的新判定准则 ①

张云翠[1]　王明辉[1]　王广彬[2]

(1.青岛科技大学 数理学院,山东 青岛 266100;2.青岛农业大学 理学与信息科学学院,山东 青岛 266109)

摘　要　***H***-张量是张量分析中新发展的新概念,它还是对***M***-张量的拓展.近年来***H***-张量应用数学和物理学的多个领域.本文首先给出了所使用的定义、定理及推论,然后证明了给出的非奇异***H***-张量的判定准则,最后给出了两个数值实例.

关键词　***H***-张量;广义对角占优;***M***-张量

中图分类号　O241.6　　**文献标识码**　A

0　引言

张量在信号与图像处理、连续物理学、高阶统计、博弈等方面得到了广泛应用[1,7],最近张量分析[8,9,12,14]和计算引起了研究者的注意,同时矩阵和张量的判定[5,6,10,11]也备受关注.简单的说,张量是矩阵的高阶推广.高阶张量是定义了多指标的高阶数组如

$$\mathbf{A}=a_{i_1 i_2 \cdots i_m},$$

其中 $a_{i_1 i_2 \cdots i_m} \in \mathbf{R}, i_j=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m.$

对于张量 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 在[1]中定义如

$$(\boldsymbol{A}\times_{\mathrm{k}}\boldsymbol{X})_{i_1 i_2 \cdots j_k \cdots i_m}=\sum_{i_k=1}^{n}\boldsymbol{A}_{\mathrm{i_1 i_2 \cdots i_k \cdots i_m}}\boldsymbol{X}_{i_k j_k},$$

表示为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{m-1}=\boldsymbol{A}\times_2\boldsymbol{X}\times_3\boldsymbol{X}\cdots\times_m\boldsymbol{X}.$$

对于张量 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{m-1}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{m-1})_i=\sum_{i_2,i_3,\cdots,i_m=1}^{n,n,\cdots n}a_{ii_2 i_3\cdots i_m}\boldsymbol{X}_{i_2}\boldsymbol{X}_{i_3}\cdots\boldsymbol{X}_{i_m}, i=1,2,\cdots,n,$$

并且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^m$ 是标量

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^m=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=1}^{n,n,\cdots n}a_{i_1 i_2\cdots i_m}\boldsymbol{X}_{i_1}\boldsymbol{X}_{i_2}\cdots\boldsymbol{X}_{i_m}.$$

用 $\boldsymbol{I}$ 来表示 m 阶 n 维的单位张量

$$\boldsymbol{I}_{i_1 i_2\cdots i_m}=\begin{cases}1, i_1=i_2=\cdots=i_m,\\ 0,\text{其它},\end{cases}$$

并且定义如下符号

$$\delta_{i_1 i_2\cdots i_m}=\begin{cases}1, i_1=i_2=\cdots=i_m,\\ 0,\text{其它}.\end{cases}$$

①　收稿日期:2017-12-29
基金项目:国家自然科学基金项目(11771188)资助
通讯作者:王明辉,男,汉族,博士,教授,研究方向:数值代数、科学计算,E-mail: mhwang@yeah.net.

1 M-张量和H-张量的性质

本节首先介绍了张量分析中的一些定义,然后又介绍了一些特殊的结构张量. 对于 m 阶 n 维的实张量 $\boldsymbol{A}$ 和标量 $\lambda \in \boldsymbol{C}$, 如果存在非零向量 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{C}^n$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{m-1} = \lambda \boldsymbol{X}^{[m-1]},$$

其中 $\boldsymbol{X}^{[m-1]} \in \boldsymbol{C}^n$,并且 $(\boldsymbol{X}^{[m-1]})_i = \boldsymbol{X}_i^{m-1}, i = 1,2,\cdots,n$,则 λ 是张量 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{X}$ 是对应 λ 的特征向量[13]. 特别的,如果 $\boldsymbol{X}$ 是实的,那么 λ 也是实数,定义 $(\lambda;\boldsymbol{X})$ 是张量 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量对. 张量 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值中的最大值被称为张量 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径记为 $\rho(\boldsymbol{A})$. 受非奇异矩阵的启发,如果张量的特征值都是非零的就可以说该张量是非奇异的.

定义 1[2] 如果张量 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{Z}$-张量则可以写成 $\boldsymbol{A} = c\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$,其中 $c > 0$,$\boldsymbol{B}$ 是非负张量. 如果 $c \geqslant \rho(\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{M}$-张量;如果 $c > \rho(\boldsymbol{B})$,$\boldsymbol{A}$ 是非奇异 $\boldsymbol{M}$-张量.

命题 1[2] 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{Z}$ -张量,下面两个条件中有一个成立说明 $\boldsymbol{A}$ 是非奇 $\boldsymbol{M}$-张量.

(1) 张量 $\boldsymbol{A}$ 任何特征值的实部都是正的;

(2) 存在正向量 $\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{m-1} > 0$.

定义 2[2] 对 m 阶 n 维的张量 $\boldsymbol{A}$,它的比较张量记作 $\boldsymbol{M}_A$,定义如下

$$\boldsymbol{M}_A = \begin{cases} | a_{i_1 i_2 \cdots i_m} |, i_1 = i_2 = \cdots = i_m, \\ -| a_{i_1 i_2 \cdots i_m} |, \text{其它}. \end{cases}$$

定义 3[2,4] 如果张量 $\boldsymbol{A}$ 的比较张量 $\boldsymbol{M}_A$ 是 $\boldsymbol{M}$-张量,则张量 $\boldsymbol{A}$ 被称为 $\boldsymbol{H}$-张量,如果张量 $\boldsymbol{A}$ 的比较张量 $\boldsymbol{M}_A$ 是非奇异 $\boldsymbol{M}$-张量,则张量 $\boldsymbol{A}$ 被称为非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量.

定义 4[3,15] 对于 $\forall\, i = 1,2,\cdots,n$, 如果张量 $\boldsymbol{A}$ 满足不等式

$$| a_{ii\cdots i} | \geqslant \sum_{i_2 \cdots i_m \neq ii\cdots i} | a_{ii_2 i_3 \cdots i_m} |, \tag{1}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是对角占优的. 张量 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优的当且仅当该不等式严格成立.

定理 1[3] 如果 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优张量或不可约张量,且至少有一个严格不等式(1)成立的对角占优张量,则张量 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量.

定义 5[2] 如果存在正对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{m-1}$ 严格对角占优,张量 $\boldsymbol{A}$ 被称为广义的严格对角占优张量.

命题 2[2] 张量 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是广义的严格对角占优张量.

推论 1[2] 对于张量 $\boldsymbol{A}$,如果存在正对角矩阵 $\boldsymbol{D} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{m-1}$ 是非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量,则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量.

命题 3[2] 如果 $\boldsymbol{A}$ 是不可约张量且至少有一个严格不等式(1)成立的对角占优张量,则 $\boldsymbol{A}$ 是广义对角占优张量.

2 非奇异 H-张量的判定准则

设集合 S 是集合 $\mathbf{N}$ 的子集,并且 $\overline{S} = \mathbf{N}\backslash S$. 定义所用的指标

$$\Lambda = \{ i_2 i_3 \cdots i_m \mid i_k \in S, k = 2,3,\cdots,m \},$$

$$\overline{\Lambda} = \{ i_2 i_3 \cdots i_m \mid i_k \in \overline{S}, k = 2,3,\cdots,m \}.$$

使得张量 $\boldsymbol{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m})$ 的 $R_i(\boldsymbol{A})$ 分成两部分

$$R_i^{\Lambda}(\boldsymbol{A}) = \sum_{\substack{i_2 i_3 \cdots i_m \neq ii\cdots i \\ i_2 i_3 \cdots i_m \in \Lambda}} | a_{ii_2 \cdots i_m} |, R_i^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A}) = \sum_{\substack{i_2 i_3 \cdots i_m \neq ii\cdots i \\ i_2 i_3 \cdots i_m \in \overline{\Lambda}}} | a_{ii_2 \cdots i_m} |.$$

我们有以下结论.

定理 2 对于张量 $\boldsymbol{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m})$,如果存在 $\mathbf{N}$ 的子集 $(S,\overline{S})$ 使得

$$|a_{pp\cdots p}|-R_p(\boldsymbol{A})>0, p\in S;\ |a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})>0, q\in\overline{S}. \tag{2}$$

$$(|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A}))^{\alpha}(|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A}))^{1-\alpha}>R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})^{\alpha}(R_q^{\Delta}(\boldsymbol{A}))^{1-\alpha}. \tag{3}$$

且下面的两个条件之一成立

(1) $\dfrac{R_q^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}>1, \alpha\in[0,\dfrac{1}{2}]$,

(2) $0<\dfrac{R_q^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}<1, \alpha\in[\dfrac{1}{2},1]$.

则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量.

证明　从不等式 $(|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A}))^{\alpha}(|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A}))^{1-\alpha}>R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})^{\alpha}(R_q^{\Delta}(\boldsymbol{A}))^{1-\alpha}$ 得到

$$\left(\frac{|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}\right)^{\alpha}>\left(\frac{R_q^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}\right)^{1-\alpha},$$

根据(2)则有

$$\frac{|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}>1.$$

如果 $\dfrac{R_q^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}>1, \alpha\in[0,\dfrac{1}{2}]$ 成立,则

$$\left(\frac{|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}\right)^{\alpha}>\left(\frac{R_q^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}\right)^{1-\alpha}\geqslant\left(\frac{R_q^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}\right)^{\alpha},$$

所以

$$\frac{|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}>\frac{R_q^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})},$$

因此可以找到正对角矩阵 $\boldsymbol{D}$

$$\boldsymbol{D}_{ii}=\begin{cases}1, & i\in S,\\ d, & i\in\overline{S}.\end{cases}$$

当 $d>1$ 时使得

$$\frac{|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}>d^{m-1}, p\in S; d^{m-1}>\frac{R_q^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}, q\in\overline{S}.$$

对于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{m-1}$,很容易发现对于任意的 $i\in\mathbf{N}$ 都有

$$R_i^{\Delta}(\boldsymbol{B})=\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\neq ii\cdots i\\ i_2i_3\cdots i_m\in\Delta}}|b_{ii_2\cdots i_m}|=\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\neq ii\cdots i\\ i_2i_3\cdots i_m\in\overline{\Delta}}}|a_{ii_2\cdots i_m}|=R_i^{\Delta}(\boldsymbol{A}),$$

$$R_i^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{B})=\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\neq ii\cdots i\\ i_2i_3\cdots i_m\in\overline{\Delta}}}|b_{ii_2\cdots i_m}|\leqslant d^{m-1}R_i^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A}),$$

并且

$$b_{pp\cdots p}=a_{pp\cdots p}, b_{qq\cdots q}=d^{m-1}a_{qq\cdots q},$$

因此对于 $p\in S$,如果 $R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})>0$,则

$$\begin{aligned}R_p(\boldsymbol{B})&=R_p^{\Delta}(\boldsymbol{B})+R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{B})\leqslant R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A})+d^{m-1}R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})\\&<R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A})+\frac{a_{pp\cdots p}-R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A})}{R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})}R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})\\&=a_{pp\cdots p}=b_{pp\cdots p}.\end{aligned}$$

如果 $R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})=0$,从(2)式得到

$$\begin{aligned}R_p(\boldsymbol{B})&=R_p^{\Delta}(\boldsymbol{B})+R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{B})\leqslant R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A})+d^{m-1}R_p^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{A})\\&=R_p^{\Delta}(\boldsymbol{A})<a_{pp\cdots p}=b_{pp\cdots p}.\end{aligned}$$

对 $q\in\overline{S}$,从不等式(3)得到

$$
\begin{aligned}
b_{qq\cdots q}-R_q(\boldsymbol{B}) &= d^{m-1}a_{qq\cdots q}-R_q^{\Delta}(\boldsymbol{B})-R_q^{\overline{\Delta}}(\boldsymbol{B}) \geqslant d^{m-1}a_{qq\cdots q}-R_q^{\Delta}(\mathbf{A})-d^{m-1}R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})\\
&= d^{m-1}(a_{qq\cdots q}-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A}))-R_q^{\Delta}(\mathbf{A})\\
&> \frac{R_q^{\Delta}(\mathbf{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}(a_{qq\cdots q}-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A}))-R_q^{\Delta}(\mathbf{A})=0.
\end{aligned}
$$

这就意味着张量 $\boldsymbol{AD}^{m-1}$ 是严格对角占优的,且 $\mathbf{A}$ 是广义严格对角占优的,由命题 2 得到张量 $\mathbf{A}$ 是非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量.

当 $\alpha\in[\frac{1}{2},1]$,对于 $0<\frac{R_q^{\Delta}(\mathbf{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}<1$,类似于上面的证明过程,可知 $\mathbf{A}$ 是非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量.

定理 3 对不可约张量 $\mathbf{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_m})$,如果存在 $\mathbf{N}$ 的子集 $(S,\overline{S})$ 使得

$$
\begin{gathered}
|a_{pp\cdots p}|-R_p(\mathbf{A})\geqslant 0,p\in S;|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})\geqslant 0,q\in\overline{S}, \\
(|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\mathbf{A}))^{\alpha}(|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}\geqslant R_p^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})^{\alpha}(R_q^{\Delta}(\mathbf{A}))^{1-\alpha},
\end{gathered}\tag{4}
$$

且存在 $p_0\in S$, $q_0\in\overline{S}$ 使得

$$
\begin{gathered}
|a_{p_0p_0\cdots p_0}|-R_{p_0}(\mathbf{A})>0,\\
(|a_{p_0p_0\cdots p_0}|-\mathbf{R}_{p_0}^{\Delta}(\mathbf{A}))^{\alpha}(|a_{q_0q_0\cdots q_0}|-R_{q_0}^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}>R_{p_0}^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})^{\alpha}(\mathbf{R}_{q_0}^{\Delta}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}.
\end{gathered}\tag{5}
$$

如果下面的两个条件之一成立,

(1) $\frac{R_q^{\Delta}(\mathbf{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}>1,\alpha\in[0,\frac{1}{2}]$,(2) $0<\frac{R_q^{\Delta}(\mathbf{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}<1,\alpha\in[\frac{1}{2},1]$,

则 $\mathbf{A}$ 是非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量.

证明 从不等式 $(|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\mathbf{A}))^{\alpha}(|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}\geqslant R_p^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})^{\alpha}(R_q^{\Delta}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}$ 可得到

$$
\left(\frac{|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\mathbf{A})}{R_p^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}\right)^{\alpha}\geqslant\left(\frac{R_q^{\Delta}(\mathbf{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}\right)^{1-\alpha},
$$

由(4)式得到

$$
\frac{|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\mathbf{A})}{R_p^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}\geqslant 1.
$$

如果 $\frac{R_q^{\Delta}(\mathbf{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}>1,\alpha\in[0,\frac{1}{2}]$ 成立,则

$$
\left(\frac{|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\mathbf{A})}{R_p^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}\right)^{\alpha}\geqslant\left(\frac{R_q^{\Delta}(\mathbf{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}\right)^{1-\alpha}\geqslant\left(\frac{R_q^{\Delta}(\mathbf{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}\right)^{\alpha},
$$

所以有

$$
\frac{|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\mathbf{A})}{R_p^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}\geqslant\frac{R_q^{\Delta}(\mathbf{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})},
$$

以及

$$
\frac{|a_{p_0p_0\cdots p_0}|-R_{p_0}^{\Delta}(\mathbf{A})}{R_{p_0}^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}>\frac{R_{q_0}^{\Delta}(\mathbf{A})}{|a_{q_0q_0\cdots q_0}|-R_{q_0}^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})},
$$

因此可以找到正对角矩阵

$$
\boldsymbol{D}_{ii}=\begin{cases}1, & i\in S,\\ d, & i\in\overline{S},\end{cases}
$$

其中 $d>1$ 并使得

$$
\frac{|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Delta}(\mathbf{A})}{R_p^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})}\geqslant d^{m-1},p\in S;d^{m-1}\geqslant\frac{R_q^{\Delta}(\mathbf{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Delta}}(\mathbf{A})},q\in\overline{S}.
$$

对于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AD}^{m-1}$,由于 $\boldsymbol{D}$ 是正对角矩阵,因此张量 $\boldsymbol{B}$ 仍然是不可约张量.

很容易可以看出对于任意的 $i\in\mathbf{N}$ 有

$$
R_i^{\Delta}(\boldsymbol{B})=\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\neq ii\cdots i\\ i_2i_3\cdots i_m\in\Delta}}|b_{ii_2\cdots i_m}|=\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\neq ii\cdots i\\ i_2i_3\cdots i_m\in\overline{\Delta}}}|a_{ii_2\cdots i_m}|=R_i^{\Delta}(\mathbf{A}),
$$

$$R_i^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{B})=\sum_{\substack{i_2i_3\cdots i_m\neq ii\cdots i\\ i_2i_3\cdots i_m\in\overline{\Lambda}}}|b_{ii_2\cdots i_m}|\leqslant d^{m-1}R_i^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A}),$$

且

$$b_{pp\cdots p}=a_{pp\cdots p},\ b_{qq\cdots q}=d^{m-1}a_{qq\cdots q}.$$

因此对于 $p_0\in S$,如果 $R_{p_0}^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})>0$,则有

$$\begin{aligned}R_{p_0}(\boldsymbol{B})&=R_{p_0}^{\Lambda}(\boldsymbol{B})+R_{p_0}^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{B})\leqslant R_{p_0}^{\Lambda}(\boldsymbol{A})+d^{m-1}R_{p_0}^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})\\&<R_{p_0}^{\Lambda}(\boldsymbol{A})+\frac{a_{p_0p_0\cdots p_0}-R_{p_0}^{\Lambda}(\boldsymbol{A})}{R_{p_0}^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})}R_{p_0}^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})\\&=a_{p_0p_0\cdots p_0},\end{aligned}$$

如果 $R_{p_0}^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})=0$,从不等式(5)式得到

$$\begin{aligned}R_{p_0}(\boldsymbol{B})&=R_{p_0}^{\Lambda}(\boldsymbol{B})+R_{p_0}^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{B})\leqslant R_{p_0}^{\Lambda}(\boldsymbol{A})+d^{m-1}R_{p_0}^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})\\&=R_{p_0}^{\Lambda}(\boldsymbol{A})<a_{p_0p_0\cdots p_0}.\end{aligned}$$

对 $i\in S$,如果 $R_p^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})>0$,则

$$\begin{aligned}R_p(\boldsymbol{B})&=R_p^{\Lambda}(\boldsymbol{B})+R_p^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{B})\leqslant R_p^{\Lambda}(\boldsymbol{A})+d^{m-1}R_p^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})\\&\leqslant R_p^{\Lambda}(\boldsymbol{A})+\frac{a_{pp\cdots p}-R_p^{\Lambda}(\boldsymbol{A})}{R_p^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})}R_p^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})\\&=a_{pp\cdots p}=b_{pp\cdots p},\end{aligned}$$

如果 $R_p^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})=0$,由(4)式可得到

$$\begin{aligned}R_p(\boldsymbol{B})&=R_p^{\Lambda}(\boldsymbol{B})+R_p^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{B})\leqslant R_p^{\Lambda}(\boldsymbol{A})+d^{m-1}R_p^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})\\&=\mathbf{R}_p^{\Lambda}(\boldsymbol{A})\leqslant a_{pp\cdots p}=b_{pp\cdots p}.\end{aligned}$$

对 $q\in\overline{S}$,根据(4)式有

$$\begin{aligned}b_{qq\cdots q}-R_q(\boldsymbol{B})&=d^{m-1}a_{qq\cdots q}-R_q^{\Lambda}(\boldsymbol{B})-R_q^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{B})\geqslant d^{m-1}a_{qq\cdots q}-R_q^{\Lambda}(\boldsymbol{A})-d^{m-1}R_q^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})\\&=d^{m-1}(a_{qq\cdots q}-R_q^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A}))-R_q^{\Lambda}(\boldsymbol{A})\\&\geqslant\frac{R_i^{\Lambda}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii\cdots i}|-R_i^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})}(a_{ii\cdots i}-R_i^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A}))-R_i^{\Lambda}(\boldsymbol{A})=0.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{AD}^{m-1}$ 是至少有一个严格不等式(1)成立的对角占优张,所以 $\boldsymbol{AD}^{m-1}$ 是不可约的,由命题 3 得知 $\boldsymbol{AD}^{m-1}$ 是广义对角占优张量. 所以 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的广义对角占优 $\boldsymbol{H}$-张量.

当 $\alpha\in[\frac{1}{2},1]$,对于 $0<\dfrac{R_q^{\Lambda}(\boldsymbol{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\Lambda}(\boldsymbol{A})}<1$. 类似于以上证明,可知 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量.

3　数值算例

例 1　对于 4 阶 4 维的张量 $\boldsymbol{A}$,元素如

$$a_{1111}=a_{2222}=a_{3333}=a_{4444}=2,a_{1222}=\frac{1}{3},a_{2111}=a_{4111}=a_{4222}=1,a_{2444}=\frac{4}{3},$$

其余的元素为 0,并且 $S=\{1,3\}$, $\overline{S}=\{2,4\}$, $p=1$, $q=2$, $\alpha=\frac{1}{3}$.

可算出

$$R_1(\boldsymbol{A})=\frac{1}{3},R_2(\boldsymbol{A})=\frac{7}{3},R_3(\boldsymbol{A})=0,R_4(\boldsymbol{A})=2,$$

因此

$$\frac{R_q^{\Lambda}(\boldsymbol{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})}=\frac{R_2^{\Lambda}(\boldsymbol{A})}{|a_{22\cdots 2}|-R_2^{\overline{\Lambda}}(\boldsymbol{A})}=\frac{1}{2-\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}>1,$$

并且有

$$(|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Lambda}(\mathbf{A}))^{\alpha}(|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}=(|a_{11\cdots 1}|-R_1^{\Lambda}(\mathbf{A}))^{\frac{1}{3}}(|a_{22\cdots 2}|-R_2^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A}))^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times(\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}},$$

以及

$$R_p^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A})^{\alpha}(R_q^{\Lambda}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}=R_1^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A})^{\frac{1}{3}}R_2^{\Lambda}(\mathbf{A})^{\frac{2}{3}}=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}\times 1^{\frac{2}{3}}=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}},$$

所以有

$$(|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Lambda}(\mathbf{A}))^{\alpha}(|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}>R_p^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A})^{\alpha}(R_q^{\Lambda}(\mathbf{A}))^{1-\alpha},$$

由定理 2 可知 $\mathbf{A}$ 是非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量.

例 2 对 4 阶 4 维的张量 $\mathbf{A}$,元素如下

$$a_{1111}=a_{2222}=a_{3333}=a_{4444}=4,\ a_{1222}=\frac{1}{4},a_{2111}=a_{2444}=a_{4111}=a_{4222}=1,$$

其余的元素均为 0,并且有 $S=\{1,3\}$, $\bar{S}=\{2,4\}$, $p=1$, $q=2$, $\alpha=\frac{2}{3}$.

可算出

$$R_1(\mathbf{A})=\frac{1}{4},R_2(\mathbf{A})=2,R_3(\mathbf{A})=0,R_4(\mathbf{A})=2,$$

因此有

$$0<\frac{R_q^{\Lambda}(\mathbf{A})}{|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A})}=\frac{R_2^{\Lambda}(\mathbf{A})}{|a_{22\cdots 2}|-R_2^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A})}=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}<1,$$

并且得到

$$(|a_{pp\cdots p}|-R_p^{\Lambda}(\mathbf{A}))^{\alpha}(|a_{qq\cdots q}|-R_q^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}=(|a_{11\cdots 1}|-R_1^{\Lambda}(\mathbf{A}))^{\frac{2}{3}}(|a_{22\cdots 2}|-R_2^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A}))^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}},$$

以及

$$R_p^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A})^{\alpha}(R_q^{\Lambda}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}=R_1^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A})^{\frac{2}{3}}(R_2^{\Lambda}(\mathbf{A}))^{\frac{1}{3}}=(\frac{1}{4})^{\frac{2}{3}},$$

所以有

$$(|a_{pp\cdots p}|-\mathbf{R}_p^{\Lambda}(\mathbf{A}))^{\alpha}(|a_{qq\cdots q}|-\mathbf{R}_q^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}>\mathbf{R}_p^{\overline{\Lambda}}(\mathbf{A})^{\alpha}(\mathbf{R}_q^{\Lambda}(\mathbf{A}))^{1-\alpha}.$$

从定理 2 可知 $\mathbf{A}$ 是非奇异 $\boldsymbol{H}$-张量.

参 考 文 献

[1] Kolda T G,Bader B W. Tensor decompositions and applications[J]. SIAM Review,2009,51(3):455-500.

[2] Ding W Y,Qi L Q,Wei Y M. *M*-tensors and nonsingular *M*-tensors[J]. Linear Algebra & its Applications,2013,439(10):3264-3278.

[3] Zhang L P,Qi L Q,Zhou G L. *M*-tensors and some applications[J]. SIAM J Matrix Anal Appl,2014,35(2):437-452.

[4] 李耀堂,游兆永. 关于非奇 *H*-矩阵的条件[J]. 工程数学学报,1998(4):65-70.

[5] 范迎松,陆全,徐仲,等. 非奇异 *H*-矩阵的一组细分判别准则[J]. 高等学校计算数学学报,2013,35(3):233-239.

[6] 李庆春. 广义严格对角占优矩阵的判定[J]. 高等学校计算数学学报,1999,21(1):87-92.

[7] 刑海云. 矩阵的半张量积在进化博弈论中的应用[J]. 聊城大学学报(自然科学版),2016,29(1):1-4.

[8] 王慧敏,赵建立,牛磊. 矩阵左半张量积的正定性[J]. 聊城大学学报(自然科学版),2009,22(1):1-3.

[9] 李东方,薛超迅,赵建立. 矩阵的拟半张量积[J]. 聊城大学学报(自然科学版),2008,21(2):30-32.

[10] 王峰,孙德淑. *H*-张量的判定及其应用[J]. 数值计算与计算机应用,2015,36(3):287-297.

[11] 王峰,孙德淑. *H*-张量的新迭代准则及其应用[J]. 应用数学和力学,2015,36(12):1315-1323.

[12] Chang K,Qi L,Zhang T. A survey on the spectral theory of nonnegative tensors [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2013,20(6):891-912.

[13] Chang K,Pearson K J,Zhang T. Primitivity,the convergence of the NQZ method,the largest eigenvalue for nonnegative tensors[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,2011,32(3):806-819.

[14] Brachat J,Comon P,Mourrain B,et al. Symmetric tensor decomposition[J]. Linear Algebra Appl,2015,433 (11):1851-1872.

[15] Moakher M. On the averaging of symmetric positive-definite tensors[J]. Elasticity,2006,82(3):273-296.

(下转第 55 页)

[10] Wang Q L, Sang D D, Jiao H, et al. Ionic transport and dielectric properties in $NaNbO_3$ under high pressure[J]. Appl Phys Lett, 2017, 111: 152903.

[11] Wang Q L, Liu C L, Gao Y, et al. Mixed conduction and grain boundary effect in lithium niobate under high pressure[J]. Appl Phys Lett, 2015, 106: 132902.

[12] Tuller H L. Ionic conduction in nanocrystalline materials[J]. Solid State Ionics, 2000, 131: 143-150.

[13] Abrantes J C C, Labrincha J A, Frade J R. An alternative representation of impedance spectra of ceramics[J]. Mater Res Bull, 2000, 35: 727-735.

[14] Sinclair D C, West A R. Impedance and modulus spectroscopy of semiconducting $BaTiO_3$ showing positive temperature coefficient of resistance[J]. J Appl Phys, 1989, 66: 3850-3856.

[15] Qin T R, Wang Q L, Yue D H, et al. High-pressure dielectric behavior of polycrystalline CaMoO4: The role of grain boundaries[J]. J Alloys Compd, 2018, 730: 1-7.

高压下晶界对 $BaTiO_3$ 纳米晶电输运行为的影响

桑丹丹　王庆林　张丙元　王文军　胡海泉

（聊城大学 物理科学与信息工程学院、山东省光通信科学与技术重点实验室，山东 聊城 252059）

摘　要　利用金刚石对顶砧装置，测量了 $BaTiO_3$ 纳米晶高压下(最高压力达 35GPa)的交流阻抗谱. 给出了晶粒和晶界各自对电输运性质的贡献. 在高压相，晶界对总的电输运性质起主导作用. 三个结构相晶界电阻的差异源于结构相变引起的晶界微结构重组.

关键词　高压；$BaTiO_3$ 纳米晶；晶界；阻抗

中图分类号　O521　　**文献标识码**　A

（上接第 34 页）

The new Criteria for Determining Nonsingular *H*-tensors

ZHANG Yun-cui[1]　WANG Ming-hui[1]　WANG Guang-bin[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266100, China; 2. School of Science and Information Science, Qingdao Agricultural University, Qingdao 266109, China)

Abstract　***H***-tensor is a newly developed concept in tensor analysis, and it is also an extension of ***M***-tensor. In recent years, ***H***-tensor has applied many aspects of mathematics and physics. The definitions、theorems and inferences used in this paper are given first, then the new criterion for the determination of nonsingular ***H***-tensors are given, and at last two numerical examples are given.

Key words　***H***-tensor; generalized diagonally dominant; ***M***-tensor